Grundlehren
von den
Formen, Differenzen, Differentialien
und
Integralien
der Functionen
nebst den

Principien der Anwendung derselben auf die Auflösung mathematischer Probleme,

mit besonderer Rücksicht auf diejenigen, welche sich blos durch Selbststudium Kenntnisse in der Mathematik verschaffen wollen, und mit Vermeidung aller Begriffe von dem unendlich Kleinen bearbeitet



von

Ch. L. Rösling,

Doctor der Philosophie und Privatlehrer der Mathematik an der Friedrich-Alexanders Universität zu Erlangen.

Erster Theil.

Erlangen,
bei Johann Jakob Palm. 1805.

C. Rau

1956

Sr. Hochgebohrnen Excellenz

dem

Reichsfreiherrn

Carl August von Hardenberg,

Sr. Königlichen Majestät von Preussen wirklichen Staats- Kriegs- Cabinets- und dirigirenden Ministers, Chef des Departements von Ansbach und Bayreuth, rc. rc. wie auch Ritter des schwarzen und rothen Adler-Ordens rc.

Hochgebohrner Freyherr,

Gnädigster Herr Minister!

Ew. Hochgebohrne Excellenz werden dieses öffentliche Denkmal meines Dankes und meiner tiefsten Verehrung mit einem gnädigen Auge ansehen; denn es ist blos die reine Ergiessung des Gefühls, das ich mit Tausenden theile. Hochdero Name muß in der Geschichte der Künste und Wissenschaften, so lange diese unter den Menschen den ihnen gebührenden Werth behaupten, einen der ersten Plätze unter den Beförderern derselben einnehmen! Denn Hochdenenselben allein verdankt unsere Akademie ihre neue Schöpfung und ihr neues Aufblühen zu einem der ersten Musensitze von Europa.

Diese hier vorgelegte Schrift sey Hochdenenselben ein Beweis, daß auch ich bey dem so königlich versorgten Institute thätig und brauchbar bin, und daher Hochdero Beyfall sicher verdiene. Mit tiefster Verehrung verharre ich

Ew. Hochgebohren Excellenz

unterthänigster

Ch. L. Rösling.

Vorrede.

Liebhabern der Mathematik, welche ohne mündliche Leitung eines Lehrers und ganz ihrer eigenen Kraft überlassen, über die gewöhnlichen Gränzen der gemeinen Algebra hinausgehen und sich zum erstenmal in dem Gebiethe desjenigen Theils der Mathematik, dem man den obscuren und sonderbaren Namen: Analysis des Unendlichen gegeben hat, umsehen wollen — entweder, um sich sogleich ein für allemal darin so viele nicht ganz mittelmäßige Kenntnisse zu verschaffen, als zu einem gründlicheren Studio der angewandten Mathematik und insbesondere der Maschinenlehre nöthig sind, oder, um sich zu einem ferneren Studio der mathematischen Analysis fertig zu machen — übergebe ich hier den ersten Theil eines Werkes über die Functionen, bey dessen Bearbeitung ich einzig und allein auf oben gedachte Leser Rücksicht genommen habe, und den hoffentlich keiner derselben unzufrieden aus den Händen legen wird. Ich habe bey dem Vortrage der darin enthaltenen Lehren so wenig als möglich aus der gemeinen Algebra vorausgesetzt, ja ich habe sogar Lehren, die in der gemeinen Algebra vorgetragen werden müssen, und auf die ich mich geradezu hätte berufen können, da, wo es mir für meine Leser Bedürfniß zu seyn schien, nach meiner eigenen Methode vorgetragen und mit den übrigen Lehren, zu welchen ich sie nöthig hatte, gehörig in Verbindung gebracht. Bey Materien, die etwas schwer sind, habe ich mich öfters, eben weil mein Werk der größeren Anzahl der Anfänger in der Wissenschaft soviel als möglich forthelfen soll, eines Grades der Deutlichkeit bedient, der freylich dem von der Natur gebildeten systematischen Kopfe, deren es aber nur wenig giebt, gewissermaßen lästig werden muß. Darum konnte ich auch auf Raumersparniß und auf die beliebte mathematische Kürze ganz und gar

keine

keine Rücksicht nehmen. Ich folgte hier den Urtheilen meiner Schüler, deren ich seit acht Jahren in der That nicht wenige gezählt habe, und die stets versicherten, daß der Anfänger in der mathematischen Analysis gerne für ein Lehrbuch dieser Wissenschaft etliche Gulden mehr bezahlt, wenn er nur darin denjenigen Grad der Deutlichkeit findet, der für den Anfänger, welcher so geschwind als möglich sein Ziel erreichen will, erforderlich ist. Deductionen, bey welchen der natürliche Gang, den der Verstand nimmt, nicht sogleich hervorleuchtet, und durch welche der Anfänger verleitet wird, den Erfinder derselben für einen Hexenmeister oder mathematischen Wunderthäter zu halten, habe ich so sorgfältig, als es nur immerhin möglich war, zu vermeiden gesucht. Ich wollte wünschen, daß nicht schon einige Beweise, bey welchen Begriffe vom unendlich Großen zum Grunde liegen, gedruckt gewesen wären, als ich fand, wie ich auch diese hätte beseitigen können. — Den Differentialcalcul habe ich seiner wahren Natur nach, mit Vermeidung der unendlich kleinen Größen, dargestellt. Man wird mir nichts gegen die Darstellungsart desselben, die ganz mein Eigenthum ist, einwenden können; fragen aber wird man, ob und wie denn bey der Anwendung des Differentialcalculs auf die Geometrie und Mechanik die längst beliebten unendlichkleinen dx und dy (deren Wirkung so groß, und Bedeutung so gering ist, daß man sich lieber gar nichts bey ihnen denkt —) vermieden werden können? — Die Antwort und der Beweis liegt mir ob: — auf dem Titel meines Buches steht: nebst den Principien der Anwendung desselben. —

Der Verfasser.

In-

Inhalt des ersten Theils.

Vorbegriffe.

§. 1. Ueber den Begriff eines Quantums, welches ein Gegenstand der allgemeinen Größenlehre — Arithmetik — seyn soll.

§. 2. u. 3. Eintheilung der Quanta in absolute und relative, und der relativen in bekannte und unbekannte.

§. 4. Was man unter der algebraischen Darstellung eines relativen Quantums, unter dem algebraischen Ausdrucke desselben und unter der Form dieses Ausdruckes zu verstehen hat.

§. 5. Was derjenige Theil der allgemeinen Größenlehre, welchen man die mathematische Analysis zu nennen pflegt, will.

§. 6. Theile der mathematischen Analysis.

Erstes Hauptstück.

Von dem Begriffe, der Eintheilung und den verschiedenen Formen der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

Erster Abschnitt.

Von dem Begriffe und der Eintheilung derselben.

§. 7. u. 8. Daß die Untersuchung der Natur relativer Quanta nur möglich ist, wenn man unter den absoluten Quantis, von denen sie abhängen, blos eins oder etliche als solche annimmt, die einen jeden beliebigen Werth haben können, die übrigen aber stets einerley Werth behalten läßt; und daß man die einen und die andern besonders benennt und bezeichnet, um sie gehörig von einander zu unterscheiden.

§. 9. — 12. Daß man ein relatives Quantum in Beziehung auf die veränderlichen Quanta eine Function derselben nennt; daß eine Function selbst ein veränderliches Quantum ist; daß man also absolut und relativ veränderliche Quanta von einander zu unterscheiden hat.

X §. 12.

Zweyter Abschnitt.

Einige Sätze, welche der Lehre von den Formen der Functionen vorausgeschickt werden müssen.

Dritter Abschnitt.

Von den Formen der algebraischen Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

I. Die rationalen Functionen.

1) Die verschiedenen Formungsarten, deren die ganzen Functionen fähig sind.

 2) Von



2) Von den verschiedenen Formen, deren die gebrochenen Functionen fähig sind.

A) Die Verwandlung der gebrochenen Functionen in Reihen.

B) Die Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche.

§. 95.

II) Die irrationalen Functionen.

1) Von der Formation, deren die entwickelten irrationalen Functionen fähig sind.

2) Von der Formation, welche bey verwickelten irrationalen Functionen merkwürdig ist.

Vierter Abschnitt.

Von den Formen der transcendentischen Functionen einer veränderlichen Größe überhaupt,

und der algebraischen Darstellung derjenigen unter diesen Functionen, welche man Logarithmen, Exponentialgrößen und trigonometrische Functionen nennt, insbesondere.

Zweyter Abschnitt.

Von den Differentialen der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

§. 221.

Dritter Abschnitt.

Erste Begriffe von den Integralien der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

Vor-

Vorbegriffe.

§. 1.

Ein jedes Quantum y muß als ein bestimmtes oder unbestimmtes Aggregat aus gleichartigen Einheiten vorgestellt werden. Hierdurch ist die allgemeine und nothwendige Eigenschaft aller Quanta angegeben. Es können aber ausser dieser allgemeinen Eigenschaft einem Quanto auch noch andere besondere Eigenschaften zukommen, die sich auf die Beschaffenheit des zu einem Quanto vereinigten Gleichartigen, und auf die Art der Verrinigung desselben gründen, welches der Fall bey allen Quantis ist, die wir **geometrische** nennen. Auf diese besonderen Eigenschaften nimmt derjenige Theil der reinen Größenlehre, welchen man **Arithmetik** nennt, den man aber wohl besser **allgemeine Größenlehre** nennen sollte, keine Rücksicht. Ein jedes Quantum, als Gegenstand der Arithmetik betrachtet, ist schlechthin ein **Aggregat aus gleichartigen Einheiten**, und ein jedes Quantum y, welches ohne weitere Bestimmung und also blos als ein Aggregat aus gleichartigen Einheiten vorgestellt wird, ist ein **arithmetisches Quantum**.

§. 2.

1) Wenn ein arithmetisches Quantum y ohne allen Zusammenhang mit andern Quantis vorgestellt wird; so ist dessen Quantität, d. h. die Bestimmung, **wie viele** Einheiten in demselben gedacht werden sollen, durch nichts bedingt: es hängt alsdann blos von der Willkühr ab, **wie viele** Einheiten man sich in dem Quanto y vorstellen will. Es wird y ein **bestimmtes** Quantum, wenn man durch ein Merkmal angiebt, bis zu welchem willkührlichen Puncte die Reihe von Einheiten, die der Verstand durch successive

Synthesis ohne Ende erweitern kann, fortgesetzt seyn soll; **unbestimmt** aber ist es, wenn dieses nicht geschieht. Ein solches in Rücksicht seiner Quantität ganz unbedingtes Quantum y kann man ein **absolutes** Quantum nennen.

2) Es ergiebt sich aus dem Begriffe von einem **absoluten** Quanto, daß ein solches Quantum niemals **unbekannt** genannt werden kann. Die Art seiner Erzeugung ist blos die successive Synthesis gleichartiger Einheiten, und folglich niemals unbekannt; die Quantität desselben aber ist willkührlich, und kann mithin ebenfalls nicht als unbekannt angesehen werden.

§. 3.

1) Wird hingegen ein arithmetisches Quantum y in einem gewissen Zusammenhange mit andern Quantis a, b, c ꝛc., die man sich als **absolut** vorstellt, auf die Art gedacht, daß sich nothwendig die Quantität desselben ändern muß, wenn die Quantität eines oder mehrerer von den absoluten Quantis a, b, c ꝛc. abgeändert wird; so ist das Quantum y ein **abhängiges**, ein seiner Quantität nach **bedingtes** Quantum, und es kann die Quantität desselben nicht eher bestimmt werden, als bis die Quantität der absoluten Quanta a, b, c ꝛc., von denen es nach einem gewissen Gesetze abhängt, und das Gesetz dieser Abhängigkeit angegeben wird. Ein solches Quantum y kann, um es von demjenigen, welches wir **absolut** nennen (§. 2.), zu unterscheiden, **relativ** genannt werden.

Ein Logarithmus Z z. E. ist ein solches **relatives** Quantum, denn dieser steht, wie wir wissen, mit andern Quantis, einer Zahl Z nehmlich, der er zugehören soll, und der Basis e des Logarithmensystems, in einem solchen Zusammenhange, daß seine Quantität nicht eher bestimmbar ist, als bis man ausser dem Gesetze, nach welchem ein Logarithmus von der Zahl Z und der Basis e abhängt, und welches schon durch den Begriff **Logarithmus** gegeben ist, auch noch die Quantität der Größen Z und e bestimmt. Bey dem Wurfe einer Bombe ferner kommen mehrere Quanta in Betrachtung: 1) Die Weite des Wurfes; 2) der Winkel, unter welchem der Mörser gerichtet ist, und die Länge und Weite des Mörsers; 3) das Gewicht der abzuwerfenden Bombe; 4) die Stärke der Ladung des Mörsers. Betrachtet man hier die Weite des Wurfes als ein Quantum, welches mit den übrigen der genannten Quanta so im Zusammenhange steht, daß sich die Quantität desselben nothwendig abändern muß, wenn die Quantität der übrigen Quanta abgeändert wird; so ist diese Wurfweite ein **relatives** Quantum: die Quantität derselben kann nicht eher bestimmt werden, als bis die Quantität der übrigen Quanta, des Richtungs=

tungswinkels nehmlich, der Abmessungen der Mörserhöhlung, der Ladung ꝛc. bestimmt und zugleich das Gesetz angegeben ist, nach welchem die Wurfweite von den übrigen der genannten Quanta abhängig ist.

2) Ein relatives Quantum y, bey welchem man alle absoluten Quanta a, b, c ꝛc. von welchen es nach einem gewissen Gesetze abhängt, und das Gesetz dieser Abhängigkeit in der Art anzugeben weiß, daß man die Quantität von y für alle beliebigen Werthe der absoluten Quanta a, b, c ꝛc. entweder ganz genau, oder doch wenigstens näherungsweise bestimmen kann, ist ein **bekanntes** relatives Quantum. **Unbekannt** ist hingegen ein solches Quantum, wenn man irgend etwas von dem, was zur Bestimmung seiner relativen Quantität nöthig ist, und was man doch nicht willkührlich als bekannt annehmen darf, *unbekannt* ist.

§. 4.

Wenn man die absoluten Quanta, von welchen ein relatives Quantum y abhängt, einzeln durch Zeichen a, b, c ꝛc. bezeichnet, und diese Zeichen vermittelst der Zeichen, durch welche die bey Quantis möglichen arithmetischen Operationen angedeutet werden, so unter einander in Verbindung zu bringen und zu formen sucht, daß ein Zeichen entsteht, welches angiebt, was für arithmetische Operationen mit den absoluten Quantis a, b, c ꝛc. vorgenommen werden müssen, wenn aus ihnen das relative Quantum y erzeugt werden soll, und also in der Anschauung darstellt, nach welchem arithmetischen Gesetze y von a, b, c ꝛc. abhängig ist; so sagt man: **es werde das relative Quantum y algebraisch dargestellt**, und nennt das Zeichen, wodurch dieses geschieht, den **algebraischen Ausdruck**. Die Art und Weise, wie in dem algebraischen Ausdrucke die Zeichen a, b, c ꝛc. arithmetisch verbunden und geformt sind, nennt man die **Form** des algebraischen Ausdrucks.

Man weiß z. E., daß das von der Kreisperipherie auf den Diameter des Kreises gefällte Perpendikel mit dem Diameter und dem Theile des Diameters, welcher auf der einen Seite des Perpendikels liegen bleibt, in einem solchen Zusammenhange steht, daß, wenn der Diameter oder der genannte Theil wächst, das Perpendikel eine Aenderung leidet, und daß also dasselbe ein **relatives** Quantum ist. Bezeichnet man nun den genannten Theil des Diameters durch e, den Diameter durch d, den andern Theil des Diameters durch d — e, das Perpendikel aber durch y, untersucht hierauf, wie d und e arithmetisch verbunden und geformt werden müssen, um ein Zeichen zu erhalten, welches die Abhängigkeit des Perpen-

 dikels

dikels y von d und e in der Anschauung darstellt, und findet, daß $y = \sqrt{(d-e)e}$ seyn muß; so sagt man: es sey y algebraisch dargestellt, und $\sqrt{(d-e)e}$ ist hier der algebraische Ausdruck, dessen Form darin besteht, daß e von d subtrahirt, der Rest $d-e$ mit e multiplicirt, und alsdann aus dem Facto $(d-e)e$ die Quadratwurzel extrahirt werden soll.

§. 5.

"Die verschiedenen möglichen Methoden und die Bedingungen ihrer Anwendung ausfindig zu machen, durch welche das Gesetz der Abhängigkeit eines jeden **unbekannten relativen Quantums y** von andern Quantis a, b, c ꝛc. ausgemittelt und durch einen "algebraischen Ausdruck in der Anschauung dargestellt werden kann": dieses ist die Generalaufgabe der ganzen mathematischen Analysis, und alle Untersuchungen, welche in derselben unter irgend einem Namen vorkommen mögen, haben entweder unmittelbar, oder doch mittelbar die Auflösung dieser Aufgabe zum Ziele.

§. 6.

Methoden, vermittelst welcher man zur algebraischen Darstellung unbekannter relativer Quanta gelangen kann, werden in demjenigen Theile der mathematischen Analysis gelehrt, den man die **niedere Analysis** oder auch — die **Analysis endlicher Größen** zu nennen pflegt, die man aber doch wohl besser den **ersten Theil** der Analysis nennen sollte. Es beruhen diese Methoden auf der Formation und Resolution der Gleichungen und sind, wie wir wissen, an sich unvollkommen und unzureichend. Eine besondere Methode, welche das leistet, was die Methoden, die der erste Theil der Analysis an die Hand giebt, nicht zu leisten vermögen, wird in demjenigen Theile der mathematischen Analysis gelehrt, den wir den **zweyten** nennen, und der die Lehre von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Functionen nebst den Principien der Anwendung dieser Lehren in sich begreift. Gewöhnlich nennt man diesen zweyten Theil der mathematischen Analysis die **höhere Analysis**, oder auch — die **Analysis des Unendlichen**, und rechnet eigentlich dahin blos den **Differential**- und **Integralcalcul** nebst allen Anwendungen desselben auf die Auflösung arithmetischer, geometrischer und reinmechanischer Probleme.

Erstes

Erstes Hauptstück.

Von dem Begriffe, der Eintheilung und den verschiedenen Formen der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

Erster Abschnitt.

Von dem Begriffe und der Eintheilung dieser Functionen.

§. 7.

Man stelle sich y als ein relatives Quantum und a, b, c, d ꝛc. als diejenigen absoluten Quanta vor, von denen y nach einem gewissen bekannten oder unbekannten Gesetze abhängig ist, und die in einer gewissen arithmetischen Form und Verbindung unter einander einen algebraischen Ausdruck geben müssen, der dieses Gesetz der Abhängigkeit in der Anschauung darstellt. Man ziehe die mannigfaltigen Werthe, die ein solches relatives Quantum für die mannigfaltigen Werthe, welche man den absoluten Quantis a, b, c, d ꝛc. beylegen kann, seiner Natur nach erhalten muß, in Betrachtung. Es fällt sogleich in die Augen, daß man hierbey am bequemsten verfährt, wenn man nur eins oder etliche von den absoluten Quantis a, b, c, d ꝛc. als Quanta annimmt, die einen jeden beliebigen Werth erhalten können, die übrigen aber als Quanta betrachtet, welche bey den verschiedenen Werthen der ersteren immer denselben Werth behalten, und nun nachsieht, was hierbey das relative Quantum y für Werthe erhalten und für Eigenschaften zeigen muß. Blos auf diesem Wege ist die Untersuchung der Natur relativer Quanta, mit der wir uns in der Folge beschäftigen werden, möglich.

§. 8.

"Unter den absoluten Quantis, von welchen ein relatives Quantum abhängig ist, "nennt man diejenigen, von welchen man annimmt, daß sie einen jeden beliebigen Werth "sollen erhalten können, indeß alle übrigen stets einerley Werth behalten, die veränder-

"lichen; sie werden durch die letzteren Buchstaben u, v, x, y, z des Alphabets bezeich-
"net. Die übrigen nennt man **constante** Quanta und bezeichnet sie durch die ersteren
"Buchstaben des Alphabets, wenn ihre Werthe unbestimmt sind, durch Ziffern aber,
"wenn sie bestimmte Werthe haben sollen."

§. 9.

"Ein relatives Quantum, bey welchem man eins oder etliche unter den absoluten "Quantis, von denen es abhängig ist, als **veränderlich**, die übrigen aber als **constant** "annimmt, wird eine **Function** dieser veränderlichen Quanta genannt. Ist unter den "absoluten Quantis nur eins als veränderlich angenommen und durch z bezeichnet, so "heißt das relative Quantum **eine Function von einer einzigen veränderlichen** "**Größe** z; sind aber mehrere unter den absoluten Quantis als veränderlich angenommen "und durch u, v, x ꝛc. bezeichnet, so nennt man das relative Quantum **eine Fun**"**ction von mehreren veränderlichen Größen** u, v, x ꝛc. Wenn eine Function "durch einen einzigen Buchstaben bezeichnet werden soll, so bedient man sich ebenfalls "eines der letzteren Buchstaben des Alphabets, welcher aber ein anderer seyn muß, als "der, womit die veränderlichen Größen, von denen die Function abhängt, bezeichnet ist."

Das von der Kreisperipherie auf den Diameter des Kreises gefällte Perpendikel, welches wir durch y bezeichnen wollen, ist ein relatives Quantum, denn es ist von dem Diameter d und der Entfernung e des Perpendikels vom Anfangspuncte des Diameters abhängig, und zwar nach dem bekannten Gesetze, welches der algebraische Ausdruck $\sqrt{(d-e)e}$ angiebt. Nimmt man nun d als constant, e aber als veränderlich an, und bezeichnet e durch z; so ist das Perpendickel $y = \sqrt{(d-z)z}$ eine Function von einer einzigen veränderlichen Größe z. Nimmt man ferner e als constant an, d aber als veränderlich, und bezeichnet d durch x; so ist $y = \sqrt{(x-e)e}$ wiederum eine Function von einer einzigen veränderlichen Größe x. Wollte man hier d und e zugleich als veränderlich annehmen und d durch x, e aber durch z bezeichnen; so würde $y = \sqrt{(x-z)z}$ eine Function von zwey veränderlichen Größen x und z.

§. 10.

"Eine jede **Function** von einer oder von mehreren veränderlichen Quantis ist ein "**veränderliches** Quantum."

Sie ist ein von veränderlichen Quantis abhängiges Quantum, und es müssen daher auch die Werthe derselben veränderlich seyn.

§. 11.

§. 11.

"Diejenigen veränderlichen Quanta, von welchen Functionen abhängen, sollen von denjenigen veränderlichen Quantis, welche selbst Functionen sind, dadurch unterschieden werden, daß man die ersten **absolut veränderliche**, die andern aber **relativ veränderliche** Quanta nennt."

§. 12.

"Eine Function, bey welcher nur das Gesetz der Abhängigkeit von den absolut veränderlichen und den constanten Quantis, die in einer gewissen arithmetischen Form und Verbindung unter einander die Function geben, bekannt ist, und für die man also einen algebraischen Ausdruck angeben kann, der dieses Gesetz in der Anschauung darstellt, kann man eine **bekannte** Function nennen, um sie von solchen Functionen zu unterscheiden, bey welchen man zwar weiß, daß sie nach einem gewissen Gesetze von andern absolut veränderlichen und constanten Quantis abhängig sind, wobey man aber dieses Gesetz der Abhängigkeit noch nicht algebraisch darstellen kann, sondern erst suchen muß, diese Darstellung zu Stande zu bringen."

"Die algebraischen Ausdrücke, welche bekannte Functionen bezeichnen, nennt man öfters um der Kürze willen selbst **Functionen**."

§. 13.

"Ein algebraischer Ausdruck, in welchem **constante** und **veränderliche** absolute Quanta in einer gewissen Form arithmetisch unter einander verbunden sind, kann der Ausdruck für eine **bekannte** Function seyn, aber immer ist er es nicht."

Es giebt nehmlich Ausdrücke, die nur scheinbar Functionen andeuten, in der That aber bey einerley Werthen der constanten Größen für alle Werthe, welche man den veränderlichen Größen beylegen mag, stets denselben Werth behalten. Dergleichen Ausdrücke sind z. E. z^0; 1^z; $\frac{a^2 - az}{a - z}$ oder $\frac{a(a - z)}{a - z}$.

§. 14.

Wir wollen nun die Functionen, von welchen wir bisher die Hauptbegriffe gehörig festgesetzt haben, eintheilen. Den ersten Eintheilungsgrund nehmen wir von der Anzahl der absolut veränderlichen Quanta her, auf welche sich eine Function nach §. 9. beziehen kann, und hiernach theilen wir die Functionen ein: in Functionen von einer **einzigen** veränderlichen Größe

Größe und in Functionen von **mehreren** veränderlichen Größen. Nur die ersten werden wir in diesem Theile unsers Werkes betrachten, und darum nehmen wir auch bey der ferneren Eintheilung der Functionen nur auf diese Rücksicht und verstehen allemal unter dem Ausdrucke: **Function**, eine Function einer **einzigen** veränderlichen Größe.

§. 15.

Die Functionen einer einzigen veränderlichen Größe unterscheiden sich zunächst von einander durch die **Anzahl** der mit verschiedenen Potenzen der absolut veränderlichen Größe z versehenen Glieder, die man formiren und mithin auch durch die **Anzahl** der arithmetischen Operationen, welchen man bey dieser Formation die Größe z unterwerfen muß, wenn man einen algebraischen Ausdruck finden will, durch den das Gesetz der Abhängigkeit der Function von der absolut veränderlichen Größe z **vollständig** und **bestimmt** in der Anschauung dargestellt wird. Es ist nehmlich

1) fast die größte Anzahl der Functionen einer solchen Darstellung fähig, ohne daß die Ausdrücke derselben **unendlich viele** mit verschiedenen Potenzen der absolut veränderlichen Größe z versehene Glieder erhalten müssen. Die Gleichungen zwischen den Ausdrücken solcher Functionen und den Functionen selbst sind allemal von einem bestimmten Grade. Es giebt aber auch

2) sehr viele Functionen, bey welchen, wenn man sie **vollständig und bestimmt** durch einen algebraischen Ausdruck darstellen wollte, **eine unendlich große** und folglich durch den Calcul unerreichbare Menge veränderlicher und mit verschieden hohen Potenzen von z versehener Glieder geformt und zusammengestellt werden müßte, so daß also die vollständige und bestimmte algebraische Darstellung derselben unmöglich ist und nur näherungsweise vorgenommen werden kann. Die Gleichungen zwischen solchen Functionen und ihren Ausdrücken sind allemal von einem unbestimmt hohen Grade.

Die Functionen der ersten Art (Nro. 1.) nennt man **algebraische** Functionen, und man unterscheidet sie hierdurch von den Functionen der zweyten Art, die man **transcendentische** Functionen zu nennen pflegt.

Die Functionen z^2; z^n; $\sqrt{(1+z^4)}$; $\frac{z^2+z^5}{az}$; $a+bz+cz^2+\ldots+qz^n$ gehören zu den **algebraischen**. Hingegen ist eine jede Function, welche sich, wenn man sie algebraisch darstellen will, **blos** durch einen Ausdruck von der Form $a+bz+cz^2+dz^3+\ldots vz^\infty$ darstellen läßt, eine **transcendentische**.

Anmer-

Anmerkung: Auch gewisse algebraische Functionen erhalten bisweilen, wenn man sie in einer gewissen Absicht auf andere Formen bringen will, als die sind, welche ihnen ihrer Natur nach ursprünglich zukommen müssen, unendlich viele Glieder, in welchen die absolut veränderliche Größe auf immer höhere Potenzen steigt; darum sind sie aber noch keine transcendentische Functionen. — Man muß also die algebraischen Functionen nicht mit den transcendentischen verwechseln.

§. 16.

Die **algebraischen** Functionen werden in **irrationale** und **rationale** Functionen eingetheilt.

1) Unter den **irrationalen** Functionen versteht man alle diejenigen Functionen, deren algebraische Ausdrücke **gebrochene Potenzenexponenten**, oder, welches dasselbe ist, **Wurzelzeichen** enthalten, die unmittelbar oder mittelbar auf die absolut veränderliche Größe Bezug haben und entweder gar nicht, oder blos dadurch weggeschafft werden können, daß man eine andere veränderliche Größe in die Function einführt.

2) **Rational** hingegen nennt man die algebraischen Functionen alsdann, wenn die algebraischen Ausdrücke derselben weder **Wurzelzeichen** noch **gebrochene Potenzenexponenten** enthalten, welche sich auf die absolut veränderliche Größe beziehen, und wenn folglich alle Potenzenexponenten, denen die absolut veränderliche Größe unmittelbar oder mittelbar unterworfen seyn mag, **ganze** Zahlen sind.

Nachstehende Functionen

$$\frac{a z^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^2};\ a z^2 + (a+z)^{\frac{1}{2}};\ (a - b z)^{\frac{2}{3}};\ \sqrt{(a - z^2)};\ \frac{a + b z}{\sqrt{(a - z^2)}};$$

$$\sqrt[3]{(a + b z - c z^2)^2};\ \sqrt{a} - b z^2 + \frac{1}{\sqrt{z}}\ \text{rc.}$$

gehören zu den **irrationalen**; hingegen sind folgende Functionen

$$z \sqrt{a};\ z^3 (a+b)^{\frac{1}{2}};\ \frac{a b^{\frac{1}{3}}.(a - z)^2}{z^2 \sqrt{(1 - a^2)}};\ (a z^2 - b z^3)\sqrt{b};\ (a+b)^{\frac{2}{3}}(z^2 - a) z \sqrt{b};$$

$a + b z + c z^2 + \ldots r z^n$ u. s. w. **rational.**

§. 17.

Die irrationalen Functionen theilt man wiederum in **entwickelte** und **verwickelte** und die **rationalen** in **ganze** und **gebrochene**.

1) **Entwickelt** wird eine **irrationale** Function alsdenn genannt, wenn man, sobald das Gesetz des Zusammenhanges zwischen ihr und den übrigen Größen algebraisch dargestellt wird, entweder auf eine Gleichung kommt, in welcher auf der einen Seite die Function, auf der andern aber der irrationale algebraische Ausdruck derselben steht, oder eine Gleichung erhält, in der zwar die Function mit der absolut veränderlichen Größe und den übrigen constanten Größen in arithmetischer Verbindung vorkommt, jedoch so, daß man durch die bekannten Auflösungsmethoden der Gleichungen die Function von den übrigen Größen trennen und allein auf die eine Seite des Gleichheitszeichens bringen kann, so daß wiederum auf der andern Seite blos der irrationale Ausdruck der Function vorkommt. Bedeutet z. E. Z eine Function von z, und es steht Z mit der absolut veränderlichen Größe z und den constanten Größen a und b in einem solchen Zusammenhange, daß, wenn man ihn algebraisch darstellt, die Gleichung

$$\frac{Z^2}{a + z} = Z\,(a - b\,z)$$

erhalten wird; so ist diese Function Z, weil aus der vorigen Gleichung folgende:

$$Z^2 - Z\,(a - b\,z)\,(a + z) = 0$$

und hieraus ferner die Function

$$Z = \frac{(a - b\,z).\,(a + z)}{2} \pm \sqrt{\frac{(a - b\,z)^2\,(a + z)^2}{4}}$$

gefunden werden kann, eine **irrationale, entwickelte** Function.

2) **Verwickelt** wird hingegen eine **irrationale** Function genannt, wenn von allem das Gegentheil Statt findet, was wir so eben in der Erklärung der **entwickelten** Functionen erinnert haben. Sie kommen von der Eingeschränktheit der Auflösungskunst der Gleichungen her. Wüßte ich z. E., daß Z eine Function von z sey, und daß mit dieser absolut veränderlichen Größe auch noch die beyden constanten Größen a und b in Verbindung stehen, und ich kennte aus irgend einem Grunde einen Zusammenhang zwischen Z, z, a und b, welcher, wenn ich ihn algebraisch darstellte, folgende Gleichung

$$Z^7 = a\,z\,Z^2 - b\,z^5$$

gäbe; so würde ich von dieser Function Z behaupten müssen, daß sie eine **verwickelte** Function sey, weil, wenn auch hier alle möglichen Kunstgriffe gebraucht werden, welche bisher für die Auflösung der höhern Gleichungen bekannt geworden sind, dennoch die Function Z von den übrigen Größen nicht getrennt und auf einer Seite des Gleichheitszeichens allein, auf der andern Seite aber durch Wurzelgrößen, welche z enthalten, dargestellt werden kann, wie dieß bey dem vorigen Beyspiele der Fall war.

3) **Ganz** werden die **rationalen** Functionen alsdenn genannt, wenn die algebraischen Ausdrücke derselben weder **negative Potenzenexponenten** enthalten, welche auf die absolut veränderliche Größe Bezug haben, noch **Brüche**, in deren Nennern die absolut veränderliche Größe vorkommt. Demnach werden folgende Functionen

$a z^2 + b z^3$; $(a z + b z^2)(a + z)$; $(a + b z^5)$; $a + b z + c z^2 + d z^3 + \ldots v z^m$;

$$\frac{a}{b z^{-2}} = \frac{a}{b} z^2; \quad \frac{a + b z^{-2}}{z^{-3}} = a z^3 + b z \text{ u. s. w.}$$

ganze Functionen genennt werden müssen.

4) **Gebrochen** nennt man die **rationalen** Functionen, wenn in den algebraischen Ausdrücken derselben entweder **negative Potenzenexponenten** vorkommen, welche in irgend einer Beziehung auf die absolut veränderliche Größe stehen, oder wenn in denselben **Brüche** vorhanden sind, deren Nenner die absolut veränderliche Größe enthalten.

$$\frac{a}{z}; \quad \frac{a}{z} + \frac{b}{1 + z^2}; \quad \frac{a + b z}{a + b z + c z^2}; \quad \frac{a + b z + c z^2 + \ldots\ldots + v z^n}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots\ldots + \varphi z^v};$$

$$a z^{-3}; \quad \frac{a z^{-6}}{b z^{-4}} = \frac{a z^{-2}}{b}; \quad \frac{a + b z}{z^{-3} + z^{-2}} = \frac{(a + b z) z^3}{1 + z}; (a + b z^{-1}) (a + z)^4 \text{ u. s. w.}$$

sind Beyspiele von **gebrochenen** Functionen.

Anmerkung: Functionen, wie $a - b z^{\frac{1}{2}} + c z^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{(a + z^2)}$ rc. kann man auch **irrationale ganze**, und Functionen wie $\frac{a}{\sqrt{(1 + z)}}$; $a - b z^{-\frac{1}{2}} + c z^{-\frac{2}{3}} + d z^2$ rc. **irrationale gebrochene** Functionen nennen.

§. 18.

Noch ist eine Eintheilung der Functionen in **einförmige** und **vielförmige** zu merken. Wenn nehmlich eine Function in der Art von der absolut veränderlichen Größe abhängt, daß für einen jeden Werth dieser Größe allemal auch die Function nur einen **einzigen** Werth erhält, welches bey der Function $y = a z + c$ der Fall ist; so heißt die Function **einförmig**. Erhält aber die Function für ein und denselben Werth der absolut veränderlichen Größe **zwey**, **drey** oder **mehrere** Werthe, so wird dieselbe **zwey**, **drey** oder **vielförmig** genannt. Die Function $y = \sqrt{(d z - z^2)}$ ist eine **zweyförmige**,

mige, und die Function $y = a z^3 + b z$ ist eine **dreyförmige** Function, beyde sind also **vielförmige** Functionen von z.

§. 19.

Hier soll noch erklärt werden, was wir in der Folge darunter verstehen, wenn wir von Functionen behaupten, daß sie einander **ähnlich** seyen. Zwey Functionen werden wir alsdann **ähnliche** Functionen nennen, wenn die absolut veränderliche Größe, die in beyden **gleich** oder **verschieden** groß seyn kann, in der einen Function auf dieselbe Art arithmetisch geformt ist, als wie in der andern. Die constanten Größen können übrigens bey ähnlichen Functionen einander gleich und auch von einander verschieden seyn.

$$Z = a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots \text{ und } Y = a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots$$

sind zwey einander ähnliche Functionen; so auch

$$Z = a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots \text{ und } Y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

$$Z = \frac{a + bz + cz^2 + \ldots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots} \text{ und } Y = \frac{A + Bz + Cz^2 + \ldots}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} z + \mathfrak{C} z^2 + \ldots}$$

$$Z = \frac{a + bz + cz^2 + \ldots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots} \text{ und } Y = \frac{a + by + cy^2 + \ldots}{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots}$$

$$Z = \sqrt[n]{(a + bz + cz^2)} \text{ und } Y = \sqrt[m]{(A + By + Cy^2)} \text{ u. s. w.}$$

Zweyter Abschnitt.

Einige Sätze, welche der Lehre von den Formen der Functionen vorausgeschickt werden müssen.

---

§. 20.

"Wenn eine Function $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots Pz^n + \ldots$, "in welcher die Coefficienten A, B, C.... von z ganz unabhängig seyn sollen, "und die Anzahl der Glieder beliebig groß seyn kann, für einen jeden beliebigen Werth "von

"von z den Werth = o erhalten soll; so muß nothwendig nicht nur das absolute Glied "A, sondern auch ein jeder der Coefficienten B, C, D ... = o seyn."

1) Mit der Annahme, daß für einen **jeden** Werth von z die Gleichung

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^n \ldots + = o$$

Statt habe, ist auch zugleich angenommen, daß für alle nur denkbaren Werthe von z

$$Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \ldots\ldots + Pz^n + = - A \text{ sey. } (h)$$

Soll aber letzteres seyn, so muß nothwendig das absolute Glied — A oder A = o seyn, sobald z = o genommen wird, weil die linke Seite der Gleichung (h) für z = o den Werth = o erhält, es mögen die Coefficienten seyn, was sie wollen. Wenn aber hier A **einmal** = o seyn muß; so muß es auch **immer** = o seyn, denn es ist eine von z ganz unabhängige constante Größe. Daraus folgt, daß auch wegen der Gleichung (h) die Seite $Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^n + \ldots$ für einen **jeden** Werth von z den Werth = o hat.

2) Aus Nro. 1. ergiebt sich also der Satz:

"daß nicht nur das absolute Glied A, sondern auch der übrige Theil $Bz + Cz^2 + Dz^3$ "$+ Ez^4 + \ldots\ldots Pz^n + \ldots\ldots$ für einen **jeden** Werth von z den Werth = o "haben muß, wenn der Function $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Pz^n + \ldots\ldots$ "für alle Werthe von z der Werth = o zukommen soll."

Vermöge dieses Satzes aber läßt sich nun auch leicht beweisen, daß ein jeder der übrigen Coefficienten B, C, D .... = o seyn muß.

3) Wenn nehmlich für **alle** Werthe von z nach Nro. 2.

$$Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots Pz^n + \ldots\ldots = o$$

ist; so muß auch die Gleichung, die man erhält, wenn man die vorige durchaus mit z dividirt, d. h.

$$B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + \ldots + Pz^{n-1} + \ldots = o$$

für einen **jeden** Werth von z bestehen. Dieß ist aber nach Nro. 2. nicht möglich, wenn nicht B = o und auch

$$Cz + Dz^2 + Ez^3 + \ldots + Pz^{n-1} + \ldots = o \text{ ist.}$$

Wegen letzterer Gleichung muß ferner wieder folgende

$$C + Dz + Ez^2 + \ldots + Pz^{n-2} + \ldots = o$$

für alle Werthe von z Statt haben, und dieß kann nach Nro. 2. wiederum nicht seyn, wenn nicht auch

$$C = 0 \text{ und } Dz + Ez^2 + \ldots\ldots + Pz^{n-2} + \ldots\ldots = 0 \text{ ist.}$$

Man sieht leicht ein, daß sich die bisher gebrauchte Schlußart ohne Ende fortsetzen läßt, und daß also auch

$$D = 0,\ E = 0;\ F = 0 \text{ rc. seyn muß.}$$

§. 21.

"Es seyen $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots$ und $a + bz + cz^2$ "$+ dz^3 + \ldots$ zwey Functionen von z; die Zahl der Glieder in beyden Functionen sey "beliebig, und die Coefficienten A, B, C..., a, b, c... seyen von z ganz unabhän-"gig. Sollen diese zwey Functionen für alle nur denkbaren Werthe von z einander gleich "seyn; so müssen auch die in einerley Potenz von z in beyden Functionen multiplicirten "Coefficienten einander gleich seyn."

1) Mit der Forderung, daß die nachstehende Gleichung

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots$$

für alle nur denkbaren Werthe von z Statt habe, ist auch zugleich verlangt, daß für alle Werthe von z

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots - (a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)$$

oder

$$(A - a) + (B - b)z + (C - c)z^2 + (D - d)z^3 + (E - e)z^4 + \ldots = 0 \text{ sey.}$$

2) Dieses ist aber nicht möglich, wenn nicht

$$A - a = 0;\ B - b = 0;\ C - c = 0;\ D - d = 0;\ E - e = 0 \text{ rc. ist.}$$

(§. 20.); mithin muß auch $A = a$; $B = b$; $C = c$; $D = d$ rc. seyn.

§. 22.

"Es seyen U und V zwey einander ähnliche Functionen von z, und zwar sey "$U = 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots$ und "$V = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots + \pi z^{\mu-2} + \varkappa z^{\mu-1} + \varrho z^{\mu} + \ldots\ldots$, "worin die Coefficienten a, b, c... p, q, r... und $\alpha, \beta, \gamma \ldots \pi, \varkappa, \varrho \ldots$ be-"liebige, aber von z unabhängige Größen bedeuten sollen. Das Product U.V aus die-

"sen

"sen beyden Functionen wird eine Function seyn müssen, deren Form den Formen U und "V ähnlich und also folgende ist:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots,$$

"worin die Coefficienten A, B, C ... P, Q, R unbestimmte, aber von z unabhängige "Größen bedeuten sollen."

1) Das Product U.V ist

$$= U + U.\alpha z + U.\beta z^2 + U.\gamma z^3 + U.\delta z^4 + \ldots + U.\pi z^{\mu-2} + U.\varkappa z^{\mu-1} + U.\varrho z^\mu + \ldots$$

Da nun das **erste** Glied U eine Function seyn soll, welche mit dem Gliede = 1 anfängt, und in welcher alle folgenden Glieder die Potenzen z, z^2, z^3, z^4 ꝛc. enthalten, so wie dieselben von Grad zu Grad auf einander folgen; so muß das **zweyte** Glied $= U.\alpha z$ des Products U.V, wenn man dasselbe entwickelt, eine Function werden, deren Anfangsglied $= \alpha z$ ist, und deren übrige Glieder von der Art sind, daß ein jedes folgende Glied allemal eine um einen Grad höhere Potenz von z enthält, als das ihm zunächst vorhergegangene, und daß also in allen Gliedern der Reihe nach die Potenzen z, z^2, z^3, z^4 ꝛc. angetroffen werden. Auf ähnliche Art muß ferner das **dritte** Glied $U.\beta z^2$ des Products U.V durch Entwickelung eine Function werden, deren Anfangsglied $= \beta z^2$ ist, und deren folgende Glieder nach den von Grad zu Grad steigenden Potenzen von z fortlaufen, so daß also auch in dieser Function der Reihe nach die Potenzen z^2, z^3, z^4, z^5 ꝛc. vorhanden sind. Ueberhaupt sieht man, daß ein jedes Glied des Products U.V durch Entwickelung eine Reihe von Gliedern geben muß, welche mit demselben Gliede der Function V anfängt, mit dem die Function U in dem Producte U.V multiplicirt ist, und in der die folgenden Glieder der Reihe nach die Potenzen der Größe z von derjenigen Potenz an enthalten, welche in dem ersten Gliede der Reihe steht.

2) Aus Nro. 1. ergiebt sich, daß gewiß in den Gliedern, welche man erhält, wenn das Product U.V entwickelt und in seinen einzelnen Gliedern ausgedrückt wird, alle Potenzen z, z^2, z^3, z^4 ꝛc. vorkommen, und daß außer diesen mit Potenzen von z versehenen Gliedern auch ein Glied vorkommen muß, welches = 1 ist. Fängt man nun bey der Zusammenstellung aller einzelnen zu dem entwickelten Producte U.V gehörigen Glieder mit dem Gliede = 1 an und ordnet nicht nur alle in einerley Potenz von z multiplicirten und von z unabhängigen Coefficienten gehörig unter einander, sondern auch die Glieder, welche sich hierdurch ergeben, nach der Höhe der Potenzen von z neben einander; so muß eine Function erhalten werden, deren erstes Glied = 1 ist, und in welcher alle übri-

übrigen Glieder nach Potenzen von z fortlaufen, deren Coefficienten zusammengesetzte und von z unabhängige Größen sind. Werden die in die Potenzen z, z^2, z^3 rc. multiplicirten zusammengesetzten Coefficienten der Ordnung nach A, B, C, D . . . P, Q, R . . . genannt; so muß die Form des Productes U.V diese seyn:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \dots$$

§. 23.

"U, V, W, X, Y rc. seyen alle Functionen von derselben Art, wie die beyden in "§. 22. angegebenen Functionen U und V waren. Das Product aus allen diesen Funk"tionen, die Anzahl derselben sey welche sie wolle, wird eine Function von der Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \dots$$

"seyn, in welcher wiederum unter den Coefficienten A, B, C . . . P, Q, R . . . unbe"stimmte und von der Größe z unabhängige Größen verstanden werden."

Dieser Satz folgt unmittelbar aus §. 22. Da nehmlich das Product U.V eine Function = F′ giebt, deren Form der Form der Functionen U und V ähnlich ist; so kann man sich F′ wiederum eben so mit der ihr ähnlichen Function W in Verbindung gesetzt vorstellen, wie dieß bey den beyden Functionen U und V in §. 22. geschah, und man muß ein Product = F′.W = F″ erhalten, welches eine den Formen von F′ und W ähnliche Form hat. Eben so kann man dann wieder mit F″ und der ähnlichen Function X verfahren, wodurch man eine Function = F″.X = F‴ erhält, deren Form den Formen von F″ und X ähnlich seyn muß u. s. w. Es ist also gewiß das Product U.V. W.X.Y . . . eine Function von der oben angegebenen Form.

§. 24.

"Es sey die Form einer Function Z von z folgende:

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \dots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \dots$$

"und in dieser Function seyen die Coefficienten a, b, c . . . p, q, r . . . beliebige aber "von z ganz unabhängige Größen. Eine solche Function werde auf die nte Potenz erho"ben, wo n eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl bedeutet.

"Wenn der Potenzenexponent n eine **ganze bejahte** oder **verneinte** Zahl ist; so "wird es allemal verstattet seyn, die Potenz

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \dots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \dots)^n$$

"einer



"einer Function gleich zu setzen, welche die Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots$$

"hat, und in der die Coefficienten unbestimmte und von z unabhängige Größen bedeu"ten."

"Wenn aber der Potenzenexponent n eine **gebrochene bejahte** oder **verneinte** "Zahl ist; so ist es bis jetzt nur wahrscheinlich, daß die genannte Potenz einer solchen "Function gleich gesetzt werden könne."

1) Es sey der Potenzenexponent n eine **ganze bejahte** Zahl. Da nach §. 23. ein Product aus einer beliebigen Anzahl von Functionen, welche die Form

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots$$

haben, eine Function von der Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots$$

seyn muß, und die Gleichheit der in einander multiplicirten Functionen in der Behauptung des 23ten §. keine Abänderung bewirken kann; so ist die Behauptung des gegenwärtigen Lehrsatzes für den Fall, wenn n eine **ganze bejahte** Zahl ist, außer allem Zweifel.

2) Es sey n eine **ganze negative** Zahl $= -\mu$.

Bekanntlich ist

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{-\mu}$$

$$= \frac{1}{(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\mu}}$$

Da nun nach Nro. 1. ganz gewiß die Potenz

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\mu}$$

einer Function von der nachstehenden Form

$$1 + A'z + B'z^2 + C'z^3 + D'z^4 + \ldots + P'z^{m-2} + Q'z^{m-1} + R'z^m + \ldots$$

gleich gesetzt werden kann; so kann man auch ganz gewiß die Potenz

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{-\mu}$$

 = 1

$$= \frac{1}{1 + A'z + B'.z^2 + C'.z^3 + D'.z^4 + \ldots + P'.z^{m-2} + Q'.z^{m-1} + R'.z^m + \ldots}$$

setzen. Nun ist aber leicht einzusehen, daß durch die Division des Divisors in den Dividendus 1 ein Quotient von der Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots$$

erhalten werden muß, in welcher die Coefficienten A, B, C . . . P, Q, R . . . von der Größe z unabhängig sind. Weil dieser Quotient der genannten Potenz gleich ist; so ist auch der Lehrsatz für den Fall, wenn n eine **ganze verneinte** Zahl ist, richtig.

3) Es sey n eine **gebrochene bejahte** Zahl $= \frac{\mu}{v}$, wo μ und v **ganze bejahte** Zahlen bedeuten sollen.

Man kann aus bekannten Gründen die Potenz

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\frac{\mu}{v}} =$$
$$\left[(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\frac{1}{v}}\right]^{\mu}$$

setzen. Nun ist aber die Function

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\frac{1}{v}}$$

eine Function, welche vmal mit sich selbst multiplicirt, die Function

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots$$

giebt, und nach Nro. 1. ist eine Function von der Form

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots$$

auf die vte Potenz erhoben ganz gewiß eine Function von der Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots$$

Es läßt sich daher mit Wahrscheinlichkeit annehmen, daß auch umgekehrt die vte Wurzel aus einer Function

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots$$

eine Function von der ähnlichen Form

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \ldots + \pi z^{m-2} + \varkappa z^{m-1} + \varrho z^m + \ldots$$

sey.

sey. Wenn aber dieß mit Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann; so ist es auch wahrscheinlich, daß die Function

$$\left[(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\frac{1}{\nu}}\right]^{\mu}$$

oder

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

welche alsdann gewiß

$$= (1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots + \pi z^{m-2} + \kappa z^{m-1} + \rho z^m + \ldots)^{\mu}$$

gesetzt werden kann, eine Function von der Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots$$

seyn könne. (Nro. 1.)

4) Es sey endlich der Exponent n eine gebrochene verneinte Zahl $= -\frac{\mu}{\nu}$, μ und ν aber seyen ganze Zahlen.

Da bekanntlich die Potenz

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{-\frac{\mu}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

gesetzt werden kann, und da ferner nach Nro. 3. der Divisor in dem letzten Ausdrucke sehr wahrscheinlich einer Function von der Form

$$1 + A'z + B'z^2 + C'z^3 + D'z^4 + \ldots + P'z^{m-2} + Q'z^{m-1} + R'z^m + \ldots$$

gleich ist; so ist es auch wahrscheinlich, daß man die genannte Potenz durch nachstehenden Quotienten

$$\frac{1}{1 + A'z + B'z^2 + C'z^3 + D'z^4 + \ldots + P'z^{m-2} + Q'z^{m-1} + R'z^m + \ldots}$$

ausdrücken könne. Wäre dieß, so müßte dann auch die genannte Potenz eine Function von der Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots$$

werden, weil der Divisor des vorigen Quotienten in den Dividendus = 1 dividirt, eine solche Function giebt.

§. 25.

"In der nachstehenden Function

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots + pz^{m-2} + pz^{m-1} + rz^m + \ldots$$

"seyen die Coefficienten a, b, c . . . p, q, r . . . beliebige und von z unabhängige "Größen; n ferner sey eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl. "Sobald man annimmt, die Potenz

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + \ldots)^n$$

"sey $= 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + \ldots$;

"so ist man auch genöthigt anzunehmen, daß der **erste** Coefficient A ein Product aus dem "**ersten** Coefficienten a und dem Potenzenexponenten, also

$$\mu . a, \text{ für } n = \mu,$$

$$\frac{\mu .}{\nu} a, \text{ für } n = \frac{\mu}{\nu},$$

$$- \frac{\mu .}{\nu} a, \text{ für } n = - \frac{\mu}{\nu},$$

$$- \mu . a, \text{ für } n = - \mu, \text{ sey.}$$

1) Es sey n eine **ganze bejahte** Zahl $= \mu$. Sobald man

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^\mu = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots$$

setzt; so ist gewiß auch

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{\mu+1} = (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots) \times (1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)$$

$$= 1 + \left.\begin{array}{l} A \\ + a \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} B \\ + aA \\ + b \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} C \\ + aB \\ + bA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} z^3 + \ldots$$

"Hieraus sieht man, daß allemal der **erste** Coefficient in dem Ausdrucke für die $(\mu + 1)$te "Potenz $(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{\mu+1}$, welchen wir A′ nennen wollen, $= A + a$ "seyn muß, wenn der **erste** Coefficient in dem Ausdrucke für die μte Potenz $= A$ war."

Nun

Nun wird aber, wenn man für $\mu = 2$ durch Multiplication die 2te Potenz der Function $1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots$ aufsucht,

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)$$

$$= 1 \begin{array}{l} +a \\ +a \end{array}\Bigg\} z \begin{array}{l} +b \\ +a^2 \\ +b \end{array}\Bigg\} z^2 \begin{array}{l} +c \\ +ab \\ +ab \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\Bigg\} z^3 + \ldots,$$

worin der erste Coefficient $A = a + a = 2a$ ist; also muß

für $n = 2 + 1 = 3$ der erste Coefficient $= 2a + a = 3a$,
" $n = 3 + 1 = 4$ " " $= 3a + a = 4a$,
" $n = 4 + 1 = 5$ " " $= 4a + a = 5a$

u. s. w. seyn. Demnach ist gewiß, wenn man

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{\mu} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots$$

setzt, der erste Coefficient $A = \mu . a$.

2) Es sey der Exponent n eine **gebrochene** bejahte Zahl $= \frac{\mu}{\nu}$, worinnen die Zahlen μ und ν **ganze** Zahlen bedeuten sollen.

Wenn man

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{\frac{\mu}{\nu}} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots \quad (\gamma)$$

setzt; so muß man auch zugeben, daß

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{\mu} = (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots)^{\nu} \text{ sey.} \quad (\delta)$$

Nun kann man aber nach §. 24. ganz gewiß

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{\mu} = 1 + A'z + B'z^2 + C'z^3 + \ldots$$

setzen, weil μ eine **ganze** Zahl ist, und es muß darinnen nach Nro. 1, $A' = \mu . a$ seyn.

Ferner kann man auch auf dieselbe Art nach §. 24.

$$(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots)^{\nu} = 1 + A''z + B''z^2 + C''z^3 + \ldots$$

setzen, weil v eine **ganze** Zahl bedeuten soll, und es muß wegen Nro. 1. der Coefficient $A'' = vA$ seyn.

Sobald man also die Gleichung (h) für jeden Werth von z als gültig festsetzt; so muß man auch die Gleichung (♂) und statt dieser wiederum die Gleichung

$$1 + \mu a.z + B'.z^2 + C'z^3 + \ldots = 1 + vAz + B''z^2 + C''.z^3 + \ldots$$

für einen jeden Werth von z, und daher auch die Bedingungen, unter welchen diese Gleichung für einen jeden Werth von z bestehen kann, gelten lassen. Da nun nach §. 21. eine dieser Bedingungen folgende ist, daß $\mu a = v.A$ sey; so muß man auch die Gleichung $\frac{\mu}{v}.a = A$ zugeben. Es ist also, so bald die Gleichung (h) angenommen wird; $\frac{\mu}{v} a = A$.

3) Es sey der Exponent n eine **gebrochene negative** Zahl $= -\frac{\mu}{v}$, und μ und v seyen **ganze** Zahlen. Wenn

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{\frac{-\mu}{v}} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots \text{ (h)}$$

gesetzt wird; so muß man auch zugeben, daß

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^{-\mu} = (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots)^v$$

oder

$$\frac{1}{(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^\mu} = (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots)^v \text{ folglich}$$

$$1 = (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots)^v \times (1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^\mu \text{ sey. } (\sigma)$$

Man kann aber ganz gewiß nach §. 24.

$$(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots)^v = 1 + A'z + B'z^2 + C'z^3 + \ldots$$

setzen, weil hier v eine **ganze bejahte** Zahl ist, und es muß nach Nro. 1. der Coefficient $A' = v.A$ seyn. Eben so kann man auch nach §. 24., weil μ eine **ganze bejahte** Zahl bedeutet,

$$(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^\mu = 1 + A''.z + B''z^2 + C''.z^3 + \ldots$$

setzen, und es muß hier nach Nro. 1. der Coefficient $A'' = \mu a$ seyn. Wenn man also wegen der gemachten Voraussetzung die Gleichung (σ) annehmen muß; so ist man auch genöthigt folgende Gleichungen

1 =

$$1 = (1 + v.Az + B'z^2 + C'z^3 + \ldots)(1 + \mu a.z + B''.z^2 + C''.z^3 + \ldots)$$

oder

$$1 = 1 + \left.\begin{matrix} v.A \\ +\mu a \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} B' \\ +v\mu a A \\ + B'' \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} C' \\ +\mu a B' \\ +v.AB'' \\ \vdots \end{matrix}\right\} z^3 + \ldots$$

oder

$$0 = (v.A + \mu.a)z + (B' + v\mu a A + B'')z^2 + (C' + \mu a B' + v.AB'' + \ldots)z^3 + \ldots$$

nebst allen Bedingungen, unter welchen sie für einen jeden beliebigen Werth von z bestehen können, anzunehmen. Es kann aber nach §. 20. eine Function nur für alle Werthe von z alsdann = o seyn, wenn alle Coefficienten einzeln genommen = o sind. Demnach muß der Coefficient

$$v.A + \mu.a = 0$$

seyn, und dieß ist eine Gleichung für den ersten Coefficienten A in der vorausgesetzten Gleichung (h). Aus der Gleichung

$$v.A + \mu a = 0 \text{ aber folgt}$$
$$v.A = -\mu a, \text{ und also}$$
$$A = -\frac{\mu}{v} a$$

4) Es sey endlich der Potenzenexponent n eine **ganze negative** Zahl $= -\mu$.

Weil in Nro. 3. der Satz für den Exponenten $-\frac{\mu}{v}$ bewiesen worden ist, ohne auf die Größe von v Rücksicht zu nehmen; so muß er auch für v = 1 wahr seyn, es muß also auch, wenn $-\frac{\mu}{v} = -\frac{\mu}{1} = -\mu$ ist, $A = -\frac{\mu}{1} = -\mu$ seyn.

§. 26.

"Die nte Potenz einer zweytheiligen Größe a + z für einen jeden beliebigen Werth des Potenzenexponenten n entwickelt darzustellen."

1) Es

1) Es ist $a + z = a\,(1 + \frac{z}{a})$ und also

$$(a + z)^n = a^n\,(1 + \frac{z}{a})^n\ .$$

Nun ist es, wenn man sich $\frac{z}{a}$ als eine veränderliche Größe $= y$ vorstellt, nach §. 24. für die Fälle, wo der Exponent n eine **ganze bejahte** oder **verneinte** Zahl bedeutet, außer allem Zweifel, daß

$$(1 + y)^n = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots + Py^{m-2} + Qy^{m-1} + Ry^m + Sy^{m+1} + \ldots$$

gesetzt werden kann, und für die Fälle, wo n eine **gebrochene bejahte** oder **verneinte** Zahl ist, läßt sich dieß wenigstens mit Wahrscheinlichkeit annehmen. Es sey also n eine **ganze** oder **gebrochene, bejahte** oder **verneinte** Zahl, und wirklich

$$\left(1 + \frac{z}{a}\right)^n = 1 + A.\left(\frac{z}{a}\right) + B.\left(\frac{z}{a}\right)^2 + C\left(\frac{z}{a}\right)^3 + D\left(\frac{z}{a}\right)^4 + \ldots$$
$$+ P.\left(\frac{z}{a}\right)^{m-2} + Q.\left(\frac{z}{a}\right)^{m-1} + R.\left(\frac{z}{a}\right)^m + S.\left(\frac{z}{a}\right)^{m+1} + \ldots\ldots, \quad (h)$$

dann ist

$$a^n\left(1 + \frac{z}{a}\right)^n \text{ oder } (a + z)^n = a^n\left(1 + A\left(\frac{z}{a}\right) + B\left(\frac{z}{a}\right)^2 + C\left(\frac{z}{a}\right)^3\right.$$
$$\left. + D\left(\frac{z}{a}\right)^4 + \ldots + P\left(\frac{z}{a}\right)^{m-2} + Q\left(\frac{z}{a}\right)^{m-1} + R\left(\frac{z}{a}\right)^m + S\left(\frac{z}{a}\right)^{m+1} + \ldots\right)$$
$$= a^n + A\,a^{n-1}.\,z + B.\,a^{n-2}.\,z^2 + C.\,a^{n-3}.\,z^3 + D.\,a^{n-4}.\,z^4 + \ldots\ldots$$
$$+ P.a^{n-(m-2)}.z^{m-2} + Q.a^{n-(m-1)}.z^{m-1} + R.a^{n-m}.z^m + S.a^{n-(m+1)}.z^{m+1} + \ldots$$

in welchem letzteren Ausdrucke ein jeder Exponent von z zugleich als ein Index dient, durch welchen angezeigt wird, das wie vielste Glied **nach dem ersten** dasjenige Glied ist, in welchem man diesen Exponenten betrachtet. Nun muß untersucht werden, ob die Gleichung (h) wirklich für **alle** die Werthe des Exponenten n, für welche dieselbe angenommen worden ist, bestehen kann, und welches bey dieser Annahme die Werthe der bis jetzt noch ganz **unbestimmten** und von z unabhängigen Coefficienten $A, B, C, D \ldots P, Q, R, S \ldots$ sind. Wir fangen diese Untersuchung damit an, daß wir durch eine zweckmäßige und auf die Gleichung (h) gebaute Rechnung Gleichungen für die Coefficienten

A,

A, B, C, D ... P, Q, R, S ... zu erhalten suchen. Finden wir dergleichen Gleichungen, und es sind dieselben von der Art, daß sich daraus für die Coefficienten in jedem Falle **bestimmte** und **reelle** Werthe ableiten lassen, es mag der Potenzenexponent n eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl seyn; so ist dieß ein Beweis, daß in der festgesetzten Gleichung (h) kein Widerspruch liegt, und daß man dieselbe für alle die hier genannten Werthe des Exponenten n gelten lassen kann. Leitet man dann aus diesen Coefficientengleichungen die Werthe für die Coefficienten A, B, C, D ... P, Q, R, S ... ordentlich ab, und setzt dieselben statt A, B, C, D ... P, Q, R, S ... in die Gleichung für $(a + z)^n$, welche Statt haben muß, sobald die Gleichung (h) Statt hat; so hat man einen Ausdruck, welcher die Potenz $(a + z)^n$ entwickelt darstellt, und es ist hiermit die Aufgabe schon für die Fälle gelöst, wenn n eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl ist.

2) Die Rechnung, welche wir auf die in Nro. 1. angenommene Gleichung (h) gründen, um Gleichungen für die **unbestimmten** Coefficienten A, B, C, D ... P, Q, R, S ... zu erhalten, ist folgende:

a) Wenn wir die Gleichung (h) in Nro. 1. und also auch die Gleichung

$$(a + z)^n = a^n + A a^{n-1}. z + B. a^{n-2}. z^2 + C a^{n-3}. z^3 + D a^{n-4}. z^4 + \ldots$$
$$+ P a^{n-(m-2)}. z^{m-2} + Q a^{n-(m-1)}. z^{m-1} + R a^{n-m}. z^m + S a^{n-(m+1)}. z^{m+1} + \ldots$$

für alle nur immer denkbaren Werthe der Größe z als gültig festsetzen; so muß auch die nachstehende Gleichung, in welcher z nur um eine beliebige Größe ω vermehrt ist, zugelassen werden:

$$(a + z + \omega)^n = a^n + A a^{n-1}. (z + \omega) + B a^{n-2}. (z + \omega)^2 + C a^{n-3}. (z + \omega)^3$$
$$+ D. a^{n-4}. (z + \omega)^4 + \ldots$$
$$+ P. a^{n-(m-2)}. (z + \omega)^{m-2} + Q. a^{n-(m-1)}. (z + \omega)^{m-1} + R. a^{n-m}. (z + \omega)^m$$
$$+ S. a^{n-(m+1)}. (z + \omega)^{m+1} + \ldots\ldots$$

b) Wenn wir ferner die Größe $a + z + \omega$, welche in der letzten Gleichung als eine zweytheilige Größe $a + (z + \omega)$ betrachtet worden ist, wiederum als eine solche Größe betrachten, aber $a + z = q$ setzen, so daß jetzt die zweytheilige Größe $q + \omega$ heißt; so muß vermöge der in Nro. 1. angenommenen Gleichungen auch die nachstehende Gleichung Statt haben:

$$(q+\omega)^n = q^n + A\,q^{n-1}.\,\omega + B.\,q^{n-2}.\,\omega^2 + C.\,q^{n-3}.\,\omega^3 + D.\,q^{n-4}.\,\omega^4 + \ldots$$
$$+ P.\,q^{n-(m-2)}.\,\omega^{m-2} + Q.\,q^{n-(m-1)}.\,\omega^{m-1} + R.\,q^{n-m}.\,\omega^m$$
$$+ S.\,q^{n-(m+1)}.\,\omega^{m+1} + \ldots\ldots$$

c) Hier haben wir nun zwey Gleichungen für $(a+z+\omega)^n$, welche beyde auf der Gleichung (h) in Nro. 1. beruhen; aus ihnen ergiebt sich folgende Gleichung:

$$a^n + A\,a^{n-1}.\,(z+\omega) + B.\,a^{n-2}.\,(z+\omega)^2 + C.\,a^{n-3}.\,(z+\omega)^3$$
$$+ D.\,a^{n-4}.\,(z+\omega)^4 + \ldots + P\,a^{n-(m-2)}.\,(z+\omega)^{m-2} + Q.\,a^{n-(m-1)}.\,(z+\omega)^{m-1}$$
$$+ R.\,a^{n-m}.\,(z+\omega)^m + S\,a^{n-(m+1)}\,(z+\omega)^{m+1} + \ldots$$
$$= q^n + A\,q^{n-1}.\,\omega + B\,q^{n-2}.\,\omega^2 + C.\,q^{n-3}.\,\omega^3 + D\,q^{n-4}.\,\omega^4 + \ldots$$
$$+ P.\,q^{n-(m-2)}.\,\omega^{m-2} + Q.\,q^{n-(m-1)}.\,\omega^{m-1} + R.\,q^{n-m}.\,\omega^m$$
$$+ S.\,q^{n-(m+1)}.\,\omega^{m+1} + \ldots$$

d) In der ersten Seite dieser Gleichung wollen wir nun alle Glieder entwickeln, und die hierbey erhaltenen Größen nach Potenzen von ω ordnen, so wie dieß in der zweyten Seite der Fall ist. Wir müssen aber, um dieß zu thun, zuerst die Potenzen von $z+\omega$ bestimmen, und hier erhalten wir durch die Multiplication

$$(z+\omega)^2 = z^2 + 2.\,z.\,\omega + \omega^2$$
$$(z+\omega)^3 = z^3 + 3.\,z^2.\,\omega + 3.\,z.\,\omega^2 + \omega^3$$
$$(z+\omega)^4 = z^4 + 4.\,z^3.\,\omega + 6.\,z^2\,\omega^2 + 4.\,z.\,\omega^3 + \omega^4 \text{ u. s. w.}$$

Zwar können wir die in den allgemeinen Gliedern stehenden Potenzen $(z+\omega)^{m-2}$, $(z+\omega)^{m-1}$ ꝛc. nicht durch die Multiplication auflösen, wir wissen aber, weil die Potenzenexponenten $m-2$, $m-1$ ꝛc. ganze Zahlen sind, ganz gewiß, daß

$$(z+\omega)^{m-2} = z^{m-2} + (m-2)\,z^{m-3}.\,\omega + B'\omega^2 + C'\omega^3 + D'.\,\omega^4 + \ldots$$
$$(z+\omega)^{m-1} = z^{m-1} + (m-1)\,z^{m-2}.\,\omega + B''.\,\omega^2 + C''\omega^3 + D''.\,\omega^4 + \ldots$$
$$(z+\omega)^m = z^m + m.\,z^{m-1}.\,\omega + B'''.\,\omega^2 + C'''.\,\omega^3 + D'''.\,\omega^4 + \ldots$$
$$(z+\omega)^{m+1} = z^{m+1} + (m+1)\,z^m.\,\omega + B''''.\,\omega^2 + C''''.\,\omega^3 + D''''.\,\omega^4 + \ldots$$

u. s. w. gesetzt werden darf (S. 24 und 25.), in welchen Ausdrücken die Coefficienten B', C', D' ...; B'', C'', D'' ... ꝛc. unbestimmte und von ω unabhängige Größen bedeuten, und dieß ist für jetzt hinreichend.

Dem-

Demnach muß aus der in Nro. c angegebenen Gleichung, wenn die linke Seite derselben wirklich nach Potenzen von ω geordnet wird, diese werden:

$$
\begin{array}{ll|l|l|l|l}
a^n & & \Big]\omega & \Big]\omega^2 & \Big]\omega^3 & \Big]\omega^4 + \ldots \\
+ Aa^{n-1}.\ z & + \ Aa^{n-1} & & & & \\
+ Ba^{n-2}.\ z^2 & + \ 2Ba^{n-2}.\ z & + \ Ba^{n-2} & & & \\
+ Ca^{n-3}.\ z^3 & + \ 3Ca^{n-3}.\ z^2 & + \ 3Ca^{n-3}.\ z & + \ Ca^{n-3} & & \\
+ Da^{n-4}.\ z^4 & + \ 4Da^{n-4}.\ z^3 & + \ 6Da^{n-4}.\ z^2 & + \ 4Da^{n-4}.\ z & + \ D.\ a^{n-4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
+ P.a^{n-(m-2)}.z^{m-2} & + (m-2)Pa^{n-(m-2)}z^{m-3} & + Pa^{n-(m-2)}.\ B' & + Pa^{n-(m-2)}.\ C' & + P.a^{n-(m-2)}.D' & \\
+ Q.a^{n-(m-1)}.z^{m-1} & + (m-1)Qa^{n-(m-1)}z^{m-2} & + Qa^{n-(m-1)}.\ B'' & + Qa^{n-(m-1)}.\ C'' & + Q.a^{n-(m-1)}.D'' & \\
+ Ra^{n-m}.\ z^m & + \ m.\ R.a^{n-m}.z^{m-1} & + R.a^{n-m}.\ B''' & + Ra^{n-m}.\ C''' & + Ra^{n-m}.\ D''' & \\
+ Sa^{n-(m+1)}.\ z^{m+1} & + (m+1)S.a^{n-(m+1)}.\ z^m & + S.a^{n-(m+1)}.B'''' & + S.a^{n-(m+1)}.\ C'''' & + Sa^{n-(m+1)}.\ D'''' & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$= q^n + Aq^{n-1}.\ \omega + B.\ q^{n-2}.\ \omega^2 + Cq^{n-3}.\ \omega^3 + D.\ q^{n-4}.\ \omega^4$$

$$+ P.\ q^{n-(m-2)}.\ \omega^{m-2} + Q\,q^{n-(m-1)}.\ \omega^{m-1} + R\,q^{n-m}.\ \omega^m + S\,q^{n-(m+1)}.\ \omega^{m+1} + \ldots$$

e) Da diese Gleichung für einen jeden beliebigen Werth von ω gültig seyn soll (Nro. a); so müssen auch nach §. 21. die auf beyden Seiten in einerley Potenz von ω multiplicirten Coefficienten, welche von ω ganz unabhängig sind, einander gleich seyn,

 und

und zwar, da sie Functionen von z sind, für einen jeden Werth von z. Demnach müssen folgende Gleichungen Statt haben:

$$\text{I)}\ a^n + A a^{n-1}.\, z + B a^{n-2}.\, z^2 + C a^{n-3}.\, z^3 + D.\, a^{n-4}.\, z^4 + \ldots\ldots$$
$$+ P a^{n-(m-2)}.\, z^{m-2} + Q a^{n-(m-1)}.\, z^{m-1} + R.\, a^{n-m}.\, z^m + S.\, a^{n-(m+1)}.\, z^{m+1} + \ldots$$
$$= q^n, \text{ oder, weil } q = a + z \text{ ist, } = (a + z)^n,$$

welches die in Nro. a vorausgesetzte Gleichung ist;

$$\text{II)}\ A a^{n-1} + 2 B.\, a^{n-2}.\, z + 3 C.\, a^{n-3}.\, z^2 + 4 D.\, a^{n-4}.\, z^3 + \ldots\ldots$$
$$+ (m-2) P.\, a^{n-(m-2)}.\, z^{m-3} + (m-1) Q a^{n-(m-1)}.\, z^{m-2} + m R a^{n-m}.\, z^{m-1}$$
$$+ (m+1) S.\, a^{n-(m+1)}.\, z^m \ldots$$
$$= A q^{n-1}, \text{ oder, weil } q = a + z \text{ ist, } = A (a + z)^{n-1}$$

u. s. w.

f) Der Gleichung II) aber können wir uns auf folgende Art bedienen, um auf Gleichungen für die Coefficienten A, B, C, D ... P, Q, R, S ... zu kommen. Weil $A q^{n-1} = A (a + z)^{n-1} = A. \dfrac{(a+z)^n}{a+z}$ ist; so muß auch

$$\big(A a^{n-1} + 2B.a^{n-2}.\, z + 3 C a^{n-3}.\, z^2 + 4 D.\, a^{n-4}.\, z^3 + \ldots + (m-2) P a^{n-(m-2)}.\, z^{m-3}$$
$$+ (m-1) Q a^{n-(m-1)}.\, z^{m-2} + m R.\, a^{n-m}.\, z^{m-1} + (m+1) S.\, a^{n-(m+1)}.\, z^m + \ldots\big)$$
$$\times (a+z) = A (a + z)^n \text{ seyn.}$$

Dieses giebt, wenn wir mit a + z wirklich multipliciren, und den in Nro. a stehenden Ausdruck für $(a + z)^n$ auf der zweyten Seite der Gleichung substituiren, folgende Gleichung:

$$A a^n \left.\begin{array}{l} + 2 B a^{n-1} \\ + A a^{n-1} \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} + 3 C a^{n-2} \\ + 2 B a^{n-2} \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} + 4 D a^{n-3} \\ + 3 C a^{n-3} \end{array}\right\} z^3 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\left.\begin{array}{l} + (m-2) P.\, a^{n-(m-3)} \\ + \ldots\ldots \end{array}\right\} z^{m-3} \left.\begin{array}{l} + (m-1) Q a^{n-(m-2)} \\ + (m-2) P a^{n-(m-2)} \end{array}\right\} z^{m-2} \left.\begin{array}{l} + m R a^{n-(m-1)} \\ + (m-1) Q a^{n-(m-1)} \end{array}\right\} z^{m-1}$$
$$\left.\begin{array}{l} + (m+1) S.\, a^{n-m} \\ + m.\, R a^{n-m} \end{array}\right\} z^m + \ldots\ldots\ldots$$
$$= A$$

$$= A a^n + A^2 . a^{n-1} . z + AB a^{n-2} . z^2 + AC a^{n-3} . z^3 + AD . a^{n-4} . z^4 + \dots$$
$$+ AP a^{n-(m-2)} . z^{m-2} + AQ a^{n-(m-1)} . z^{m-1} + AR a^{n-m} . z^m$$
$$+ AS . a^{n-(m+1)} . z^{m+1} + \dots$$

Nun soll nach Nro. e die daselbst stehende Gleichung II) für einen jeden beliebigen Werth von z gültig seyn, die hier angegebene aber ist aus jener abgeleitet; also muß auch diese für einen jeden Werth der Größe z Statt haben. Damit dieser Forderung ein Genüge geschehen könne; so müssen nach §. 21. die in einerley Potenzen von z multiplicirten Coefficienten einander gleich seyn, man muß demnach folgende Gleichungen als gültig annehmen:

$$A . a^n = A . a^n$$
$$(2B + A) a^{n-1} = A^2 . a^{n-1}$$
$$(3C + 2B) a^{n-2} = AB . a^{n-2}$$
$$(4D + 3C) a^{n-3} = AC . a^{n-3}$$

— — — — —

— — — — —

$$[(m-1) Q + (m-2) P] a^{n-(m-2)} = AP a^{n-(m-2)}$$
$$[m . R + (m-1) Q] a^{n-(m-1)} = AQ . a^{n-(m-1)}$$
$$[(m+1) S + m . R] a^{n-m} = AR a^{n-m}$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

oder

$$A = A$$
$$2B + A = A^2$$
$$3C + 2B = AB$$
$$4D + 3C = AC$$

— — — — —

— — — — —

$$(m-1)\,Q + (m-2)\,P = A\,P$$
$$m\,R + (m-1)\,Q = A\,Q$$
$$(m+1)\,S + m.\,R = A\,R$$

— — — — — —

— — — — — —

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$A = A$$
$$B = \frac{A\,(A-1)}{2}$$
$$C = \frac{B\,(A-2)}{3}$$
$$D = \frac{C\,(A-3)}{4}$$

— — — — — — —

— — — — — — —

$$Q = \frac{P\,(A-(m-2))}{m-1}$$
$$R = \frac{Q\,(A-(m-1))}{m}$$
$$S = \frac{R\,(A-m)}{m+1}$$

— — — — —

— — — — —

g) Soll also die Gleichung (k) in Nro. 1. Statt haben; so müssen auch die hier gefundenen Coefficientengleichungen als gültig angenommen werden, welche gesetzmäßig aus jener Gleichung abgeleitet worden sind. Aus diesen Coefficientengleichungen sehen wir, daß ein jeder Coefficient aus den andern ihm vorausgehenden Coefficienten nach einem bestimmten und allgemeinen Gesetze entspringt, und daß alle Coefficienten ganz gewiß **bestimmbare** und **reelle** Größen seyn müssen, es mag der Potenzenexponent eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahete** oder **verneinte** Zahl seyn, wenn

wenn nur der **erste** Coefficient A für alle die hier genannten Werthe des Potenzenexponenten n eine **bestimmbare** und **reelle** Größe ist. Ob aber diese Bedingung wirklich Statt habe, dieß wollen wir jetzt untersuchen.

h) Aus §. 25. wissen wir, daß allemal, sobald man eine Potenz

$$(1 + az + bz^2 + \ldots)^n = 1 + Az^2 + Bz^2 + Cz^3 + \ldots.$$

gesetzt hat, auch angenommen werden muß, der **erste** Coefficient A sey $= n.a$ und daß dieß richtig ist, es mag n eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl seyn. In Nro. 1. nun haben wir die Potenz $(1 + y)^n$, worin $y = \frac{z}{a}$ war, der Function $1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \ldots$ gleich gesetzt und zwar für alle Werthe des Exponenten n, welche **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahlen sind; also müssen wir auch annehmen nach §. 25., daß

$$A = 1.n = n$$

sey; der erste Coefficient in der Function $1 + y$ ist nehmlich $= 1$. Es ist also der erste Coefficient A, von welchem nach Nro. g alle übrigen Coefficienten abhängen, eine **bestimmte** und **reelle** Größe, denn er ist allemal dem Potenzenexponenten n gleich, dieser mag eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl seyn. Demnach sind nun auch alle übrigen Coefficienten für alle so eben genannten Werthe des Exponenten n **bestimmbare** und **reelle** Größen. Wir wollen die Bestimmung derselben vornehmen.

i) Wenn $A = n$ ist; so muß nach Nro. f, seyn:

$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{n(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

— — — — — — —

— — — — — — —

Q =

$$Q = \frac{P\,(n-(m-2))}{m-1} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ (m-1)}$$

$$R = \frac{P\,(n-(m-2))\,(n-(m-1))}{(m-1).\ \ m} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+2)\,(n-m+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ (m-1).\ \ m}$$

$$S = \frac{P(n-(m-2))\,(n-(m-1))\,(n-m)}{(m-1)\ \ m.\ \ (m+1)} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+2)\,(n-m+1)\,(n-m)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ (m-1).\ \ m.\ (m+1)}$$

— — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — —

3) Aus den für die Coefficienten gefundenen Werthen sehen wir, daß wirklich die in Nro. 1 aufgestellte Gleichung (k) und also auch der für die Potenz $(a+z)^n$ daraus gefolgerte Ausdruck bestehen kann, es mag n eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl seyn. Substituiren wir jetzt die Werthe von A, B, C, D ... Q, R, S ... in jenen Ausdruck für die Potenz $(a+z)^n$; so erhalten wir die Gleichung

$$(a+z)^n = a^n + \frac{n}{1}\,a^{n-1}.\,z + \frac{n\,(n-1)}{1\ \ 2}.\,a^{n-2}.\,z^2 + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}.\,a^{n-3}.\,z^3$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.}.\,a^{n-4}.\,z^4$$

\+ — — — — — — —

\+ — — — — — — —

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ (m-1)}.\,a^{n-(m-1)}.\,z^{m-1}$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+2)\,(n-m+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ldots\ (m-1).\ \ m}.\,a^{n-m}.\,z^m$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+2)\,(n-m+1).\,(n-m)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ldots\ (m-1).\ \ m.\ \ (m+1)}.\,a^{n-(m+1)}.\,z^{m+1}$$

\+ — — — — — — — — — —

\+ — — — — — — — — — —

und in dieser ist die Potenz $(a+z)^n$ für die Fälle, wenn der Potenzenexponent eine **ganze** oder **gebrochene**, **bejahte** oder **verneinte** Zahl ist, entwickelt dargestellt.

4) Da

4) Da die irrationalen Größen Gränzen sind, denen man sich durch rationale Größen ohne Ende fort nähern kann; so muß der Ausdruck, welchen wir für die Potenz $(a+z)^n$ gefunden haben, gelten, es mag der Potenzenexponent n eine **rationale** oder **irrationale** Zahl seyn. Ferner aber ist auch bekannt, daß sich eine imaginäre Größe im Calcul eben so behandeln läßt, als wie eine reelle Größe, und hieraus ergiebt sich, daß der für $(a+z)^n$ gefundene Ausdruck auch sogar alsdann gelten muß, wenn n eine **imaginäre** Größe ist. Also ist die Aufgabe für **alle** Werthe des Potenzenexponenten aufgelöst.

§. 27.

Ueber den im vorigen §. aufgesuchten Ausdruck, durch welchen eine jede Potenz einer zweytheiligen Größe entwickelt dargestellt werden kann, haben wir folgendes zu merken:

1) Das erste Glied desselben besteht allemal aus der sovielsten Potenz des ersten Gliedes a der zweytheiligen Größe $a+z$, als auf die wie vielste Potenz diese Größe erhoben worden ist.

2) Ein jedes von den folgenden Gliedern ist ein Product aus 3 verschiedenen Factoren, von welchen der **erste** ein aus dem Potenzenexponenten n geformter Coefficient, der **zweyte** aber eine Potenz des ersten, und der **dritte** eine Potenz des zweyten Theils der auf die Potenz erhobenen zweytheiligen Größe $a+z$ ist.

a) Die Formungsart des **ersten** Factors aber ist folgende: Er hat die Form eines Quotienten, dessen Dividendus und Divisor aus so vielen Factoren besteht, als wie viel die Zahl Einheiten enthält, welche zählt, das wie vielste Glied **nach dem ersten** dasjenige Glied ist, dessen Coefficienten man betrachtet. Die Factoren des Dividendus sind der Reihe nach die Differenzen, welche sich ergeben, wenn man von dem Potenzenexponenten n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 rc. abzieht, daher die Subtractivzahl in dem letzten Factor des Dividendus allemal um 1 geringer wird, als die Anzahl der Factoren, oder der Einheiten derjenigen Zahl, welche die Stelle des Gliedes nach dem ersten, dessen Coefficienten man betrachtet, anzeigt. Die Factoren des Divisors sind die von 1 an auf einander folgenden natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5 rc., daher der letzte Factor allemal so groß ist, als die Zahl, welche die Stelle des Gliedes nach dem ersten Gliede a^n zählt, und mithin eine Einheit mehr enthält, als die im letzten Factor des Dividendus vorkommende Subtractivzahl.

b) Die Formungsart des **zweyten** Factors, welcher aus dem ersten Gliede a der zweytheiligen Größe (a + z) gebildet wird (Nro. 2.), besteht darin: Es ist jedesmal diese Größe a auf eine Potenz erhoben, deren Exponent der Differenz gleich ist, welche sich ergiebt, wenn man von dem Potenzenexponenten n den letzten Factor im Divisor des Coefficienten subtrahirt.

c) Die Formungsart des **dritten** Factors endlich, welcher aus dem zweyten Theile z entspringt (Nro. 2.), ist folgende: Es ist diese Größe z jedesmal auf eine Potenz erhoben, deren Exponent der Zahl gleich ist, welche die Stelle des Gliedes nach dem **ersten** anzeigt, und folglich mit dem letzten Factor im Divisor des Coefficienten (Nro. a) und der Subtractivzahl im Exponenten des zweyten Factors (Nro. b) übereinstimmt.

3) Ein jedes Glied unter allen dem ersten Gliede a^n nachfolgenden Gliedern wird nach einem bestimmten Gesetze aus dem ihm zunächst vorhergehenden Gliede erzeugt:

a) Schon aus §. 26. Nro. 2. f. und g. wissen wir, daß ein Coefficient aus dem andern nach einem bestimmten Gesetze erzeugt wird. Dort war, wenn man statt A in den einen Factor des Dividendus den Werth von A = n setzt,

der 2te Coefficient $B = \frac{A.\,(n - 1)}{2}$

der 3te " " " $C = \frac{B.\,(n - 2)}{3}$

der 4te " " " $D = \frac{C.\,(n - 3)}{4}$

— — — — — —

— — — — — —

der mte " " " $R = \frac{Q.\,(n - (m - 1))}{m}$

der (m + 1)te " $S = \frac{R.\,(n - m)}{m + 1}$

und das Gesetz besteht darin, daß der mte Coefficient allemal mit dem Factor $\frac{n - m}{m + 1}$ multiplicirt werden muß, um aus demselben den (m + 1)ten zu erzeugen.

b) Fer-

b) Ferner müssen nach Nro. 2. b, c die beyden aus a und z erzeugten Factoren in dem mten Gliede nach dem ersten a^{n-m} und z^m und in dem $(m+1)$ten $a^{n-(m+1)}$ und z^{m+1} heissen.

c) Da nun der mte Coefficient R und der $(m+1)$te S genannt worden ist (Nro. a); so muß das mte Glied nach dem ersten $= R.\, a^{n-m}.\, z^m$ seyn (Nro. 2), und das $(m+1)$te wird $= S.\, a^{n-(m+1)}.\, z^{m+1}$ oder, wenn man S nach Nro. a durch R ausdrückt, $= R.\, \frac{n-m}{m+1}.\, a^{n-(m+1)}.\, z^{m+1}$ werden müssen.

d) Es ist aber $R.\, \frac{n-m}{m+1}.\, a^{n-(m+1)}.\, z^{m+1} = R.\, a^{n-m}.\, z^m.\, \frac{n-m}{m+1}.\, \frac{z}{a}$. Daraus sieht man, daß das $(m+1)$te Glied nach dem ersten aus dem mten erzeugt wird, wenn man das mte Glied noch mit dem Ausdrucke $\frac{n-m}{m+1}.\, \frac{z}{a}$ multiplicirt, in welchem $m+1$ die Zahl bedeutet, welche zählt, das wie vielste Glied nach dem ersten man haben will.

Das **erste** Glied ist $= a^n$: will man nun z. E. das erste nach diesem haben; so ist dieß das $(0+1)$te nach dem ersten, und man erhält es, wenn man in $\frac{n-m}{m+1}.\, \frac{z}{a}$ die Zahl $m = 0$ setzt, und $\frac{n-0}{0+1}.\, \frac{z}{a}$ mit a^n multiplicirt; es ist demnach

$$= a^n.\, \frac{n-0}{0+1}.\, \frac{z}{a} = \frac{n}{1}.\, a^{n-1}.\, z$$

Hieraus ergiebt sich ferner das **zweyte** oder das $(1+1)$te Glied nach dem ersten, wenn man noch mit $\frac{n-1}{1+1}.\, \frac{z}{a}$ multiplicirt; dieses ist

$$= \frac{n}{1}.\, a^{n-1}.\, z.\, \frac{n-1}{2}.\, \frac{z}{a}$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}.\, a^{n-2}.\, z^2$$



Daraus folgt ferner das **dritte** oder $(2+1)$te Glied nach dem ersten, wenn das vorige Glied noch mit $\frac{n-2}{2+1} \cdot \frac{z}{a}$ multiplicirt wird; der Werth des **dritten** Gliedes ist $= \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot z^2 \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{z}{a}$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot z^3$$

u. s. w.

4) Die Anzahl aller Glieder in dem für $(a+z)^n$ gefundenen Ausdrucke ist jedesmal **endlich**, und zwar um 1 größer, als die Anzahl der Einheiten des Potenzenexponenten, wenn derselbe eine **ganze bejahte** Zahl ist; hingegen wird die Anzahl der Glieder **unbestimmt groß**, und es ist kein **letztes** Glied angebbar, wenn der Potenzenexponent keine **ganze bejahte** Zahl ist.

a) Man betrachte in §. 26. Nro. 3. das $(m+1)$te Glied nach dem ersten, in welchem der letzte Factor im Zähler des Coefficienten $(n-m)$ heißt. Da m als die Zahl, welche zählt, von dem wie vielsten Gliede nach dem ersten die Rede ist, allemal eine **ganze bejahte** Zahl bedeutet; so muß gewiß, wenn n ebenfalls eine **ganze bejahte** Zahl und $m = n$ ist, der Factor $(n-m)$ den Werth $= 0$ erhalten. Hierdurch aber wird dann nicht nur das $(n+1)$ste Glied, sondern auch ein jedes der darauf folgenden Glieder, die alle den Factor $(n-m)$ in ihren Coefficienten haben, $= 0$. Von den Gliedern aber, welche dem $(n+1)$ten Gliede vorausgehen, kann in diesem Falle keins $= 0$ werden, denn keins enthält den Factor $n-m$. Da nun, wenn n eine **ganze bejahte** Zahl bedeutet, das $(n+1)$te Glied nach dem ersten $= 0$ wird, so hat der Ausdruck für $(a+z)^n$ in diesem Falle nur n Glieder nach dem ersten Gliede a^n, und also, wenn das erste Glied zu den n Gliedern gezählt wird, $n+1$ Glieder; die Anzahl seiner Glieder ist demnach **endlich** groß.

b) Wenn der Exponent n keine **ganze bejahte** Zahl ist; so ist kein Fall angebbar, in welchem für irgend einen Werth von m ein Glied des Ausdruckes, welcher die Potenz $(a+z)^n$ entwickelt darstellt, den Werth $= 0$ erhalten könnte, und es ist also alsdann allemal die Anzahl der Glieder des erwähnten Ausdruckes **unbestimmt groß**.

groß. Man kann derselben so viele nehmen, als man will. Je mehr Glieder man nimmt, desto mehr nähert man sich dem vollständigen Ausdrucke für $(a + z)^n$.

§. 28.

"Man kann dem Ausdrucke für $(a + z)^n$ in §. 26. Nro. 3. eine einfachere Gestalt "geben, welche bey vielen Anwendungen desselben sehr bequem ist."

1) Aus Nro. 3. in dem vorigen §. wissen wir, daß das $(m + 1)$te Glied nach dem ersten erhalten wird, wenn man das mte Glied nach dem ersten mit dem Ausdrucke $\frac{n - m}{m + 1} \cdot \frac{z}{a}$ multiplicirt, worin $m + 1$ die Zahl bedeutet, welche die Stelle desjenigen Gliedes nach dem ersten anzeigt, von welchem die Rede ist. Nennt man nun den Quotienten $\frac{z}{a}$ um der Kürze willen Q, und bezeichnet alle Glieder in dem Ausdrucke für $(a + z)^n$ in §. 26. Nro. 3. mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ ꝛc., so erhält man statt jenes Ausdruckes folgenden:

$$a^n = - - - - - - \mathfrak{A}$$

$$+ \frac{n}{1} \mathfrak{A} Q = - - - - - - \mathfrak{B}$$

$$+ \frac{n - 1}{2} \mathfrak{B} Q = - - - - - - \mathfrak{C}$$

$$+ \frac{n - 2}{3} \mathfrak{C} Q = - - - - - - \mathfrak{D}$$

$$+ \frac{n - 3}{4} \mathfrak{D} Q = - - - - - - \mathfrak{E}$$

$$+ \frac{n - 4}{5} \mathfrak{E} Q = - - - - - - \mathfrak{F}$$

u. s. w.

2) Einen vornehmlich bequemen Ausdruck für die Fälle, wenn n eine gebrochene Zahl $= \frac{\mu}{\nu}$ ist, erhält man, wenn man den vorigen Ausdruck nimmt, und in denselben statt n den Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ setzt. Dieser Ausdruck für $(a + z)^{\frac{\mu}{\nu}}$ ist folgender:

 $a^{\frac{\mu}{\nu}} =$

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = - - - - - - \mathfrak{A}$$

$$+ \frac{\mu}{\nu} \cdot \mathfrak{A} Q = - - - - - - \mathfrak{B}$$

$$+ \frac{\mu - \nu}{2\nu} \cdot \mathfrak{B} Q = - - - - - - \mathfrak{C}$$

$$+ \frac{\mu - 2\nu}{3\nu} \mathfrak{C} Q = - - - - - - \mathfrak{D}$$

$$+ \frac{\mu - 3\nu}{4\nu} \mathfrak{D} Q = - - - - - - \mathfrak{E}$$

$$+ \frac{\mu - 4\nu}{5\nu} \mathfrak{E} Q = - - - - - - \mathfrak{F}$$

u. s. w.

§. 29.

"Da wir die Potenz $(a + z)^n$ entwickelt darstellen können; so kann nun auch die "Potenz $(a - z)^n$ leicht entwickelt werden."

Man sieht leicht ein, daß die Formeln, welche für $(a + z)^n$ angegeben worden sind, auch für $(a - z)^n$ gelten müssen, wenn man alle Glieder, in welchen **ungerade** Potenzen von z vorkommen, **negativ** nimmt.

§. 30.

Wir wollen den Gebrauch der Formeln in §. 28. durch etliche Beyspiele erläutern.

1) Es sey die Potenz $(\frac{1}{3} x + 2 x^2)^5$ zu entwickeln:

Hier ist $a = \frac{1}{3} x$; $z = 2 x^2$ und also $Q = \frac{z}{a} = \frac{2 x^2}{\frac{1}{3} x} = 6 x$, der Exponent n aber ist $= 5$. Man erhält also nach der Formel in §. 28. Nro. 1.

$$a^n = (\tfrac{1}{3} x)^5 = \frac{1}{243} \cdot x^5 = - - - - \mathfrak{A}$$

$$\frac{n}{1} \mathfrak{A} Q = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{243} \cdot x^5 \cdot 6x = \frac{10}{81} \cdot x^6 = - - \mathfrak{B}$$

n —

$$\frac{n-1}{2} \cdot \mathfrak{B}Q = \frac{5-1}{2} \cdot \frac{10}{81} \cdot x^6 \cdot 6x = \frac{40}{27} \cdot x^7 = - - \mathfrak{C}$$

$$\frac{n-2}{3} \cdot \mathfrak{C}Q = \frac{5-2}{3} \cdot \frac{40}{27} \cdot x^7 \cdot 6x = \frac{80}{9} \cdot x^8 = - - \mathfrak{D}$$

$$\frac{n-3}{4} \cdot \mathfrak{D}Q = \frac{5-3}{4} \cdot \frac{80}{9} \cdot x^8 \cdot 6x = \frac{80}{3} \cdot x^9 = - - \mathfrak{E}$$

$$\frac{n-4}{5} \cdot \mathfrak{E}Q = \frac{5-4}{5} \cdot \frac{80}{3} \cdot x^9 \cdot 6x = 32\, x^{10} = - - \mathfrak{F}$$

$$\frac{n-5}{6} \cdot \mathfrak{F}Q = \frac{5-5}{6} \cdot 32\, x^{10} = - - - - 0$$

Also ist $(\frac{1}{3} \cdot x + 2x^2)^5 = \frac{1}{243} x^5 + \frac{10}{81} \cdot x^6 + \frac{40}{27} \cdot x^7 + \frac{80}{9} \cdot x^8 + \frac{80}{3} x^9 + 32 x^{10}$

2) Es sey die Potenz $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ zu entwickeln. Hier ist nun $a = 1$; $z = -x$; Q oder $\frac{z}{a} = \frac{-x}{1} = -x$; $n = \frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{10}$ und folglich $\mu = 1$, $\nu = 10$. Demnach erhält man nach §. 28. Nro. 2.

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = 1^{\frac{1}{10}} = 1 = - - - - - \mathfrak{A}$$

$$\frac{\mu}{\nu} \cdot \mathfrak{A}Q = \frac{1}{10} \times 1 \times -x = -\frac{1}{10} \cdot x = - - \mathfrak{B}$$

$$\frac{\mu-\nu}{2\nu} \cdot \mathfrak{B}Q = \frac{1-10}{2{,}10} \times -\frac{1}{10} x \times -x = -\frac{9x^2}{20{,}10} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\mu-2\nu}{3\nu}\ \mathfrak{C}Q = \frac{1-20}{3.\ 10} \times \frac{-9x^2}{20,\ 10} \times -x = -\frac{171x^3}{30,\ 20,\ 10} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\mu-3\nu}{4\nu} \cdot \mathfrak{D}.Q = \frac{1-30}{4.\ 10} \times \frac{-171x^3}{30.\ 20.\ 10} \times -x = -\frac{4959x^4}{40,\ 30,\ 20,\ 10} = \mathfrak{E}$$

u. s. w.

Daher ist nun

$$(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10} x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959 \cdot x^4}{240000} - \ldots\ldots$$

3) Es

3) Es sey die Potenz $(p+q)^{\frac{2}{3}}$ zu entwickeln. Man erhält nach der vorigen Methode

$$(p+q)^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3} \cdot p^{-\frac{1}{3}} \cdot q + \frac{2.1}{3.6} \cdot p^{-\frac{4}{3}} \cdot q^2 + \frac{2.1.4}{3.6.9} \cdot p^{-\frac{7}{3}} \cdot q^3 + \ldots\ldots$$

4) Es sey die Potenz $(p+q)^{-\frac{1}{3}}$ zu entwickeln. Dieß giebt, wenn man die in Nro. 3. gebrauchte Methode wiederum anwendet,

$$(p+q)^{-\frac{1}{3}} = p^{-\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3} \cdot p^{-\frac{4}{3}} \cdot q + \frac{1.4}{3.6} \cdot p^{-\frac{7}{3}} \cdot q^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9} \cdot p^{-\frac{10}{3}} \cdot q^3 + \ldots$$

§. 31.

"Es sey die Anzahl der Glieder in der nachstehenden Function

$$\text{"}Z = 1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + sz^{m+1} \ldots$$

"beliebig groß, also endlich oder unendlich; man soll für einen jeden beliebigen Werth des "Exponenten n die Potenz Z^n entwickelt darzustellen suchen."

1) Zwar ist der Lehrsatz in §. 24. nicht für alle Werthe des Exponenten n in aller Strenge erwiesen, aber es ist doch wenigstens nach demselben sehr wahrscheinlich, daß für einen jeden Werth von z

$$\left.\begin{aligned}&[1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + sz^{m+1} + \ldots]^n\\ &= 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + Sz^{m+1} + \ldots\end{aligned}\right\}(\delta)$$

gesetzt werden könne, in welcher letzten Function die Coefficienten A, B, C, D .... P, Q, R, S ... unbestimmte und von der absolut veränderlichen Größe z unabhängige Coefficienten bedeuten sollen. Wäre die hier angenommene Gleichung ungereimt; so wäre es unmöglich, durch eine auf sie gebaute Rechnung zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D ..., P, Q, R, S ... zu gelangen, und für sie reelle Werthe aufzufinden. Wenn wir also in dem Folgenden durch eine gehörig dazu angelegte und auf die angenommene Gleichung gegründete Rechnung reelle und durch die bekannten Coefficienten a, b, c ..., p, q, r, s ... bestimmte Werthe der Coefficienten A, B, C ..., P, Q, R, S ... finden; so ist dieß ein Beweis, daß die nach §. 24. angenommene Gleichung wirklich Statt haben kann, und daß das, was in §. 24. nur unvollkommen erwiesen werden konnte, wirklich in aller Schärfe richtig ist.

2) Wenn

2) Wenn wir setzen, es sey

$$(g)\begin{cases}[1+az+bz^2+cz^3+\ldots+pz^{m-2}+qz^{m-1}+rz^m+sz^{m+1}+\ldots]^n\\ =1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots+Pz^{m-2}+Qz^{m-1}+Rz^m+Sz^{m+1}+\ldots;\end{cases}$$

so muß auch, weil der Werth von z in der festgesetzten Gleichung beliebig ist, wenn statt z die Größe $z+\omega$ gesetzt wird,

$$(h)\begin{cases}[1+a(z+\omega)+b(z+\omega)^2+c(z+\omega)^3+\ldots+p(z+\omega)^{m-2}+q(z+\omega)^{m-1}\\ \qquad +r(z+\omega)^m+s(z+\omega)^{m+1}+\ldots]^n\\ =1+A(z+\omega)+B(z+\omega)^2+C(z+\omega)^3+\ldots+P(z+\omega)^{m-2}\\ \qquad Q(z+\omega)^{m-1}+R(z+\omega)^m+S(z+\omega)^{m+1}+\ldots\end{cases}$$

seyn, und zwar für einen jeden beliebigen Werth von ω.

3) Wir wollen jetzt die erste Seite der Gleichung (h) entwickeln. Hierbey erhalten wir

$$1+\left.\begin{matrix}z\\+\omega\end{matrix}\right\}a+\left.\begin{matrix}z^2\\+2z\omega\\+\omega^2\end{matrix}\right\}b+\left.\begin{matrix}z^3\\+3z^2\omega\\+3z\omega^2\\+\omega^3\end{matrix}\right\}c+\left.\begin{matrix}z^4\\+4z^3\omega\\+6z^2\omega^2\\+4z\omega^3\\+\omega^4\end{matrix}\right\}d+\ldots\ldots$$

woraus sich ferner, wenn wir von den Gliedern der zweyten Horizontalreihe ω und von den Gliedern aller folgenden Horizontalreihen ω^2 trennen, folgender Ausdruck ergiebt:

$$\begin{aligned}&1+az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots\\ &+[a+2bz+3cz^2+4dz^3+\ldots]\omega\\ &+\left[\begin{matrix}b+3cz+6dz^2+\ldots\ldots\\ +c\omega+4dz\omega+\ldots\ldots\\ +d\omega^2+\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\\ \vdots\end{matrix}\right]\omega^2\end{aligned}$$

 4) Nen-

4) Nennen wir nun den ersten Theil dieses Ausdruckes, welcher nichts anders ist, als die auf die $n$te Potenz zu erhebende Function, F, und setzen den in ω multiplicirten Coefficienten $= g$, den in ω^2 multiplicirten Coefficienten aber $= h$; so erhalten wir statt des letzteren Ausdruckes kurz diesen:

$$F + g\,\omega + h\,\omega^2$$

Wird diese dreytheilige Größe als eine zweytheilige betrachtet, deren zweyter Theil $g\,\omega + h\,\omega^2$ heißt, und auf die $n$te Potenz erhoben; so erhält man

$$(F + (g\,\omega + h\,\omega^2))^n =$$

$$F^n + n.\,F^{n-1}.\,(g\,\omega + h\,\omega^2) + \frac{n\,(n-1)}{1.\quad 2}.\,F^{n-2}.\,(g\,\omega + h\,\omega^2)^2$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2\quad 3}.\,F^{n-3}.\,(g\,\omega + h\,\omega^2)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder, wenn man die Potenzen von $(g\,\omega + h\,\omega^2)$ auflöst und alles gehörig nach Potenzen der Größe ω ordnet, $(F + (g\,\omega + h\,\omega^2))^n =$

$$F^n + n\,F^{n-1}.\,g\,\omega + \left\{\begin{matrix} n\,F^{n-1}.\,h \\ + \frac{n\,(n-1)}{1.\quad 2}\,F^{n-2}.\,g^2 \end{matrix}\right\}\omega^2 + \left\{\begin{matrix} \frac{n\,(n-1)}{1.\quad 2}\,F^{n-2}\,2.\,g\,h \\ + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3}\,F^{n-3}.\,g^3 \end{matrix}\right\}\omega^3$$

u. s. w.

5) Nun wollen wir auch die zweyte Seite der Gleichung (k) entwickeln. Wir erhalten hierbey, wenn wir die Potenzen $z + \omega$ gehörig auflösen und alles nach Potenzen von ω ordnen, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} 1 + A\,z + B\,z^2 + C\,z^3 + D\,z^4 + \ldots & \\ + (A + 2\,B\,z + 3\,C\,z^2 + \ldots)\,\omega & \\ + (B + 3\,C\,z + \ldots)\,\omega^2 & \\ + (C + \ldots)\,\omega^3 & \\ + \ldots & \\ \vdots \quad & \end{aligned}$$

6) We-

6) Wegen der Gleichung (h) in Nro. 2. muß nun, wenn man die für die beyden Seiten jener Gleichung durch Entwickelung erhaltenen und nach Potenzen von ω geordneten Ausdrücke in Nro. 4 und 5 vergleicht, folgende Gleichung Statt finden:

$$F^n + nF^{n-1}.g\omega + \left.\begin{matrix} nF^{n-1}\,h \\ + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.F^{n-2}.g^2 \end{matrix}\right\}\omega^2 + \left.\begin{matrix} \frac{n(n-1)}{1.\ 2}F^{n-2}.\ 2gh \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}F^{n-3}.\ g^3 \end{matrix}\right\}\omega^3 + \ldots$$

$$= (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots) + (A + 2Bz + 3Cz^2 + \ldots)\omega$$
$$+ (B + 3Cz + \ldots)\omega^2 + \ldots\ldots$$

Es soll aber die Gleichung (h) in Nro. 2. für einen jeden beliebigen Werth von ω gelten, und die hier zuletzt erhaltene ist keine andere, als jene, denn nur die Seiten derselben sind umgeformt und nach Potenzen von ω geordnet; es muß also auch diese letzte Gleichung für alle nur denkbaren Werthe von ω Statt haben. Da nun dieser Forderung gemäß nach §. 21. die in einerley Potenzen von ω multiplicirten und von ω unabhängigen Coefficienten der beyden Seiten dieser Gleichung einander gleich seyn müssen; so erhält man folgende zwey Gleichungen:

a) $F^n = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$

b) $nF^{n-1}.g = A + 2Bz + 3Cz^2 + \ldots$

Die Gleichung a) ist die in Nro. 2. vorausgesetzte Gleichung (z); die Gleichung b) ferner ist eine Gleichung, welcher wir uns, wie sogleich erhellen wird, zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C . . . bedienen können.

7) Wenn wir in die erste Seite der Gleichung b) in Nro. 6. für F und g die Werthe setzen aus Nro. 4; so erhalten wir statt des Ausdruckes $nF^{n-1}.g$ diesen:

$$n(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots)^{n-1} \times (a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \ldots)$$

In F sey nun hier az das erste Gied nach dem ersten, dann ist in den Gliedern pz^{m-2}; qz^{m-1}; rz^m; sz^{m+1}; . . . (welche wir in Nro. 1. als allgemeine Glieder in der Function aufstellten, bisher aber um der Kürze willen wegließen,) ein jeder der Exponenten $m-2$; $m-1$; m; $m+1$ 2c. zugleich der Index des Gliedes nach dem ersten, in wel-

welchem er steht. So bedeutet z. E. pz^{m-2} das (m — 2)te, qz^{m-1} das (m — 1)te Glied nach dem ersten Gliede 1 in der Function F. Nun ist leicht einzusehen, daß, wenn wir die allgemeinen Glieder in der Rechnung mit fortgeführt hätten, die Größe g so aussehen müßte:

$$a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \ldots + (m-2)pz^{m-3} + (m-1)qz^{m-2} + m.rz^{m-1} + (m+1)sz^m + \ldots$$

Also wird aus dem Ausdrucke für die Größe $nF^{n-1}.g$ durch die Aufnahme der allgemeinen Glieder dieser:

$$n(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + sz^{m+1} + \ldots)^{n-1} \times (a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \ldots + (m-2)pz^{m-3} + (m-1)qz^{m-2} + m.rz^{m-1} + (m+1)sz^m + \ldots)$$

8) Wird nun dieser Ausdruck statt $nF^{n-1}.g$ in der Gleichung b) in Nro. 6. gebraucht, und auch die Seite rechter Hand durch die allgemeinen in Nro. 1. angegebenen und gehörig geformten Glieder ergänzt; so erhält man statt jener Gleichung folgende:

$$n(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + sz^{m+1} + \ldots)^{n-1} \times (a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \ldots + (m-2)pz^{m-3} + (m-1)qz^{m-2} + mrz^{m-1} + (m+1)sz^m + \ldots)$$
$$= A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \ldots + (m-2)Pz^{m-3} + (m-1)Qz^{m-2} + mRz^{m-1} + (m+1)Sz^m + \ldots$$

9) Jetzt multiplicire man die vorige Gleichung auf beyden Seiten mit der Function $1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + sz^{m+1}$. Hierdurch wird aus der (n — 1)sten Potenz dieser Function, welche in der linken Seite der vorigen Gleichung als Factor steht, die nte Potenz, und hierfür kann man dann die in Nro. 1. festgesetzte Function gebrauchen. Demnach wird aus der vorigen Gleichung folgende:

$$n(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^{m-2} + Qz^{m-1} + Rz^m + Sz^{m+1} + \ldots) \times (a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \ldots + (m-2)pz^{m-3} + (m-1)qz^{m-2} + mrz^{m-1} + (m+1)sz^m + \ldots)$$

= (A

$$= \left(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \ldots + (m-2)Pz^{m-3} + (m-1)Qz^{m-2} + mRz^{m-1} + (m+1)Sz^m + \ldots\right) \times \left(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots + pz^{m-2} + qz^{m-1} + rz^m + sz^{m+1} + \ldots\right)$$

Durch die wirkliche Multiplication der Factoren in einander ergiebt sich nun diese Gleichung: der Ausdruck

$na + naA$	$z + naB$	$z^2 + naC$	$z^3 + naD$	$z^4 + \ldots + naP$	$z^{m-2} + naQ$	$z^{m-1} + naR$	$z^m + naS$	$z^{m+1} + \ldots$
$+ 2nb$	$+ 2nbA$	$+ 2nbB$	$+ 2nbC$	$+ \ldots +$ „ „	$+ 2nbP$	$+ 2nbQ$	$+ 2nbR$	
	$+ 3nc$	$+ 3ncA$	$+ 3ncB$	$+ \ldots +$ „ „	$+$ „ „	$+ 3ncP$	$+ 3ncQ$	
		$+ 4nd$	$+ 4ndA$	$+ \ldots +$ „ „	$+$ „ „	$+$ „ „	$+ 4ndP$	
			.	.	.	.	.	
			.	.	.	.	.	
			.	.	.	.	.	
				$+ \ldots + (m-1)nq$	$+ (m-1)nqA$	$+ (m-1)nqB$	$+ (m-1)nqC$	
					$+ m.n.r$	$+ m.n.rA$	$+ m.n.rB$	
						$+ (m+1)ns$	$+ (m+1)nsA$	
							$+ (m+2)nt$	

nehmlich ist dem nachstehenden Ausdrucke gleich

$A + 2B$	$z + 3C$	$z^2 + 4D$	$z^3 + \ldots + (m-2)P$	$z^{m-3} + (m-1)Q$	$z^{m-2} + mR$	$z^{m-1} + (m+1)S$	$z^m + (m+2)T$	$z^{m+1} + \ldots$
$+ aA$	$+ 2aB$	$+ 3aC$	$+ \ldots +$ „ „	$+ (m-2)aP$	$+ (m-1)aQ$	$+ maR$	$+ (m+1)aS$	
	$+ bA$	$+ 2bB$	$+ \ldots +$ „ „	$+$ „ „	$+ (m-2)bP$	$+ (m-1)bQ$	$+ mbR$	
		cA	$+ \ldots +$	$+$	$+$	$+$	$+$	
			.	.	.	.	.	
			.	.	.	.	.	
			.	.	.	.	.	
				$+ pA$	$+ 2pB$	$+ 3pC$	$+ 4pD$	
					$+ qA$	$+ 2qB$	$+ 3qC$	
						$+ rA$	$+ 2rB$	
							$+ sA$	

 Diese

Diese Gleichung muß für einen jeden beliebigen Werth von z gelten, denn sie gründet sich auf die Gleichung (5) in Nro. 1., welche der Voraussetzung gemäß für alle Werthe von z gelten soll. Da nun dieser Forderung nach §. 21. nur alsdann ein Genüge geschehen kann, wenn die in einerley Potenzen von z in beyden Functionen multiplicirten Coefficienten einander gleich sind; so müssen auch wegen der gethanen Forderung die hier folgenden Coefficientengleichungen Statt haben:

I) $A = na$

II) $2B + aA = naA + 2nb$

III) $3C + 2aB + bA = naB + 2nbA + 3nc$

IV) $4D + 3aC + 2bB + cA = naC + 2nbB + 3ncA + 4nd$

u. s. w.

V) $(m-1)Q + (m-2)aP + \ldots + pA = naP + \ldots + (m-1)nq$

VI) $mR + (m-1)aQ + (m-2)bP + \ldots + 2pB + qA = naQ$
$+ 2nbP + \ldots + (m-1)n.qA + m.n.r$

VII) $(m+1)S + maR + (m-1)bQ + \ldots + 3pC + 2qB + rA$
$= naR + 2nbQ + 3ncP + \ldots + (m-1)nqB$
$+ m.nrA + (m+1)ns$

VIII) $(m+2)T + (m+1)aS + mbR + \ldots + 4pD + 3qC + 2rB$
$+ sA = naS + 2nbR + 3ncQ + 4ndP + \ldots.$
$+ (m-1)nqC + m.n.rB + (m+1)nsA + (m+2)nt$

u. s. w.

10) Aus den Gleichungen in Nro. 9. folgt aber

$$A = \frac{na}{1}$$

$$B = \frac{(n-1)aA + 2nb}{2}$$

$$C = \frac{(n-2)aB + (2n-1)bA + 3nc}{3}$$

$$D = \frac{(n-3)aC + (2n-2)bB + (3n-1)cA + 4nd}{4}$$

u. s. w.

Q =

$$Q = \frac{(n-(m-2))\,aP + \ldots\ldots + (m-1)\,nq}{m-1}$$

$$R = \frac{(n-(m-1))\,aQ + (2n-(m-2))\,bP + \ldots + m.n.r}{m}$$

$$S = \frac{(n-m)\,aR + (2n-(m-1))\,bQ + \ldots + ((m-1)n-2)\,qB + (m.n-1)\,r.A + (m+1)\,n\mathfrak{s}}{m+1}$$

$$T = \frac{(n-(m+1))aS + (2n-m)bR + \ldots + ((m-1)n-3)qC + (m.n-2)r.B + ((m+1)n-1)\mathfrak{s}A + (m+2)nt}{m+2}$$

11) Es ist leicht einzusehen, daß die Gleichungen VI, VII, VIII in Nro. 9., wenn man mehrere allgemeine Glieder in der Rechnung einführte, vollständiger so aussehen müßten:

a) $mR + (m-1)\,aQ + (m-2)\,bP + (m-3)\,c.O + (m-4)\,dN$
$+ (m-5)\,eM + \ldots + 2pB + qA$
$= naQ + 2nbP + 3ncO + 4ndN + 5neM + \ldots + (m-2)\,npB$
$+ (m-1)\,nqA + m.n.r$

b) $(m+1)\,S + maR + (m-1)\,bQ + (m-2)\,cP + (m-3)\,dO$
$+ (m-4)\,eN + \ldots + 3pC + 2qB + rA$
$= naR + 2nbQ + 3ncP + 4ndO + 5neN + \ldots + (m-2)\,npC$
$+ (m-1)\,nqB + m.n.r.A + (m+1)\,n\mathfrak{s}$

c) $(m+2)\,T + (m+1)\,aS + mbR + (m-1)\,cQ + (m-2)\,dP$
$+ (m-3)\,eO + \ldots + 4pD + 3qC + 2rB + \mathfrak{s}A$
$= naS + 2nbR + 3ncQ + 4ndP + 5neO + \ldots + (m-2)\,npD$
$+ (m-1)\,nqC + m.n.r.B + (m+1)\,n\mathfrak{s}A + (m+2)\,nt$

Hiernach würden dann die für den mten, (m + 1)ten und (m + 2)ten Coefficienten in Nro. 10. angegebenen Gleichungen vollständiger ausgedrückt diese seyn:

$$R = \frac{\left\{\begin{array}{l}(n-(m-1))aQ + (2n-(m-2))bP + (3n-(m-3))cO + (4n-(m-4))dN \\ + (5n-(m-5))\,eM + \ldots + ((m-2)\,n-2)\,pB + ((m-1)n-1)\,qA + mnr\end{array}\right\}}{m}$$

S =

$$S = \frac{\left\{\begin{matrix}(n-m)aR + (2n-(m-1))bQ + (3n-(m-2))cP + (4n-(m-3))dO \\ + (5n-(m-4))eN + \ldots + ((m-2)n-3)pC + ((m-1)n-2)qB + (m.n-1)rA + (m+1)ns\end{matrix}\right\}}{m+1}$$

$$T = \frac{\left\{\begin{matrix}(n-(m+1))aS + (2n-m)bR + (3n-(m-1))cQ + (4n-(m-2))dP + (5n-(m-3))eO + \ldots \\ + ((m-2)n-4)pD + ((m-1)n-3)qC + (m.n-2)rB + ((m+1)n-1)sA + (m+2)nt\end{matrix}\right\}}{m+2}$$

12) Wenn man die Ausdrücke für die Coefficienten A, B, C, D ... R, S, T gehörig ansieht; so entdeckt man folgendes Gesetz:

a) Der Coefficient eines jeden Gliedes der für die unbestimmte nte Potenz der Function $1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots$ in nro. 1. angenommenen Function $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$ ist durch alle Coefficienten der vorhergegangenen Glieder bestimmt, und er hat die Form eines Quotienten, dessen Dividendus aus so vielen Gliedern besteht, als wie viel der Divisor Einheiten enthält.

b) Der Divisor in einem jeden Coefficienten aber hat gerade so viele Einheiten als die Zahl, welche anzeigt, zu dem wievielsten Gliede nach dem ersten der Coefficient in der Reihe $1 + Az + Bz^2 + \ldots$ gehört. In dem Ausdrucke für D in Nro. 10. ist er $= 4$, und in dem für R ist er $= m$.

c) In einem jeden Gliede des Dividendus ist der Potenzenexponent n der Potenz $(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^n$ mit derjenigen Zahl multiplicirt, welche die Stelle des Gliedes im Dividendus, wenn man die Glieder desselben von der Linken gegen die Rechte liest, anzeigt, und von diesem Multiplo des Exponenten n ist allemal eine Zahl abgezogen, die dem Unterschiede gleich ist, welchen man erhält, wenn man die Zahl für die Stelle des Gliedes im Dividendus von dem nach Nro. b. bestimmten Divisor abzieht. Der zwischen dem Multiplo und der genannten Zahl Statt habende Rest ist ferner mit dem Coefficienten desjenigen Gliedes von der Function $1 + az + bz + cz^2 + dz^4 + \ldots$, dessen Stelle durch die in den Exponenten n multiplicirte Zahl angedeutet wird, und auch noch mit dem Coefficienten aus der Function $1 + Az + Bz^2 + \ldots$ multiplicirt, dessen Stelle die von dem Multiplo des Exponenten subtrahirte Zahl anzeigt.

13) Das

13) Das hier angegebene Coefficientengesetz ist allgemein, denn es ist nicht blos von einigen bestimmten Coefficienten, z. E. dem 2ten, 3ten und 4ten abgenommen; sondern es ist aus den allgemeinen Ausdrücken für den mten, (m + 1)ten und (m + 2)ten Coefficienten (Nro. 11.) abgeleitet, welche Ausdrücke nicht nach den Ausdrücken für die ersteren Coefficienten hypothetisch geformt, sondern unmittelbar durch Rechnung aufgesucht wurden.

14) Ferner ist dasselbe von der Art, daß sich nach ihm ein jeder beliebiger Coefficient der für die Potenz $(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots)^n$ in Nro. 1. einstweilen hypothetisch angenommenen Function $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots$ bestimmen und als eine reelle Größe darstellen läßt, und hierdurch erhält also der Satz, welchen wir in Nro. 1. blos als wahrscheinlich annehmen konnten, seine völlige Gewißheit.

15) Es ist also eine jede unbestimmte nte Potenz einer Function

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \ldots$$

eine Function von der Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \ldots$$

deren Coefficienten **bestimmbare reelle** Größen sind, und die Bestimmung derselben geschieht nach dem in Nro. 12. angegebenen Gesetze.

16) Zur Bestimmung dieser Coefficienten aber kann man am bequemsten den Ausdruck für den mten Coefficienten R in Nro. 11. gebrauchen, wenn man denselben auf folgende Art einrichtet: Man bezeichne alle Coefficienten

a, b, c, d, e ....., p, q, r, s ...... der Ordnung nach

durch $\mathfrak{k}', \mathfrak{k}'', \mathfrak{k}''', \mathfrak{k}'''', \mathfrak{k}^{v} \ldots\ldots, \mathfrak{k}^{(m-2)}; \mathfrak{k}^{(m-1)}; \mathfrak{k}^{(m)}; \mathfrak{k}^{(m+1)} \ldots\ldots$

wo $\mathfrak{k}^{(m-2)}$ den (m — 2)ten, $\mathfrak{k}^{(m-1)}$ den (m — 1)ten; $\mathfrak{k}^{(m)}$ den mten ꝛc. Coefficienten bedeutet; auf ähnliche Art bezeichne man auch die Coefficienten

A, B, C, D, E ...., P, Q, R, S ....

durch $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'', \mathfrak{K}''', \mathfrak{K}'''', \mathfrak{K}^{v} \ldots\ldots, \mathfrak{K}^{(m-2)}, \mathfrak{K}^{(m-1)}, \mathfrak{K}^{(m)}, \mathfrak{K}^{(m+1)} \ldots\ldots$

Die so bezeichneten Coefficienten nun setze man in den Ausdruck für R in Nro. 11., hierdurch erhält man

$$\mathfrak{K}^{(m)} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \big(n-(m-1)\big)\mathfrak{k}'\mathfrak{K}^{(m-1)} + \big(2n-(m-2)\big)\mathfrak{k}''\mathfrak{K}^{(m-2)} + \big(3n-(m-3)\big)\mathfrak{k}'''\mathfrak{K}^{(m-3)} \\ + \big(4n-(m-4)\big)\mathfrak{k}''''\mathfrak{K}^{(m-4)} + \big(5n-(m-5)\big)\mathfrak{k}^{v}\mathfrak{K}^{(m-5)} + \ldots \\ + \big((m-2)n-2\big)\mathfrak{k}^{(m-2)}.\mathfrak{K}'' + \big((m-1)n-1\big)\mathfrak{k}^{(m-1)}.\mathfrak{K}' + m.n\,\mathfrak{k}^{(m)} \end{array}\right\}}{m}$$

Weil nun der Dividendus allemal so viele Glieder enthalten muß, als wie viele Einheiten der Divisor hat, dieser aber der Zahl gleich ist, welche den Coefficienten zählt, den man in Betrachtung zieht; so erhält man aus dem vorigen allgemeinen Ausdrucke

für $m = 1$

den ersten Coefficienten $\mathfrak{K}' = \frac{n \cdot \mathfrak{k}'. \mathfrak{K}^{(0)}}{1} = \frac{n\mathfrak{k}'}{1}$

für $m = 2$

den zweyten . . $\mathfrak{K}'' = \frac{(n-1)\,\mathfrak{k}'.\,\mathfrak{K}' + 2\,n\,\mathfrak{k}''}{2}$

für $m = 3$

den dritten . . $\mathfrak{K}''' = \frac{(n-2)\,\mathfrak{k}'.\,\mathfrak{K}'' + (2n-1)\,\mathfrak{k}''\,\mathfrak{K}' + 3\,n\,\mathfrak{k}'''}{3}$

für $m = 4$

den vierten . . $\mathfrak{K}'''' = \frac{(n-3)\,\mathfrak{k}'.\,\mathfrak{K}''' + (2n-2)\,\mathfrak{k}''.\,\mathfrak{K}'' + (3n-1)\,\mathfrak{k}'''\,\mathfrak{K}' + 4n\mathfrak{k}''''}{4}$

für $m = 5$

den fünften . . $\mathfrak{K}^{v} = \frac{\left\{\begin{matrix}(n-4)\,\mathfrak{k}'\,\mathfrak{K}'''' + (2n-3)\,\mathfrak{k}''.\,\mathfrak{K}''' + (3n-2)\,\mathfrak{k}'''\,\mathfrak{K}'' \\ + (4n-1)\,\mathfrak{k}''''\,\mathfrak{K}' + 5\,n\,\mathfrak{k}^{v}\end{matrix}\right\}}{5}$

für $m = 6$

den sechsten . . $\mathfrak{K}^{vi} = \frac{\left\{\begin{matrix}(n-5)\,\mathfrak{k}'.\,\mathfrak{K}^{v} + (2n-4)\,\mathfrak{k}''.\,\mathfrak{K}'''' + (3n-3)\,\mathfrak{k}'''.\,\mathfrak{K}''' \\ + (4n-2)\,\mathfrak{k}''''\,\mathfrak{K}'' + (5n-1)\,\mathfrak{k}^{v}\,\mathfrak{K}' + 6\,n\,\mathfrak{k}^{vi}\end{matrix}\right\}}{6}$

für $m = 7$

den siebenten . . $\mathfrak{K}^{vii} = \frac{\left\{\begin{matrix}(n-6)\,\mathfrak{k}'\,\mathfrak{K}^{vi} + (2n-5)\,\mathfrak{k}''\,\mathfrak{K}^{v} + (3n-4)\,\mathfrak{k}'''.\,\mathfrak{K}'''' \\ + (4n-3)\mathfrak{k}''''\mathfrak{K}''' + (5n-2)\mathfrak{k}^{v}\mathfrak{K}'' + (6n-1)\mathfrak{k}^{vi}\mathfrak{K}' + 7n\mathfrak{k}^{vii}\end{matrix}\right\}}{7}$

u. s. w.

§. 32.

1) Sollte also die Function $1 + \alpha z + \beta z^2$ auf die nte Potenz erhoben werden; so wäre hier der erste Coefficient $\mathfrak{k}' = \alpha$, der zweyte $\mathfrak{k}'' = \beta$, die folgenden

Coefficienten f''', f'''' ꝛc. aber wären $= 0$. Demnach wäre der allgemeine Ausdruck für den mten Coefficienten $\mathfrak{K}^{(m)}$ der nten Potenz der hier angegebenen Function nach Nro. 16. in dem vorigen §. dieser:

$$\mathfrak{K}^{(m)} = \frac{(n - (m - 1))\, f'.\, \mathfrak{K}^{(m-1)} + (2\,n - (m - 2)) f''\, \mathfrak{K}^{(m-2)} + 0}{m},$$

woraus für $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ ꝛc. und für die Werthe von f' und f'' folgt:

$$\mathfrak{K}' = \frac{n\, f'}{1} = \frac{n\, \alpha}{1}$$

$$\mathfrak{K}'' = \frac{(n - 1) f' \mathfrak{K}' + 2\, n\, f''}{2} = \frac{(n - 1)\, \alpha\, \mathfrak{K}' + 2\, n\, \beta}{2}$$

$$\mathfrak{K}''' = \frac{(n - 2) f' \mathfrak{K}'' + (2\,n - 1) f'' \mathfrak{K}' + 0}{3} = \frac{(n - 2)\, \alpha\, \mathfrak{K}'' + (2\,n - 1)\, \beta\, \mathfrak{K}'}{3}$$

$$\mathfrak{K}'''' = \frac{(n - 3) f' \mathfrak{K}''' + (2\,n - 2) f'' \mathfrak{K}'' + 0}{4} = \frac{(n - 3)\, \alpha\, \mathfrak{K}''' + (2\,n - 2)\, \beta\, \mathfrak{K}''}{4}$$

$$\mathfrak{K}^{V} = \frac{(n - 4) f' \mathfrak{K}'''' + (2\,n - 3) f'' \mathfrak{K}''' + 0}{5} = \frac{(n - 4)\, \alpha\, \mathfrak{K}'''' + (2\,n - 3)\, \beta\, \mathfrak{K}'''}{5}$$

$$\mathfrak{K}^{VI} = \frac{(n - 5) f' \mathfrak{K}^{V} + (2\,n - 4) f'' \mathfrak{K}'''' + 0}{6} = \frac{(n - 4)\, \alpha\, \mathfrak{K}^{V} + (2\,n - 4)\, \beta\, \mathfrak{K}''''}{6}$$

$$\mathfrak{K}^{VII} = \frac{(n - 6) f' \mathfrak{K}^{VI} + (2\,n - 5) f'' \mathfrak{K}^{V} + 0}{7} = \frac{(n - 6)\, \alpha\, \mathfrak{K}^{VI} + (2\,n - 5)\, \beta\, \mathfrak{K}^{V}}{7}$$

u. s. w.

Setzte man nun den Werth von $\mathfrak{K}'$ in $\mathfrak{K}''$, die beyden Werthe von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ in $\mathfrak{K}'''$ u. s. w.; so würde man die bestimmten Werthe von $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$; $\mathfrak{K}'''$; $\mathfrak{K}^{IV}$ ꝛc. erhalten.

2) Wäre z. E. $n = 3$; so erhielte man nach Nro. 1. für $(1 + \alpha z + \beta z)^3$ die Coefficienten

$$\mathfrak{K}' = 3\,\alpha$$

$$\mathfrak{K}'' = 3\,\alpha^2 + 3\,\beta$$

$$\mathfrak{K}''' = \alpha^3 + 6\,\alpha\,\beta$$

$$\mathfrak{K}^{IV} = 3\,\alpha^2\,\beta + 3\,\beta^2$$

$$\mathfrak{K}^{V} = 3\alpha\beta^2$$
$$\mathfrak{K}^{VI} = \beta$$
$$\mathfrak{K}^{VII} = 0$$

und es wäre demnach

$$(1 + \alpha z + \beta z^2)^3$$
$$= 1 + 3\alpha z + \left.\begin{matrix}3\alpha^2 \\ + 3\beta\end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix}\alpha^3 \\ + 6\alpha\beta\end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix}3\alpha^2\beta \\ + 3\beta^2\end{matrix}\right\} z^4 + 3\alpha\beta^2 z^5 + \beta^3 z^6$$

§. 33.

Das Verfahren bey der Erhebung der nachstehenden Functionen

I) $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots\ldots\ldots = Z$

II) $z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \ldots\ldots\ldots = Z'$

III) $A z^m + B z^{m+r} + C z^{m+2r} + D z^{m+3r} + E z^{m+4r} + \ldots = Z''$

auf eine jede beliebige nte Potenz kann folgendes seyn:

1) $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots = (1 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\gamma}{\alpha} z^2 + \frac{\delta}{\alpha} z^3 + \frac{\varepsilon}{\alpha} z^4 + \ldots)\alpha$, also ist auch $(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots)^n = (1 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\gamma}{\alpha} z^2 + \frac{\delta}{\alpha} z^3 + \frac{\varepsilon}{\alpha} z^4 + \ldots)^n . \alpha^n$; die Potenz $(1 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\gamma}{\alpha} z^2 + \frac{\delta}{\alpha} z^3 + \frac{\varepsilon}{\alpha} z^4 + \ldots)^n$ aber kann nach §. 31. bestimmt werden. Man multiplicire also in der durch diese Bestimmung erhaltenen Function ein jedes Glied mit α^n, dann erhält man die Potenz Z^n.

2) Ferner ist $z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \ldots = (1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots) . z$ und also auch $(z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \ldots)^n = (1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots)^n . z^n$ Man bestimme nun nach §. 31. die Potenz $(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots)^n$ und multiplicire ein jedes Glied der hierbey erhaltenen Function mit z^n, so ergiebt sich Z'^n.

3) Endlich ist $Az^m + Bz^{m+r} + Cz^{m+2r} + Dz^{m+3r} + \ldots = (1 + \frac{B}{A} z^r + \frac{C}{A} z^{2r} + \frac{D}{A} z^{3r} + \ldots) Az^m$

Jetzt

Jetzt setze man $z^r = y$; dann ist $z = y^{\frac{1}{r}}$ und folglich auch

$$z^{2r} = y^2$$
$$z^{3r} = y^3$$
u. s. w.

das heißt allgemein, es ist $z^m = y^{\frac{m}{r}}$. Demnach muß nun auch die Function

$$\left(1 + \frac{B}{A}z^r + \frac{C}{A}z^{2r} + \frac{D}{A}z^{3r} + \ldots\right) A z^m = \left(1 + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}y^3 + \ldots\right). A y^{\frac{m}{r}}$$

und also $\left[\left(1 + \frac{B}{A}z^r + \frac{C}{A}z^{2r} + \frac{D}{A}z^{3r} + \ldots\right) A z^m\right]^n = \left[\left(1 + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}y^3 + \ldots\right) A y^{\frac{m}{r}}\right]^n$

$= \left(1 + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}y^3 + \ldots\right)^n . A^n . y^{\frac{mn}{r}}$ seyn.

Sucht man jetzt nach §. 31. die Potenz $\left(1 + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}y^3 + \ldots\right)^n$ zu entwickeln, und multiplicirt ein jedes Glied in der durch Entwickelung erhaltenen Function mit der Größe $A^n . y^{\frac{mn}{r}}$; so hat man eine Function Y von y, in welcher $y = z^r$ ist, und welche die Potenz

$$(A z^m + B z^{m+r} + C z^{m+2r} + D z^{m+3r} + \ldots)^n$$

ausdrückt, wenn man in derselben überall statt y den Werth z^r schreibt.

Dritter Abschnitt.

Von den Formen der algebraischen Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

I) Die rationalen Functionen.

1) Die verschiedenen Formungsarten, deren die ganzen Functionen fähig sind.

---

§. 34.

"In der nachstehenden Function

$$A + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n \quad (b)$$

"seyen die Größen A, B, C ... von z unabhängig, übrigens aber seyen die Formen "und die Werthe derselben beliebig; n bedeute eine ganze bejahte Zahl, und die Anzahl "der Glieder sey endlich groß. Alle algebraischen Ausdrücke, welche ganze Functionen Z einer einzigen veränderlichen Größe z bezeichnen und nicht schon die Form der hier aufgestellten Function haben, müssen sich auf diese Form zurückführen lassen."

1) Damit der Beweis für unsern hier aufgestellten Lehrsatz desto leichter werde; so wollen wir die von z abhängigen, d. h. die veränderlichen Glieder der ganzen Functionen Z in **einfache** und **zusammengesetzte** eintheilen.

a) **Einfach** sollen alle diejenigen veränderlichen Glieder heißen, die entweder unmittelbar unter der Form az^n, in welcher wir unter a eine jede beliebige von z unabhängige Größe und unter n eine beliebige ganze bejahte Zahl verstehen, enthalten sind, oder doch die Beschaffenheit haben, daß sie die Form az^n erhalten, wenn man die in ihnen angedeuteten Rechnungsoperationen wirklich ausführt. Dieser Erklärung zufolge gehören nicht nur die Functionen z, az, az^3, $p\sqrt{(p+q)}\,z^7$, $\frac{a}{b}z^5$ ꝛc. zu den **einfachen** und veränderlichen Gliedern ganzer Functionen; sondern auch die nachstehenden Functionen

$$az^m \times bz^n \times cz^p \times \ldots = abc \times \ldots \times z^{m+n+p+\cdots}; \; az^m : bz^n = \frac{a}{b} z^{m-n};$$

$$(az^m \times bz^n \times \ldots) : (\alpha z^\mu \times \beta z^\nu \times \ldots) = \frac{ab \times \ldots}{\alpha\beta \times \ldots} z^{(m+n+\cdots)-(\mu+\nu+\cdots)}; \; (az^m)^n : (bz^p)^r$$

$= a$

$= \frac{a^n}{b^r} \cdot z^{mn-pr}$ ꝛc. sind solche Glieder, wenn nehmlich alle Exponenten m, n, p, r, μ, ν ganze bejahte Zahlen bedeuten, und $m > n$; $m + n + \ldots > \mu + \nu + \ldots$; $mn > pr$ ist, welches wir hier annehmen.

b) **Zusammengesetzt** sollen alle diejenigen veränderlichen Glieder genannt werden, in welchen endliche algebraische Summen von der Form $a + bz^m + cz^n + \ldots$ vorkommen. Es können aber diese Summen einer oder auch mehreren arithmetischen Operationen unterworfen seyn, und es sind also die nachstehenden Functionen

1) $a + bz^m + cz^n + \ldots$

2) $(a + bz^m + cz^n + \ldots) C$

3) $(a + bz^m + cz^n + \ldots) Cz^r$

4) $(a + bz^m + cz^n + \ldots)(\alpha + \beta z^\mu + \gamma z^\nu + \ldots) \times \ldots$

5) $(a + bz^m + cz^n \ldots)^r$

6) $(a + bz^m + cz^n + \ldots)^r \cdot (\alpha + \beta z^\mu + \gamma z^\nu + \ldots)^s \times \ldots$

u. s. w.

in welchen die Anzahl der Glieder endlich groß seyn soll, und alle Exponenten ganze bejahte Zahlen bedeuten sollen, **zusammengesetzte** Glieder ganzer Functionen.

2) Nun wollen wir den Beweiß des Lehrsatzes vornehmen.

a) Es enthalte eine vorgegebene ganze Function Z von z entweder eins oder mehrere von z unabhängige und also constante Glieder, oder auch gar kein solches Glied, und die veränderlichen Glieder derselben, deren Anzahl, weil hier von ganzen Functionen die Rede ist, allemal endlich groß seyn muß, seyen **einfach**.

Das **eine** constante Glied oder die algebraische Summe der **mehreren** constanten Glieder giebt hier das in der Form (h) stehende Glied A, und wenn Z gar kein constantes Glied enthält, so kann man sagen, es sey das der Function Z zugehörige constante Glied $A = 0$. Die **einfachen** veränderlichen Glieder der Function Z aber, welche noch nicht die Form az^n haben, können, weil sie **einfach** sind, darauf gebracht werden, und man erhält, wenn man dieses thut, ganz gewiß für die Function Z die Form

$$A + az^n + bz^p + cz^q + \ldots$$

Wenn

Wenn nun diese Form von Z die Eigenschaft nicht hat, daß die Exponenten n, p, q ... nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortlaufen; so kann man alle Glieder so ordnen, daß die Exponenten von der Linken gegen die Rechte steigen, und kann alsdann zwischen die Glieder so viele Glieder von der Form az^n mit Coefficienten, welche = o sind, einschalten, daß Z diese Eigenschaft erhält. Hierdurch wird der Werth von Z nicht verändert, die Form aber wird der Form (h) gleich, in welcher, wie wir vorausgesetzt haben, nicht alle Coefficienten B, C, D ... wirkliche Größen zu seyn brauchen, sondern auch zum Theil den Werth = o haben können.

Also läßt sich gewiß eine jede ganze Function Z von z, deren veränderliche Glieder **einfach** sind, in der Form (h) darstellen.

b) Es enthalte eine ganze Function Z von z außer den constanten Gliedern, die auch hier wieder = o seyn können, theils **einfache** und theils **zusammengesetzte**, oder auch bloß allein **zusammengesetzte** veränderliche Glieder.

Die Möglichkeit der Reduction solcher Functionen auf die Form (h) ist erwiesen; sobald man darthun kann, daß sich alle **zusammengesetzten** Glieder, sie seyen geformt, wie sie wollen, in eine algebraische Summe aus constanten und einfachen veränderlichen Gliedern auflösen lassen. Ist nämlich diese Resolution möglich; so kann man sie mit einem jeden Gliede vornehmen, und dann alle dadurch erhaltenen constanten und **einfachen** veränderlichen Glieder der Function Z gehörig ordnen, wodurch man für Z die Form

$$A + Gz^n + Hz^p + Kz^q + \dots$$

erhält, welche sich nach Nro. A. in die Form (h) bringen läßt.

Es soll nun hier die Resolution der vornehmsten **zusammengesetzten** veränderlichen Glieder ganzer Functionen Z gezeigt werden.

α) Das zusammengesetzte Glied $a + bz^m + cz^n + \dots$ ist schon aufgelöst.

β) Das zusammengesetzte Glied $(a + bz^m + cz^n + \dots) C$ wird aufgelöst, wenn man alle Glieder mit C multiplicirt, und eben so kann die Auflösung des Gliedes $(a + bz^m + cz^n + \dots) Cz^r$ geschehen.

γ) Das zusammengesetzte Glied

$$(a + bz^m + cz^n + \dots) \times (\alpha + \beta z^\mu + \gamma z^\nu + \dots) \times \dots$$

läßt

läßt sich ebenfalls, wie man sieht, durch Multiplication in lauter einfache Glieder auflösen.

δ) Das zusammengesetzte Glied $(a + b z^m + c z^n + \ldots)^r$ kann nach §. 33. entwickelt werden, und man erhält hier bekanntlich, wenn man die Entwickelung vornimmt, eine endliche Reihe von Gliedern, von welchen das erste eine von z unabhängige Größe ist, die folgenden aber alle die Form einfacher Glieder ganzer Functionen haben.

ε) Das zusammengesetzte Glied

$$(a + b z^m + c z^n + \ldots)^r (\alpha + \beta z^\mu + \gamma z^\nu + \ldots)^\varrho \ldots$$

läßt sich auflösen, indem man jeden Factor nach §. 33. entwickelt, durch welche Entwickelung dieses Glied die Form in Nro. γ erhält, aus der alsdann die einfachen Glieder entspringen, wenn man alle Factoren gehörig in einander multiplicirt.

Auf ähnliche Art können alle übrigen zusammengesetzten Glieder, die man sich noch vorstellen mag, in einfache Glieder aufgelöst werden.

§. 35.

1) "Statt der Form

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$$

"kann man auch die umgekehrte

$$Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + Kz^{n-3} + \ldots + Dz^3 + Cz^2 + Bz + A$$

"setzen."

Es ist bekanntlich bey einer jeden aus mehreren positiven und negativen Größen zusammengesetzten Größe einerley, in welcher Ordnung dieselben Größen unter einander in Verbindung gesetzt werden mögen.

2) "Ferner kann man auch statt der beyden obigen Formen diese setzen:

$$"A \left[1 + \frac{B}{A} z + \frac{C}{A} z^2 + \frac{D}{A} z^3 + \ldots + \frac{K}{A} z^{n-3} + \frac{L}{A} z^{n-2} + \frac{M}{A} z^{n-1} + \frac{N}{A} z^n\right]$$

$$"\text{und } N \left[z^n + \frac{M}{N} z^{n-1} + \frac{L}{N} z^{n-2} + \frac{K}{A} z^{n-3} + \ldots + \frac{D}{N} z^3 + \frac{C}{N} z^2 + \frac{B}{N} z + \frac{A}{N}\right]$$

§. 36.

"Diejenige Form, auf welche sich **alle** Functionen einer gewissen Art ohne Ausnah-"me zurückführen lassen, nennt man die **allgemeine Form** der Functionen dieser Art."

Da sich nach §. 35. und 36. **alle ganzen** Functionen auf eine der in §. 36. angegebenen Formen zurückführen lassen; so sind jene Formen **allgemeine Formen ganzer** Functionen.

§. 37.

"Wenn eine **ganze** Function auf eine der allgemeinen Formen (§. 35.) zurückgeführt "worden ist; so sagt man: die Function sey **geordnet**. Die **geordneten ganzen** Fun-"ctionen benennt man nach dem höchsten Grade, in welchem die absolut veränderliche Grös-"se z in ihnen vorkommt."

Die Functionen in §. 35. z. E. sind Functionen vom nten Grade, und es muß also die Function $z^4 + z^3 - 7z^2 - z + 6$ oder $6 - z - 7z^2 + z^3 + z^4$ eine Function vom **vierten** Grade, die Function $z + \alpha$ aber muß eine Function vom **ersten** Grade genennt werden.

§. 38.

"Was von der Gattung gilt, das muß auch von den unter die Gattung gehörigen "Arten gelten."

Wenn wir also eine Function Z, welche, unter gewissen Voraussetzungen betrachtet, eine **allgemeine Form** (§. 36.) mehrerer Functionen ist, zum Grunde legen und von derselben, indem wir sie noch unter denselben Voraussetzungen betrachten, gewisse Eigenschaften lehren und beweisen; so müssen dieselben Eigenschaften auch **allen** denjenigen Functionen zukommen, von welchen Z die **allgemeine** Form ist.

Was demnach in der Folge von den allgemeinen Formen der **ganzen** Functionen (§. 35.) erwiesen wird, eben das muß auch von **allen** darunter enthaltenen **ganzen** Functionen gültig seyn.

§. 39.

"Unter den unzähligen verschiedenen **reellen** oder **imaginären** Werthen, welche die "absolut veränderliche Größe z einer Function Z haben kann, soll derjenige **reelle** oder

"**ima-**

"**imaginäre** Werth $\frac{a}{\alpha}$ der Größe z, welcher der Function z den Werth $= 0$ giebt, wenn "man ihn überall in derselben statt z setzt, die **Wurzel** der Function genannt werden."

Durch die Bezeichnung $\frac{a}{\alpha}$ soll nicht etwa angedeutet werden, daß die Wurzel jedesmal ein Bruch sey, sondern es wird blos diese Bezeichnung gebraucht, weil sie für die Folge bequem ist. Für $\alpha = 1$ wird der Werth $\frac{a}{\alpha}$ allemal eine ganze Zahl.

Folgende Function $z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6$ oder $6 + z - 5z^2 + z^3 + z^4$ hat vier Wurzeln, denn sie wird für $z = \sqrt{-1}$; $z = -\sqrt{-1}$; $z = 2$ und $z = -3$ allemal $= 0$.

§. 40.

"Wenn in einer ganzen Function Z
"$= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$
"nicht ein jeder Coefficient $= 0$ ist, so daß nach §. 20. die Function Z für einen jeden "beliebigen Werth von z den Werth $= 0$ erhalten muß, sondern wenn alle, oder doch et"liche der Coefficienten wirkliche Größen sind, und also die Function für bestimmte Wer"the von z auch verschiedene bestimmte Werthe erhalten kann; so giebt es unter der un"zählbaren Menge solcher bestimmten Werthe von z gewiß wenigstens **einen reellen** oder "**imaginären** Werth $\frac{a}{\alpha}$, für welchen die Function $Z = 0$ wird."

Man kann die Function Z unbeschadet ihres Werthes allemal auch auf folgende Art ausdrücken:

$$N\left[z^n + \frac{M}{N}z^{n-1} + \frac{L}{N}z^{n-2} + \ldots + \frac{D}{N}z^3 + \frac{C}{N}z^2 + \frac{B}{N}z + \frac{A}{N}\right]$$

(§. 36.) Setzt man nun den Factor

$$z^n + \frac{M}{N}z^{n-1} + \frac{L}{N}z^{n-2} + \ldots + \frac{D}{N}z^3 + \frac{C}{N}z^2 + \frac{B}{N}z + \frac{A}{N} = 0;$$

so hat man eine regulirte Gleichung vom nten Grade, und für diese giebt es gewiß einen Werth von z, welcher ihr ein Genüge leistet. Giebt es aber einen Werth von z, für welchen dieser Factor der vorgegebenen Function Z den Werth $= 0$ erhalten muß; so giebt es auch einen Werth von z, für welchen die Function Z den Werth $= 0$ erhalten kann,

denn

denn eben der Werth, für welchen der Factor = o wird, ist auch zugleich der, für welchen das Product

$$N\left[z^n + \frac{M}{N}z^{n-1} + \frac{L}{N}z^{n-2} + \ldots + \frac{D}{N}z^3 + \frac{C}{N}z^2 + \frac{B}{N}z + \frac{A}{N}\right]$$

das heißt: die Function

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$$

den Werth = o erhalten muß. Es hat also eine jede ganze Function Z von z wenigstens **eine** Wurzel.

§. 41.

"Man nehme eine ganze Function Z vom nten Grade, welche die Form

$$"A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$$

"hat, und dividire sie durch eine ähnliche Function vom **ersten** Grade, welche $a - \alpha z$ "heißen soll. Hierdurch wird man einen Quotienten Z' erhalten, und dieser wird, wenn "man die Größen a und α so nimmt, daß $\frac{a}{\alpha}$ eine **reelle** oder **imaginäre** Wurzel von "Z ist, allemal eine **ganze** der Function Z ähnliche Function vom $(n - 1)$sten Grade "seyn, deren Form, wenn man die Coefficienten derselben einstweilen unbestimmt annimmt, "und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \ldots$ nennt, folgende ist:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n$$

1) Daß der Quotient $\frac{Z}{a - \alpha z}$ eine Function Z' von der Form

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n + \mathfrak{P}z^{n+1} + \mathfrak{Q}z^{n+2} + \ldots$$

werden muß, es mögen die Größen a und α, welche von z ganz unabhängig seyn sollen, was immer für einen beliebigen Werth haben, dieß erhellet schon aus der Art, wie die Division des Divisors $a - \alpha z$ in die Function Z nach den bekannten Divisionsregeln vorgenommen werden muß, wenn man dieselbe wirklich vornehmen will. Daß aber der Quotient eine ganze Function vom $(n - 1)$sten Grade werden und folglich nur n Glieder erhalten muß, sobald die Größen a und α von der Art sind, daß $\frac{a}{\alpha}$ eine Wurzel von Z seyn kann, dieß ergiebt sich aus der Betrachtung der Formen der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \ldots$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \ldots$, welche man bey der Bestimmung derselben erhält. Wir wollen also diese Bestimmung der Coefficienten hier vornehmen.

2) Es kann dieselbe auf zweyerley Art geschehen. Man kann nehmlich die Division des Divisors $a - \alpha z$ in die Function Z wirklich vornehmen, und von den Formen etlicher hierdurch erhaltener Coefficienten auf das Gesetz der Erzeugung aller übrigen schließen;



sen; man kann aber auch die Methode der unbestimmten Coefficienten anwenden. Letzteres wollen wir hier thun.

a) Wenn für einen **jeden** Werth von z der Quotient

$$\frac{a}{a-\alpha z} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n + \mathfrak{P}z^{n+1} + \ldots$$

ist; so muß auch für einen **jeden** Werth von z die Gleichung

$$Z = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n + \mathfrak{P}z^{n+1} + \ldots)(a-\alpha z)$$

Statt haben, d. h. es muß für alle denkbaren Werthe von z die Function

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$$

der Function

$$\left.\begin{matrix}a\mathfrak{A}\\-\alpha\mathfrak{A}\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}a\mathfrak{B}\\-\alpha\mathfrak{B}\end{matrix}\right\}z + \left.\begin{matrix}a\mathfrak{C}\\-\alpha\mathfrak{C}\end{matrix}\right\}z^2 + a\mathfrak{D}z^3 + \ldots + \left.\begin{matrix}a\mathfrak{L}\\-\alpha\mathfrak{K}\end{matrix}\right\}z^{n-2} + \left.\begin{matrix}a\mathfrak{M}\\-\alpha\mathfrak{L}\end{matrix}\right\}z^{n-1} + \left.\begin{matrix}a\mathfrak{N}\\-\alpha\mathfrak{M}\end{matrix}\right\}z^n + \left.\begin{matrix}a\mathfrak{P}\\-\alpha\mathfrak{N}\end{matrix}\right\}z^{n+1} + \ldots$$

gleich seyn.

b) Da diese beyden Functionen, in welchen die Coefficienten von z ganz unabhängig seyn sollen, nur alsdann für alle Werthe von z einander gleich seyn können, wenn die in beyden Functionen bey einerley Potenzen von z stehenden Coefficienten einander gleich sind (§. 21.), die Gleichheit beyder Functionen aber wirklich verlangt wird; so ergeben sich folgende Coefficientengleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}
a\mathfrak{A} = A\\
a\mathfrak{B} - \alpha\mathfrak{A} = B\\
a\mathfrak{C} - \alpha\mathfrak{B} = C\\
a\mathfrak{D} - \alpha\mathfrak{C} = D\\
— \; — \; — \; —\\
a\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{K} = L\\
a\mathfrak{M} - \alpha\mathfrak{L} = M\\
a\mathfrak{N} - \alpha\mathfrak{M} = N\\
a\mathfrak{P} - \alpha\mathfrak{N} = o
\end{array}\right\} \text{Hieraus folgt:} \left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{A} = \frac{A}{a}\\
\mathfrak{B} = \frac{B+\alpha\mathfrak{A}}{a} = \frac{B}{a} + \frac{\alpha A}{a^2}\\
\mathfrak{C} = \frac{C+\alpha\mathfrak{B}}{a} = \frac{C}{a} + \frac{\alpha B}{a^2} + \frac{\alpha^2 A}{a^3}\\
\mathfrak{D} = \frac{D+\alpha\mathfrak{C}}{a} = \frac{D}{a} + \frac{\alpha C}{a^2} + \frac{\alpha^2 B}{a^3} + \frac{\alpha^3 A}{a^4}\\
— \; — \; — \; — \; — \; — \; — \; — \; — \; — \; —\\
\mathfrak{L} = \frac{L+\alpha\mathfrak{K}}{a} = \frac{L}{a} + \frac{\alpha\mathfrak{K}}{a}\\
\mathfrak{M} = \frac{M+\alpha\mathfrak{L}}{a} = \frac{M}{a} + \frac{\alpha L}{a^2} + \frac{\alpha^2\mathfrak{K}}{a^3}\\
\mathfrak{N} = \frac{N+\alpha\mathfrak{M}}{a} = \frac{N}{a} + \frac{\alpha M}{a^2} + \frac{\alpha^2 L}{a^3} + \frac{\alpha^3\mathfrak{K}}{a^4}\\
\mathfrak{P} = \frac{o+\alpha\mathfrak{N}}{a} = \frac{\alpha N}{a^2} + \frac{\alpha^2 M}{a^3} + \frac{\alpha^3 L}{a^4} + \frac{\alpha^4\mathfrak{K}}{a^5}
\end{array}\right.$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

c) Hier sind nun die ersten Coefficienten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 des Quotienten $\frac{z}{a - \alpha z}$ vollständig durch die Größen a und α, und durch die Coefficienten A, B, C, D der Function Z bestimmt, und das Gesetz der Formirung derselben fällt ohne weitere Erläuterung in die Augen. Wäre dasselbe allgemeingültig; so müßte die Gleichung für den nten Coefficienten 𝔐, welche diese war

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{a} + \frac{\alpha L}{a^2} + \frac{\alpha^2 \mathfrak{K}}{a^3},$$

vollständig ausgedrückt diese seyn:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{a} + \frac{\alpha L}{a^2} + \frac{\alpha^2 K}{a^3} + \frac{\alpha^3 I}{a^4} + \ldots + \frac{\alpha^{n-3}. C}{a^{n-2}} + \frac{\alpha^{n-2}. B}{a^{n-1}} + \frac{\alpha^{n-1}. A}{a^n}$$

d) Wir wollen einstweilen hypothetisch annehmen, es sey der Ausdruck für den nten Coefficienten richtig, und wollen daraus den (n + 1)sten Coefficienten suchen. Es war in Nro. b

$$\mathfrak{N} = \frac{N}{a} + \frac{\alpha \mathfrak{M}}{a}$$

setzen wir nun in diese Gleichung den Ausdruck für 𝔐; so erhalten wir

$$\mathfrak{N} = \frac{N}{a} + \frac{\alpha M}{a^2} + \frac{\alpha^2 L}{a^3} + \frac{\alpha^3 K}{a^4} + \frac{\alpha^4. I}{a^5} + \ldots + \frac{\alpha^{n-2}. C}{a^{n-1}} + \frac{\alpha^{n-1}. B}{a^n} + \frac{\alpha^n. A}{a^{n+1}}$$

e) Aus diesem Ausdrucke für den (n + 1)sten Coefficienten sehen wir, daß das von den ersteren Coefficienten B, C, D abgenommene Formirungsgesetz gewiß jedesmal von einen zunächstfolgenden Coefficienten gelten muß, sobald es von dem ihm zunächstvorhergegangenen gilt. Nun gilt es aber, wie wir aus der Berechnung der ersteren Coefficienten wissen, von dem 4ten Coefficienten wirklich, folglich muß es auch von dem 5ten und eben darum wieder von dem 6ten, 7ten, 8ten rc. Coefficienten gelten d. h. es muß allgemeingültig seyn. Also ist wirklich der (n + 1)ste Coefficient

$$\mathfrak{N} = \frac{N}{a} + \frac{\alpha M}{a^2} + \frac{\alpha^2 L}{a^3} + \frac{\alpha^3 K}{a^4} + \ldots + \frac{\alpha^{n-2}. C}{a^{n-1}} + \frac{\alpha^{n-1}. B}{a^n} + \frac{\alpha^n. A}{a^{n+1}}.$$

3) Wenn wir diese Gleichung mit $\frac{a^{n+1}}{\alpha^n}$ auf beyden Seiten multipliciren; so erhalten wir folgende:

$$\frac{a^{n+1}}{\alpha^n}\,\mathfrak{N} = N\left(\frac{a}{\alpha}\right)^n + M\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n-1} + L\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n-2} K\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n-3} + \ldots + C\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + B\left(\frac{a}{\alpha}\right) + A$$

Vergleichen wir hier den Ausdruck für $\frac{a^{n+1}}{\alpha^n}$. $\mathfrak{N}$ mit der Function Z; so sehen wir, daß er eine der Function Z **ähnliche** Function von $\frac{a}{\alpha}$ ist. Wird nun $\frac{a}{\alpha}$ so groß genommen, als z genommen werden muß, damit Z = o werde; so muß für diesen Werth von $\frac{a}{\alpha}$ nothwendig der Ausdruck für $\frac{a^{n+1}}{\alpha^n}$. $\mathfrak{N}$ = o werden. Wenn aber der Ausdruck für $\frac{a^{n+1}}{\alpha^n}$. $\mathfrak{N}$ den Werth = o erhalten muß, im Falle $\frac{a}{\alpha}$ eine Wurzel der Gleichung Z ist; so muß auch für eben diesen Werth von $\frac{a}{\alpha}$ der (n + 1)ste Coefficient $\mathfrak{N}$ = o werden, denn es ist

$$\mathfrak{N} = \frac{N\left(\frac{a}{\alpha}\right)^n + M\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n-1} + L\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n-2} + \ldots + C\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + B\left(\frac{a}{\alpha}\right) + A}{\frac{a^{n+1}}{\alpha^n}}$$

4) Es hat also gewiß allemal der (n + 1)ste Coefficient $\mathfrak{N}$ im Quotienten $\frac{Z}{a - \alpha z}$ den Werth = o, wenn die Größen a und α so genommen sind, daß $\frac{a}{\alpha}$ eine Wurzel der Gleichung Z seyn kann. Ist aber $\mathfrak{N}$ = o; so ist auch $\mathfrak{P} = \frac{a}{\alpha}\,\mathfrak{N}$, und ebenso ein jeder der folgenden Coefficienten $\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S} \ldots = o$; hingegen kann keiner der dem (n + 1)sten Coefficienten $\mathfrak{N}$ vorausgehenden Coefficienten aus dem Grunde = o werden, weil $\mathfrak{N}$ = o ist. Hieraus ergiebt sich nun, daß sich die Reihe der Glieder des Quotienten $\frac{Z}{a - \alpha z}$ $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n + \mathfrak{P}z^{n+1} + \ldots$ bey dem nten Gliede schließt, und daß also der Quotient $\frac{Z}{a - \alpha z}$ eine ganze Function Z′ vom (n — 1)sten Grade und von der Form

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1}$$

seyn muß, wenn $\frac{a}{\alpha}$ eine Wurzel von Z ist. Dieses aber war die Behauptung des aufgestellten Lehrsatzes.

§. 42.

§. 42.

1) Eine **jede ganze** Function Z hat nach §. 40. gewiß **eine** reelle oder imaginäre Wurzel $\frac{a}{\alpha}$; also giebt es auch gewiß für eine **jede ganze** Function Z vom nten Grade und von der Form

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$$

einen Divisor $a - \alpha z$, durch welchen man, wenn er in diese Function dividirt wird, eine der Function Z **ähnliche** Function Z′ vom (n — 1)sten Grade als Quotienten erhält, und der also ein Factor von Z ist.

2) Eine **jede ganze** Function Z vom nten Grade und von der Form

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$$

ist mithin ein Product aus zwey Factoren, von denen der **eine** eine **ganze** Function Z′ vom (n — 1)sten Grade und von der Form

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots\ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1},$$

der **andere** aber eine **ganze** Function vom ersten Grade und von der Form $a - \alpha z$ ist, und in dem die Größen a und α so groß seyn müssen, daß $\frac{a}{\alpha}$ eine Wurzel von Z seyn kann.

3) Weil der Quotient Z′ eine **ganze** Function vom (n — 1)sten Grade ist; so muß, wenn dieser Function Z′ ihre Wurzel $\frac{b}{\beta}$ heißt, und wenn daraus der Divisor $b - \beta z$ geformt und in die Function Z′ dividirt wird, eine **ganze** und also der Function Z′ **ähnliche** Function Z″ vom (n — 2)ten Grade als Quotient erhalten werden. Daraus muß man ferner, wenn dieser Function Z″ ihre Wurzel $= \frac{c}{\gamma}$ ist, und der Divisor $c - \gamma z$ in diese Function dividirt wird, einen Quotienten Z‴ erhalten, welcher abermals einen Factor hat, durch welchen er ohne Rest dividirt werden kann. Man sieht leicht ein, daß, wenn man nur die Wurzel eines jeden durch Division erhaltenen Quotienten anzugeben weiß, die Division so lange fortgesetzt werden kann, bis man auf einen Quotienten kommt, der eine Function vom (n — (n — 1))sten, d. h. vom ersten Grade ist, und welcher durch $Z^{(n-1)}$ bezeichnet werden soll. Dieser letzte Quotient muß als eine ganze Function vom ersten Grade nothwendig die Form $m + \mu z$ haben, wofür wir auch $m - \mu z$ schreiben können,

nen, weil die Zeichen zwischen den Gliedern der allgemeinen Ausdrücke der Functionen keine Bestimmungszeichen der Glieder, sondern bloße Verbindungszeichen derselben sind.

Also lassen sich aus einer ganzen Function Z vom nten Grade allemal durch Division $(n-1)$ Functionen Z'; Z''; Z'''; ....; $Z^{(n-1)}$ ableiten, wenn man von der Function Z und von einer jeden der Functionen Z', Z'', Z'''.... eine Wurzel anzugeben weiß. Eine jede der abgeleiteten Functionen aber ist eine ganze und also der Function Z ähnliche Function, und um einen Grad niedriger, als die ihr zunächst vorhergehende.

4) Wenn man die Wurzeln der Functionen Z; Z'; Z''; Z'''; Z''''; Z^{V} ...; $Z^{(n-2)}$ der Ordnung nach $\frac{a}{\alpha}$; $\frac{b}{\beta}$; $\frac{c}{\gamma}$; $\frac{d}{\delta}$; $\frac{e}{\varepsilon}$; $\frac{f}{\zeta}$ ...; $\frac{n}{\nu}$ nennt, und den letzten Quotienten $Z^{(n-1)} = m - \mu z$ setzt (Nro. 3.); so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Z}{a-\alpha z} &= Z' \\
\frac{Z'}{b-\beta z} &= Z'' \\
\frac{Z''}{c-\gamma z} &= Z''' \\
\frac{Z'''}{d-\delta z} &= Z'''' \\
\frac{Z''''}{e-\varepsilon z} &= Z^{V} \\
&\text{— — — — —} \\
&\text{— — — — —} \\
\frac{Z^{(n-2)}}{n-\nu z} &= m-\mu z
\end{aligned}\right\}$$

und hieraus folgt:

$$\left\{\begin{aligned}
Z &= Z'\,(a-\alpha z) \\
Z' &= Z''\,(b-\beta z) \\
Z'' &= Z'''\,(c-\gamma z) \\
Z''' &= Z''''\,(d-\delta z) \\
Z'''' &= Z^{V}\,(e-\varepsilon z) \\
&\text{— — — — — —} \\
&\text{— — — — — —} \\
Z^{(n-2)} &(n-\nu z)\,(m-\mu z)
\end{aligned}\right.$$

Setzt man nun in den Ausdruck $Z'(a-\alpha z)$ den Werth von Z', dann wieder den Werth von Z'' u. s. w.; so erhält man

$$Z = (a-\alpha z)\,(b-\beta z)\,(c-\gamma z)\,(d-\delta z)\,(e-\varepsilon z)\ldots(n-\nu z)\,(m-\mu z)$$

Es läßt sich also eine jede ganze Function z von der Form $A + Bz + Cz^2 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n$ als ein Product aus mehreren Factoren vorstellen, welche die Form

$a - \alpha z$ haben. Die Anzahl dieser Factoren aber muß allemal der Anzahl der Einheiten, welche der Gradexponent n enthält, gleich seyn. Von den $n - 1$ Functionen Z', Z'', Z''' rc. nehmlich, die sich nach Nro. 3. aus der Function Z ableiten lassen, ist die $(n-1)$te $= (m - \mu z)$ schon ein solcher Factor, die $n - 2$ übrigen Functionen aber geben $n - 2$ solche Factoren, und die Function Z giebt selbst einen; es ist also die Anzahl derselben $= 1 + n - 2 + 1 = n$.

6) Die in Nro. 4. angegebene Gleichung

$$Z = (a - \alpha z)(b - \beta z)(c - \gamma z)(d - \delta z) \ldots (n - \nu z)(m - \mu z)$$

läßt sich noch auf andere Art ausdrücken.

a) Weil $(a - \alpha z) = \left(\frac{a}{\alpha} - z\right)\alpha$, $(b - \beta z) = \left(\frac{b}{\beta} - z\right)\beta$ rc. ist; so kann man auch statt der vorigen Gleichung diese setzen:

$$Z = \left(\frac{a}{\alpha} - z\right)\left(\frac{b}{\beta} - z\right)\left(\frac{c}{\gamma} - z\right)\left(\frac{d}{\delta} - z\right) \ldots \left(\frac{n}{\nu} - z\right)\left(\frac{m}{\mu} - z\right)\alpha . \beta . \gamma \ldots \mu . \nu.$$

b) Weil ferner $(a - \alpha z) = (-\alpha z + a)$; $(b - \beta z) = (-\beta z + b)$ rc. ist; so kann man auch setzen:

$$Z = (-\alpha z + a)(-\beta z + b)(-\gamma z + c)(-\delta z + d) \ldots (-\nu z + n)(-\mu z + m)$$

oder

$$Z = \left(-z + \frac{a}{\alpha}\right)\left(-z + \frac{b}{\beta}\right)\left(-z + \frac{c}{\gamma}\right)\left(-z + \frac{d}{\delta}\right) \ldots \left(-z + \frac{n}{\nu}\right)$$

$$\left(-z + \frac{m}{\mu}\right) . \alpha . \beta . \gamma \ldots \nu . \mu.$$

Wenn man die Factoren so ausgedrückt unter einander multiplicirt, so ergiebt sich Z in der umgekehrten Form $Z = Nz^n + Mz^{n-1} + \ldots + Dz^3 + Cz^2 + Bz + A$ und alle Glieder müssen noch dieselben Zeichen (+) oder (—) vor sich haben, welche in der Form $Z = A + Bz + Cz + Dz^3 + \ldots Mz^{n-1} + Nz^n$ vor ihnen standen.

c) Wenn die Größen $(-\alpha z + a)$; $(-\beta z + b)$; $(-\gamma z + c)$ rc. Factoren von Z sind; so müssen auch dieselben nach Factoren von Z bleiben, wenn man sie alle negativ nimmt und also

statt

statt $(-\alpha z + a)$ setzt: $-(-\alpha z + a) = (\alpha z - a)$
" $(-\beta z + b)$ " $-(-\beta z + b) = (\beta z - b)$
" $(-\gamma z + c)$ " $-(-\gamma z + c) = (\gamma z - c)$
u. s. w.

Daher kann man statt der vorigen Gleichungen auch setzen:

$\mathfrak{Z} = (\alpha z - a)\ (\beta z - b)\ (\gamma z - c)\ (\delta z - d) \ldots (\nu z - n)\ (\mu z - m)$ oder

$$\mathfrak{Z} = \left(z - \frac{a}{\alpha}\right)\left(z - \frac{b}{\beta}\right)\left(z - \frac{c}{\gamma}\right)\left(z - \frac{d}{\delta}\right) \ldots \left(z - \frac{n}{\nu}\right)\left(z - \frac{m}{\mu}\right)\alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu.$$

Man hat aber hier zu merken, daß, im Falle man die so gestellten Factoren von $\mathfrak{Z}$ in einander multiplicirt, vor die Glieder des Products nur alsdann eben die Zeichen (+) oder (−) zu stehen kommen, welche sie in der Form $Z = A + Bz + Cz^2 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n$ vor sich hatten, wenn die Anzahl der Factoren **gerad** ist; ist sie **ungerad**, so erhalten alle Glieder des Productes $\mathfrak{Z}$ gerade die entgegengesetzten Zeichen.

d) Wenn die Wurzeln $\frac{a}{\alpha}$; $\frac{b}{\beta}$; $\frac{c}{\gamma}$ ꝛc. alle ganze Zahlen und folglich die Nenner α, β, γ ꝛc. $= 1$ sind; so ist

$Z = (a - z)\ (b - z)\ (c - z)\ (d - z) \ldots (n - z)\ (m - z)$ und

$\mathfrak{Z} = (z - a)\ (z - b)\ (z - c)\ (z - d) \ldots (z - n)\ (z - m)$.

6) Ein Product muß den Werth $= 0$ erhalten; sobald irgend ein Factor in demselben $= 0$ wird, und es muß eben so vielmal $= 0$ werden können, als wie viele Factoren in demselben vorkommen, welche dieses Werthes fähig sind. Nun ist aber nach den bisherigen Lehren eine jede ganze Function Z von z einem Producte

$$\left(\frac{a}{\alpha} - z\right)\left(\frac{b}{\beta} - z\right)\left(\frac{c}{\gamma} - z\right)\left(\frac{d}{\delta} - z\right) \ldots \left(\frac{n}{\nu} - z\right)\left(\frac{m}{\mu} - z\right)\alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu$$

gleich, in welchem n veränderliche Factoren vorkommen, deren jeder $= 0$ werden kann, es erhält nehmlich der erste Factor für $z = \frac{a}{\alpha}$, der zweyte für $z = \frac{b}{\beta}$ ꝛc. den Werth $= 0$; also kann eine jede ganze Function Z von z $n$mal den Werth $= 0$ erhalten für n Werthe von z. Da nun ein jeder Werth von z, für welchen eine Function Z den

 Werth

Werth = o erhält, eine Wurzel von Z heißt; so giebt es bey einer jeden ganzen Function Z von z gerade so viele Wurzeln, als wie viel ihr Gradexponent Einheiten erhält. Auch sieht man, daß die Wurzeln $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, $\frac{d}{\delta}$ ꝛc. der aus Z abgeleiteten Function Z′, Z″, Z‴ zugleich die Wurzeln der Function Z sind.

§. 43.

"Wenn in einer **ganzen** Function Z vom nten Grade das absolute Glied fehlt und "vielleicht außer diesem auch noch mehrere von den andern Gliedern, die dem absoluten "Gliede zunächst nachfolgen oder, im Falle die Function umgekehrt geschrieben wäre, vor- "ausgehen müßten, nicht vorhanden sind, und das Glied, welches die niedrigste Potenz "von z enthält, $G z^r$ genannt wird; so läßt sich die Function in ein Product aus zwey "Factoren verwandeln, von welchen der eine Factor eine **ganze** Function vom (n—r)ten "Grade ist, deren absolutes Glied = G, der andere Factor aber = z^r seyn muß.

1) Es sey die Function Z diese:

$$G z^r + H z^{r+1} + I z^{r+2} + \ldots + L z^{n-2} + M z^{n-1} + N z^n$$

Trennt man nun von allen diesen Gliedern den Factor z^r; so erhält man

$$(G + H z + I z^2 + \ldots + L z^{n-r-2} + M z^{n-r-1} + N z^{n-r})\, z^r$$

2) Es ist leicht einzusehen, daß man eben dieses mit der umgekehrt geschriebenen Function vornehmen kann.

§. 44.

Der im vorigen § erwähnte Factor

$$G + H z + I z^2 + \ldots + L z^{n-r-2} + M z^{n-r-1} + N z^{n-r}$$

hat als eine **ganze** Function vom (n—r)ten Grade (n—r) veränderliche Factoren von der Form $a - \alpha z$ oder $\alpha z - a$ und also auch (n—r) Wurzeln (§. 42.). Da nun die Function Z

$$= G z^r + H z^{r+1} + I z^{r+2} + \ldots + L z^{n-2} + M z^{n-1} + N z$$

$$= (G + H z + I z^2 + \ldots + L z^{n-r-2} + M z^{n-r-1} + N z^{n-r})\, z^r$$

gewiß nur für soviele Werthe von z, welche wirkliche Größen sind, den Werth = o erhalten kann, als für wieviele solcher Werthe der Factor

G +

$$G + Hz + Iz^2 + \ldots + Lz^{n-r-2} + Mz^{n-r-1} + Nz^{n-r}$$

den Werth = o erhält; so ergiebt sich folgender Satz:

"Eine jede ganze Function Z oder Ȝ vom nten Grade, in welcher von dem abso-"luten Gliede A an bis zu irgend einem Gliede $\mathfrak{G} z^r$ alle Glieder = o sind, hat "nur (n—r) veränderliche Factoren von der Form $\alpha z - a$ oder $a - \alpha z$, aber außer "diesen noch r Factoren von welchen ein jeder = z ist, und die Anzahl der Wurzeln "einer solchen Function ist auch nur = (n—r).

Wenn man also die (n — r) Wurzeln einer solchen Function $\frac{a}{\alpha}$; $\frac{b}{\beta}$; $\frac{c}{\gamma}$ . . ; . . . . ; $\frac{m}{\mu}$ nennt; so ist

$$Z = (a - \alpha z)\,(b - \beta z)\,(c - \gamma z) \ldots\ldots (m - \mu z)\, z^r, \text{ oder auch}$$

$$= \left(\frac{a}{\alpha} - z\right)\left(\frac{b}{\beta} - z\right)\left(\frac{c}{\gamma} - z\right) \ldots \left(\frac{m}{\mu} - z\right).\, z^r.\, \alpha\, \beta\, \gamma \ldots \mu$$

Nimmt man die umgekehrte Form; so erhält man

$$Ȝ = (\alpha z - a)\,(\beta z - b)\,(\gamma z - c) \ldots\ldots\ldots (\mu z - m)\, z^r, \text{ oder auch}$$

$$= \left(z - \frac{a}{\alpha}\right)\left(z - \frac{b}{\beta}\right)\left(z - \frac{c}{\gamma}\right) \ldots \left(z - \frac{m}{\mu}\right) z^r.\, \alpha.\, \beta.\, \gamma \ldots \mu$$

§. 45.

"Der Coefficient N der höchsten Potenz einer in der Form Z oder Ȝ vorgegebenen "ganzen Function, deren Wurzeln $\frac{a}{\alpha}$; $\frac{b}{\beta}$; $\frac{c}{\gamma}$ . . . ; $\frac{n}{\nu}$; $\frac{m}{\mu}$ sind, muß allemal dem Pro-"ducte $\alpha.\ \beta.\ \gamma \ldots\ldots \nu.\ \mu$ aus den Nennern dieser Wurzeln gleich seyn."

Man setze, es sey die ganze Function Z

$$= Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + \ldots + Dz^3 + Cz + Bz + A.$$

Wenn $\frac{a}{\alpha}$; $\frac{b}{\beta}$; $\frac{c}{\gamma}$. . . ; $\frac{n}{\nu}$; $\frac{m}{\mu}$ Wurzeln dieser Function sind; so muß nach den vorhergehenden Lehren die nachstehende Gleichung

$$Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + \ldots\ldots + Cz^2 + Bz + A$$

$$= \left(z - \frac{a}{\alpha}\right)\left(z - \frac{b}{\beta}\right)\left(z - \frac{c}{\gamma}\right) \ldots \left(z - \frac{n}{\nu}\right)\left(z - \frac{m}{\mu}\right).\ \alpha.\ \beta.\ \gamma \ldots\ldots \nu.\ \mu$$

richtig seyn, und zwar für alle nur immer denkbaren Werthe von z. Man stelle sich nun die Factoren $(z - \frac{a}{\alpha})$; $(z - \frac{b}{\beta}) \ldots$; $(z - \frac{m}{\mu})$ in einander multiplicirt vor; das Product derselben muß, weil n solcher Factoren vorhanden sind, ganz gewiß die nachstehende Form

$$z^n + m z^{n-1} + l z^{n-2} + \ldots + c z^2 + b z + a$$

haben, und man kann demnach die vorige Gleichung auch so ausdrücken:

$$N z^n + M z^{n-1} + L z^{n-2} + \ldots + C z^2 + B z + A$$
$$= \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu. z^n + \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu.\, m z^{n-1} + \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu.\, l z^{n-2} + \ldots$$
$$+ \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu.\, c z^2 + \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu.\, b z + \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu.\, a$$

Da nun diese Gleichung für einen jeden Werth von z richtig seyn muß, dieß aber nur unter der Bedingung möglich ist, wenn die in einerley Potenzen von z multiplicirten Coefficienten gleich sind (§. 21.): so muß

$$N = \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.\mu \text{ seyn.}$$

§. 46.

Die veränderlichen Factoren von der Form $a - \alpha z$ oder $\alpha z - a$ einer ganzen Function Z enthalten nur die erste Potestät von z und sind daher Functionen vom ersten Grade. Man nennt sie **einfache** Factoren, und unterscheidet sie von denjenigen Factoren der ganzen Function, welche höhere Potestäten von z enthalten, also Functionen von höherem Grade sind und eben daher auch **zusammengesetzte** Factoren genannt werden, weil sie sich als Producte aus **einfachen** Factoren darstellen lassen müssen. Solche **zusammengesetzte** Factoren z. E. sind jene aus Z nach §. 42. abgeleiteten Functionen Z', Z'', Z''' ꝛc. und sie entstehen auch, wenn man mehrere **einfache** Factoren von Z in einander multiplicirt.

Die **einfachen** Factoren entspringen aus den Wurzeln der Functionen, und diese können, wie wir wissen, **reell** oder **imaginär** seyn; Daher werden die aus den **reellen** Wurzeln entspringenden **einfachen** Factoren **reelle** Factoren genannt und hierdurch von denen unterschieden, welche aus den **imaginären** Wurzeln entspringen und daher **imaginäre** Factoren heißen.

Die

Die **zusammengesetzten** Factoren, welche ebenfalls **reell** oder **imaginär** seyn können, theilt man in **doppelte, dreyfache, vierfache** &c. Factoren ein, je nachdem in ihnen **zwey, drey, vier** &c. **einfache** Factoren enthalten sind. Sind die einfachen Factoren in ihnen gleich groß; so heißen die **doppelten** Factoren **quadratisch**, die **dreyfachen cubisch**, die **vierfachen biquadratisch**.

§. 47.

Den bisherigen Lehren wollen wir nun noch einige andere merkwürdige Lehrsätze über die Factoren der ganzen Functionen beyfügen, wir müssen aber, ehe wir mit denselben den Anfang machen können, erst einige Eigenschaften der ganzen Functionen in Beziehung auf ihre Wurzeln kennen lernen, weil sich jene Lehrsätze auf diese Eigenschaften gründen.

§. 48.

"Es sey Z eine ganze Function

$$= Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + Kz^{n-3} + \ldots + Cz^2 + Bz + A$$

"und a sey eine Wurzel dieser Function; ferner sey $\alpha > a$ so, daß $\frac{a}{\alpha}$ einen sehr kleinen Bruch $= \omega$ bedeutet. Wenn man die Wurzel a um ω vermehrt und vermindert "und die beyden hierdurch erhaltenen Größen $a + \omega$ und $a - \omega$ statt z in der Function "Z gebraucht; so werden die Werthe, welche Z hierdurch erhält, nicht beyde **bejaht** oder "beyde **verneint** seyn können, sondern es wird vielmehr allemal der eine **bejaht** und "der andere **verneint** seyn müssen."

1) Wenn man statt z die Größe $a + \omega$ in der Function Z gebraucht; so verwandelt sich Z in eine Function

$$Z' = N(a + \omega)^n + M(a + \omega)^{n-1} + L(a + \omega)^{n-2} + K(a + \omega)^{n-3} + \ldots$$
$$+ C(a + \omega)^2 + B(a + \omega) + A$$

Hierfür

Hierfür erhält man ferner durch Entwickelung der Potenzen von $a + \omega$

$$
Z' = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l}
Na^n + \frac{n}{1} Na^{n-1} & \omega + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} Na^{n-2} & \omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} . Na^{n-3} & \omega^3 + \ldots \\
+ Ma^{n-1} + \frac{n-1}{1} Ma^{n-2} & + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2} Ma^{n-3} & + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3} Ma^{n-4} & \\
+ La^{n-2} + \frac{n-2}{1} La^{n-3} & + \frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2} La^{n-4} & + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3} La^{n-5} & \\
+ Ka^{n-3} + \frac{n-3}{1} Ka^{n-4} & + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2} Ka^{n-5} & + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3} Ka^{n-6} & \\
+ - + - - - & + - - - - & + - - - - - & \\
+ - + - - - & + - - - - & + - - - - - & \\
+ Ca^2 + 2Ca & + C & & \\
+ Ba + B & & & \\
+ A & & &
\end{array} \right.
$$

2) Nennt man die erste Vertikalreihe F und die folgenden in die Potenzen von ω multiplicirten Vertikalreihen der Ordnung nach L', L'', L''' ...; so hat man kurz

$$Z' = F + L'\omega + L''\omega^2 + L'''\omega^3 + L''''\omega^4 + \ldots\ldots$$

Man sieht leicht ein, daß, weil n eine ganze Zahl ist, das letzte Glied in der ersten Horizontalreihe $= \omega^n$ seyn muß und daß zu diesem Gliede kein Glied mehr aus den folgenden Horizontalreihen gehören kann. Es ist also

$$Z' = F + L'\omega + L''\omega^2 + L'''\omega^3 + L''''\omega^4 + \ldots + \omega^n$$

3) Gebraucht man statt z die Größe $a - \omega$ in der Function Z; so erhält man

$$Z'' = F - L'\omega + L''\omega^2 - L'''\omega^3 + L''''\omega^4 - \ldots \pm \omega^n$$

4) Die erste Vertikalreihe ist, wie man sieht, die Function Z, in welcher statt z der Werth a steht. Da nun a eine Wurzel von Z seyn soll; so ist diese Reihe und also die Größe F in den Ausdrücken für Z' und $Z'' = 0$.

Setzt man jetzt $L'' + L'''\omega + L''''\omega^2 + \ldots + \omega^{n-2} = S$,
$L'' - L'''\omega + L''''\omega^2 - \ldots \pm \omega^{n-2} = s$;
so hat man $Z' = L'\omega + S\omega^2$ und $Z'' = -L'\omega + s\omega^2$

5) Eine



5) Eine jede von den Größen S und ſ enthält n — 2 Coefficienten L″, L‴, L⁗ ꝛc. Läßt man nun $\frac{a}{\alpha} = \omega$ einen ächten Bruch bedeuten, so wie es im Lehrsatze angenommen worden ist, und bezeichnet den größten unter den Coefficienten L″; L‴; L⁗ .... durch $L^{(r)}$; so ist gewiß die Größe

$$(n - 2)\, L^{(r)} \text{ nicht nur } > S, \text{ sondern auch } > ſ,$$

und es muß also auch, wenn man mit $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2$ oder ω^2 multiplicirt,

$$\omega^2 (n - 2)\, L^{(r)} > S\, \omega^2 \text{ und } \omega^2 (n - 2)\, L^{(r)} > ſ\, \omega^2$$

6) Man betrachte jetzt den Quotienten $\frac{L'}{(n - 2)\, L^{(r)}}$. Es sey derselbe so groß, oder so klein als er wolle, so kann man doch gewiß $\frac{a}{\alpha} = \omega$ einen solchen ächten Bruch seyn lassen, daß

$$\omega < \frac{L'}{(n - 2)\, L^{(r)}}$$

wird. Man nehme also an, es sey ω wirklich so genommen, dann muß auch

$$\omega^2 < \frac{L'\omega}{(n - 2)\, L^{(r)}} \text{ und folglich}$$

$$\omega^2 (n - 2)\, L^{(r)} < L'\omega \text{ seyn.}$$

7) Wenn aber $\frac{a}{\alpha} = \omega$ allemal als ein solcher ächter Bruch angenommen werden kann, daß

$$L'\omega > \omega^2\ (n - 2)\, L^{(r)} \text{ wird (Nro. 6.)},$$

und nach Nro. 5. die Größe $\omega^2\ (n - 2)\, L^{(r)}$ allemal noch größer als $S\,\omega^2$ und $ſ\,\omega^2$ ist, so bald nur ω irgend einen ächten Bruch bedeutet; so ist gewiß kein Zweifel, daß es ächte Brüche $\frac{a}{\alpha} = \omega$ giebt, für welche

$$L'\omega > S\,\omega^2 \text{ und } L'\omega > ſ\,\omega^2$$

seyn muß, es mögen die Größen L′, S, ſ was immer für Größen seyn.

8) Es bedeute nun $\frac{a}{\alpha} = \omega$ wirklich solche Brüche. Nimmt man an, daß für alle diese ächten Brüche die in Nro. 4. angegebene Größe, nehmlich

$$Z' = L'\omega + S\omega^2,$$

etwas **bejahtes** sey; so muß man auch annehmen daß $Z'' = - L'\omega + \mathfrak{f}\omega^2$ für eben diese ächten Brüche lauter **verneinte** Werthe erhalten müsse. Nimmt man aber an, daß für alle diese Brüche $Z' = L'\omega + S\omega^2$ etwas **verneintes** werde; so ist man auch genöthigt anzunehmen, daß alsdann für eben diese ächten Brüche $Z'' = - L'\omega + \mathfrak{f}\omega^2$ lauter **bejahte** Werthe erhalte. Sobald nehmlich Z' etwas **bejahtes** ist, so ist es auch $L'\omega$, wegen $L'\omega > S\omega^2$, und es muß dann $- L'\omega$ nothwendig etwas **verneintes**, und mithin auch $Z'' = - L'\omega + \mathfrak{f}\omega$ **verneint** seyn, weil auch $L'\omega > \mathfrak{f}\omega^2$ seyn soll. Ist aber Z' etwas **verneintes**, so ist auch wegen $L'\omega > S\omega^2$ die Größe $L'\omega$ nothwendig **verneint**, und also $- L'\omega$ gewiß **bejaht**, darum muß aber eben alsdann auch $Z'' = - L'\omega + \mathfrak{f}\omega^2$ **bejaht** seyn, denn es ist ja $L'\omega > \mathfrak{f}\omega^2$.

9) Da nun die Sätze in Nro. 7. und 8. für alle möglichen **ächten** Brüche $\frac{a}{\alpha} = \omega$, welche kleiner als der Quotient $\frac{L'}{(n-2)\,L^{(r)}}$ sind, wahr seyn müssen, diese aber schlechthin durch den Ausdruck: **sehr kleine Brüche** bezeichnet werden können, und da die Größen Z' und Z'' die Werthe sind, welche Z für $a + \omega$ und $a - \omega$ erhält, wenn a eine Wurzel von Z ist; so ist der Lehrsatz erwiesen. Die Werthe Z' und Z'' nehmlich, welche Z für $z = a + \omega$ und $z = a - \omega$ erhält, können nicht zugleich **bejaht** und **verneint** seyn, wenn a eine Wurzel von Z und ω ein sehr kleiner Bruch $\frac{a}{\alpha}$ ist, sondern es muß allemal, wenn z. E. für einen solchen kleinen Bruch $Z' = + A$ ist, $Z'' = - B$ seyn, und so umgekehrt.

§. 49.

"Wenn eine Function Z von z für $z = \alpha$ einen **bejahten** Werth $= + A$ und "für $z = \beta$ einen **verneinten** Werth $= - B$ erhält; so muß zwischen diesen beyden "Größen α und β gewiß **wenigstens ein** Werth enthalten seyn, für welchen, wenn "man ihn statt z in Z setzt, $Z = 0$ wird und der also eine **Wurzel** von Z ist."

1) Es sey $\alpha > \beta$. Zwischen diesen beyden Werthen der absolut veränderlichen Größe z kann man sich unzählig viele Werthe vorstellen, welche alle $< \alpha$ und $> \beta$ sind. Für einen jeden dieser Werthe aber muß, wenn man ihn statt z in Z gebraucht, die Fun-

Function Z einen bestimmten Werth erhalten. Da nun Z für $z = \alpha$ einen **bejahten** Werth $= + A$ und für $z = \beta$ einen **verneinten** Werth $= - B$ erhalten soll; so muß es zwischen α und β gewiß zwey Größen a und b geben, bey welchen, wenn man sie statt z in die Function Z setzt, der Uebergang derselben aus einem **bejahten** Werthe $= + A'$ in einen **verneinten** $= - B'$ geschieht und welche demnach von der Art sind, daß zwischen sie kein Werth γ mehr fällt, für welchen, wenn er anstatt z in der Function Z gebraucht würde, diese Function noch einen **bejahten** Werth $= + A''$, oder noch einen verneinten $= - B''$ erhielte. Diese beyden Werthe a und b aber, an deren Möglichkeit kein Zweifel ist, können nicht **gleich groß** seyn, weil für $z = a$ die Function Z den **bejahten** Werth $= + A'$ und für $z = b$ den **verneinten** Werth $= - B'$ erhalten soll, für **gleich große** Werthe von z aber eine Function unmöglich zwey **verschieden große** Werthe $+ A'$ und $- B'$ erhalten kann. Ist aber a von b verschieden, und findet also zwischen beyden Größen ein Unterschied $= d$ statt; so muß auch aus bekannten Gründen, es sey d so klein als es wolle, zwischen a und b noch eine Größe r fallen. Da nun für diese Größe, wenn man sie statt z in Z gebraucht, vermöge der angenommenen Eigenschaften der beyden Größen a und b die Function Z weder $= + A''$ nach $= - B''$ soll werden können, und doch einen gewissen bestimmten Werth erhalten muß; so kann dieser kein anderer seyn als der Werth $= 0$. Also muß zwischen a und b und mithin auch zwischen α und β eine Größe r fallen, für welche $Z = 0$ wird, und die daher eine Wurzel von Z ist.

2) Wenn man setzt, es sey $\alpha < \beta$; so werden die vorigen Schlüsse dadurch nicht abgeändert, und es ist also der Lehrsatz für alle Fälle richtig.

§. 50.

1) Wenn a und b zwo Wurzeln einer Function Z von z sind, und es soll zwischen dieselben keine dritte Wurzel mehr fallen; so muß Z für alle zwischen a und b fallenden Werthe von z entweder **bejaht** oder **verneint** werden. Denn wenn es zwischen a und b noch Werthe von z gäbe, für welche Z **bejaht** und auch **verneint** würde; so müßte nothwendig zwischen a und b wenigstens noch **eine** Wurzel von Z liegen. (§. 49.)

2) Zwischen **reellen** Größen α und β können bekanntlich keine **imaginären** enthalten seyn. Wenn mithin α und β **reelle** Größen von der Art sind, daß eine Function Z von z für $z = \alpha$ einen **bejahten** und für $z = \beta$ einen **verneinten** Werth erhält; so muß die Wurzel r von Z, welche nach §. 49. zwischen α und β enthalten ist, eine **reelle** Größe seyn.

§. 51.

"Wenn α und β **reelle** Größen von der Beschaffenheit sind, daß eine Function Z "von z für $z = \alpha$ einen **bejahten** und für $z = \beta$ einen **verneinten**, oder umgekehrt, "für $z = \alpha$ einen **verneinten** und für $z = \beta$ einen **bejahten** Werth enthält, und es "sollen sich ausser der **einen reellen** Wurzel von Z, welche nach §. 49. gewiß zwischen α "und β enthalten ist, noch mehrere Wurzeln befinden; so muß die Anzahl aller Wurzeln "**ungerad** seyn. Wird aber sowohl für $z = \alpha$, als wie auch für $z = \beta$ die Function "Z entweder zugleich **bejaht**, oder zugleich **verneint**; so ist die Anzahl der zwischen α und "β liegenden Wurzeln von Z gewiß **gerad**.

1) Es seyen die zwischen die beyden **reellen** Größen α und β fallenden **reellen** Wurzeln, so wie sie der Größe nach auf einander folgen, a, b, c.... p, q, r und α sey $> a$, $a > b$, $b > c \ldots$, $r > \beta$. Alle **bejahten** Werthe von Z seyen durch $+ Z$, alle **verneinten** aber durch $- Z$ bezeichnet.

2) Wir wollen nun **zuerst** setzen, es erhalte die Function Z für einen gewissen zwischen α und a fallenden Werth von $z = a + \omega$ einen **bejahten** Werth $= + Z$. Hiermit ist auch zugleich festgesetzt, daß Z für einen **jeden** beliebigen zwischen α und a fallenden Werth $z = a + \omega$ einen bejahten Werth $+ Z$ behalte, denn a soll ja nach Nro. 1. die zunächst auf die Größe α folgende Wurzel seyn. (§. 50.) Ist aber Z für die Werthe $z = a + \omega$ allemal $+ Z$; so muß ja, wenn man sich jetzt unter ω sehr kleine Brüche vorstellt, die Function Z für Werthe $z = a - \omega$ negative Werthe $- Z$ erhalten (§. 48.), und zwar muß dieß für alle zwischen a und b fallenden Werthe $z = a - \omega$ geschehen, es mag ω klein oder groß seyn, wenn man überlegt, daß nach Nro. 1. a und b zwey zunächst auf einander folgende Wurzeln seyn sollen. (§. 50.) Wenn aber Z für alle zwischen a und b fallenden Werthe $z = a - \omega$ negative Werthe $- Z$ erhält; so muß auch, wenn wiederum ω kleine Brüche bedeutet, für Werthe $z = b - \omega$ die Function Z bejahte Werthe $+ Z$ erhalten (§. 48.), und dieses muß, da b und c zunächst auf einander folgende Wurzeln seyn sollen (Nro. 1.), für alle die zwischen b und c fallenden Werthe $z = b - \omega$ geschehen. (§. 50.) Aus denselben Gründen muß die Function Z für **alle** zwischen c und d fallenden Werthe $z = c - \omega$ wiederum verneinte Werthe $- Z$, für alle zwischen d und e fallenden Werthe $d - \omega$ aber wieder lauter bejahee Werthe u. s. w. erhalten. Wenn man also annimmt, daß die Function Z für die zwischen α und a fallenden Werthe $z = a + \omega$ **bejahte** Werthe $+ Z$ erhält und die Wurzeln a, b, c... p, q, r **zunächst** auf einander folgende Wurzeln seyn läßt; so müssen auch nothwendig

die

die zwischen die **erste** und **zweyte** Wurzel fallenden Werthe von z **verneinte**,
. . . . . . **zweyte** und **dritte** . . . . **bejahte**,
. . . . . . **dritte** und **vierte** . . . . **verneinte**,
. . . . . . **vierte** und **fünfte** . . . . **bejahte**

u. s. w.

d. h. allgemein, es müssen die zwischen eine $2n$te und $(2n+1)$te Wurzel fallenden Werthe von z **bejahte** Werthe $+Z$ geben.

3) Wir wollen nun ferner setzen, es erhalte die Function Z für einen gewissen zwischen α und a fallenden Werth von $z = a + \omega$ einen **verneinten** Werth $= - Z$. Hiermit ist wiederum zugleich festgesetzt, daß Z für **alle** zwischen α und a fallenden Werthe $z = a + \omega$ verneinte Werthe $- Z$ behalte, denn es soll ja a die zunächst neben α liegende Wurzel seyn. (Nro. 1.) Ist aber dieß; so muß, wenn ω kleine Brüche bedeutet, die Function für Werthe $z = a - \omega$ bejahte Werthe $+ Z$ erhalten (§. 48.), und dieß muß, wenn man die Voraussetzung in Nro. 1. dazu nimmt, für **alle** zwischen a und b fallenden Werthe $z = a - \omega$ geschehen. (§. 50.) Weil ferner Z jetzt lauter bejahte Werthe $+ Z$ hat; so muß, wenn ω sehr kleine Brüche bedeutet, die Function Z für Werthe $z = b - \omega$ verneinte Werthe $- Z$ erhalten (§. 48.), und dieß muß wiederum, es sey ω klein oder groß, für alle zwischen b und c fallenden Werthe $z = b - \omega$ geschehen wegen Nro. 1. und §. 50. Eben so muß nun auch ferner die Function Z für alle zwischen c und d fallenden Werthe $z = c - \omega$ bejahte Werthe $+ Z$, für alle zwischen d und e fallenden Werthe $z = d - \omega$ verneinte Werthe $- Z$ u. s. w. bekommen. Wenn also Z für irgend einen Werth $z = a + \omega$ einen **verneinten** Werth $= - Z$ erhält, und a, b, c . . . p, q, r **zunächst** auf einander folgende Wurzeln sind; so müssen

die zwischen die **erste** und **zweyte** Wurzel fallenden Werthe von z **bejahte**,
. . . . . . **zweyte** und **dritte** . . . . **verneinte**,
. . . . . . **dritte** und **vierte** . . . . **bejahte**,
. . . . . . **vierte** und **fünfte** . . . . **verneinte**

u. s. w.

d. h. allgemein, es müssen die zwischen eine $2n$te und $(2n+1)$te Wurzel fallende Werthe von z **verneinte** Werthe $- Z$ geben.

4) Nun

4) Nun ist es leicht zu erweisen, daß die Anzahl der zwischen die beyden reellen Größen α und β fallenden reellen Wurzeln ungerad seyn muß, wenn für $z = \alpha$ die Function $= + Z$, für $z = \beta$ aber $= - Z$ wird.

Man setze nehmlich, es sey die Anzahl dieser Wurzeln nicht ungerad, also nicht $= 2n + 1$, sondern gerad. Sobald man letzteres annimmt; so kann man die Zahl aller Wurzeln a, b, c ... p, q, r durch $(2n + 2)$ ausdrücken, so daß also p die 2nte, q die $(2n + 1)$te und r die $(2n + 2)$te Wurzel bedeutet. Ferner aber müssen auch bey dieser Annahme folgende Sätze Statt finden: Es muß die Function Z darum, weil sie für $z = \alpha$ einen bejahten Werth $+ Z$ erhalten soll, für alle zwischen die 2nte Wurzel p und die $(2n + 1)$te Wurzel q fallenden Werthe $z = p - \omega$ bejahte Werthe $+ Z$ haben (Nro. 2.): und daher muß ferner Z für alle zwischen die $(2n + 1)$te Wurzel q und die $(2n + 2)$te Wurzel r fallenden Werthe $z = q - \omega$ verneinte Werthe $- Z$ bekommen, denn q soll ja eine Wurzel, und zwar die zunächst vor r hergehende Wurzel seyn, (§. 48. u. §. 50.). Wenn aber für alle Werthe der Größe z zwischen q und r, welche man mit $q - \omega$ bezeichnen kann, die Function Z verneinte Werthe $- Z$ haben muß; so wird auch gewiß diese Function für Werthe $z = r - \omega$, in welchen ω sehr kleine Brüche bedeutet, bejahte Werthe $+ Z$ erhalten müssen (§. 48.). Sollte nun zwischen diesen Werthen $z = r - \omega$, für welche die Function Z bejahte Werthe $+ Z$ erhalten muß, und dem Werthe $z = \beta < r$, für welchen die Function Z der Voraussetzung gemäß einen verneinten Werth $= - Z$ erhalten soll, gar keine einzige Wurzel mehr enthalten, und also wirklich die Anzahl aller Wurzeln a, b, c ... p, q, r $= (2n + 2)$ seyn; so müßte man den Lehrsatz in §. 49. läugnen. Man sieht demnach, daß man, wenn die Anzahl aller Wurzeln $= (2n + 2)$ gesetzt und daraus weiter fortgeschlossen wird, auf einen Widerspruch kommt, und daß man also wegen §. 49. genöthigt ist, noch eine $(n + 3)$te Wurzel zwischen β und den Werthen $z = r - \omega$, für welche Z bejaht wird, anzunehmen. Es ist mithin bey der Voraussetzung, welche wir gemacht haben, nothwendig die Anzahl aller Wurzeln $= (2n + 3)$ d. h. ungerad. Dasselbe Resultat erhält man, wenn man annimmt, es erhalte die Function für $z = \alpha$, den Werth $- Z$, und für $z = \beta$ den Werth $+ Z$.

5) Eben so leicht kann man aber auch erweisen, daß die Anzahl aller zwischen die beyden reellen Größen α und β fallenden reellen Wurzeln gerad seyn muß, wenn man für $z = \alpha$ und $z = \beta$ zugleich bejahte Werthe $+ Z$ oder zugleich verneinte Werthe $- Z$ erhält.

Man

Man setze, es sey die Function Z für $z = \alpha$ und auch für $z = \beta$ allemal bejaht, also $+ Z$ und nehme an, die Anzahl aller zwischen α und β fallenden Wurzeln sey nicht **gerad**, sondern **ungerad**. Bey dieser Annahme müssen die nachstehenden Sätze wahr seyn: Die Anzahl aller Wurzeln a, b, c ... p, q, r nehmlich muß durch $(2n + 1)$ ausgedrückt werden können und q muß dann die 2 nte, r aber die $(2n + 1)$te Wurzel bedeuten. Die Function Z muß für alle zwischen der 2 nten Wurzel q und der $(2n + 1)$ten Wurzel r enthaltenen Werthe $z = q - \omega$ bejahte Werthe $+ Z$ bekommen (Nro. 2.), und darum muß auch die Function Z für die Werthe $z = r - \omega$, in welcher ω sehr kleine Brüche bedeutet, nothwendig verneinte Werthe $- Z$ erhalten (§. 48.). Gäbe es nun zwischen diesen Werthen $z = r - \omega$, für welche Z verneinte Werthe $- Z$ erhält, und dem Werthe $z = \beta < r$, für welchen der Voraussetzung gemäß die Function Z einen bejahten Werth $= + Z$ erhalten soll, keine einzige Wurzel mehr; so wäre der Lehrsatz in §. 49. falsch. Man kann also bey der gemachten Voraussetzung nicht annehmen, daß die Anzahl aller Wurzeln $= 2n + 1$ sey, sondern man muß wegen §. 49. nothwendig noch eine Wurzel zwischen den genannten Werthen $z = r - \omega$ und der Größe β Statt haben lassen, so daß also die Anzahl $= 2n + 1 + 1 = (2n + 2)$ wird, und mithin **gerad** ist.

Dieses erhellet auf gleiche Art, wenn man setzt, es erhalte die Function Z für $z = \alpha$ und auch für $z = \beta$ **negative** Werthe $- Z$.

Nimmt man nehmlich hier wiederum an, die Anzahl aller Wurzeln a, b, c ... p, q, r sey nicht **gerad**, sondern **ungerad**; so kann man dieselben durch $2n + 1$ ausdrücken, und es müssen folgende Sätze Statt haben: Für alle die zwischen die 2 nte Wurzel q und die $(2n + 1)$te Wurzel r fallende Werthe $z = r + \omega$ muß die Function Z **verneinte** Werthe $- Z$ erhalten (Nro. 3.): daher muß auch die Function für alle Werthe $z = r - \omega$, in welchen ω sehr kleine Brüche bedeutet, bejahte Werthe $+ Z$ bekommen (§. 48.). Gäbe es nun zwischen diesen Werthen $r - \omega$ und dem Werthe $z = \beta < r$, für welchen der Voraussetzung gemäß die Function Z einen **negativen** Werth $- Z$ erhalten soll, keine Wurzel mehr; so wäre dieß gegen den Lehrsatz in §. 49. Man muß also auch hier noch eine $(2n + 2)$te Wurzel annehmen, und es ist folglich die Anzahl aller Wurzeln $= (2n + 2)$, und also **gerad**.

§. 52.

"Wenn der Exponent n des Grades, zu welchem eine ganze Function $Z =$ "$N z^n + M z^{n-1} + L z^{n-2} + K z^{n-3} + \ldots + C z^2 + B z + A$ gehört, "eine **gerade** Zahl ist; so muß die Anzahl aller **reellen** Wurzeln einer solchen Function,

"im

"im Falle ihr dergleichen Wurzeln zukommen, **gerad** seyn. Ist hingegen der Gradexpo-
"nent n eine **ungerade** Zahl; so ist auch die Anzahl der **reellen** Wurzeln der Function
"Z **ungerad**.

1) Die **reellen** Wurzeln sind entweder **bejahte** oder **verneinte** Größen, und **erstere** sind, gewiß zwischen $+\infty$ und o, letztere aber zwischen $-\infty$ und o enthalten.

2) Es sey nun für's erste der Exponent n eine **gerade** Zahl.

a) Setzt man hier $z = \pm\infty$; so erhält man

$$Z = N(\pm\infty)^n + M(\pm\infty)^{n-1} + \ldots + C(\pm\infty)^2 + B(\pm\infty) + A,$$

welches aus bekannten Gründen

$= N(\pm\infty)^n$ und, weil n eine **gerade** Zahl ist, $= + N.\infty^n$ seyn muß.

Setzt man ferner $z = o$; so folgt

$$Z = No^n + Mo^{n-1} + \ldots\ldots + Co^2 + Bo + A$$

Für $z = \pm\infty$ wird also, wenn n eine **gerade** Zahl ist, die Function Z eine **bejahte** unbestimmbar große Größe, und für $z = o$ erhält sie den Werth des absoluten Gliedes A.

b) Hier finden nun 2 Fälle Statt, es ist nehmlich das absolute Glied A entweder **bejaht** oder **verneint**. Ist

α) das absolute Glied eine **bejahte** Größe $= + A$; so erhält die Function Z, in welcher der Exponent n **gerad** ist, nach Nro. 2.

für $z = + \infty$ und $z = o$, und auch für $z = - \infty$ und $z = o$

allemal zwey **bejahte** Werthe, und es muß demnach so wohl die Anzahl der zwischen $+\infty$ und o enthaltenen **reellen bejahten** Wurzeln, als auch die Anzahl der zwischen $-\infty$ und o enthaltenen **reellen verneinten** Wurzeln **gerad** seyn (§. 51.). Daraus aber folgt, daß die Anzahl aller **reellen bejahten** und **verneinten** Wurzeln zusammen genommen **gerad** seyn muß, denn zwey **gerade** Zahlen geben in der Summe allemal eine **gerade** Zahl. Ist aber

β) das absolute Glied eine **verneinte** Größe $= - A$; so erhält die Function nach Nro. 2.

für $z = + \infty$ und $z = o$, und auch für $z = - \infty$ und $z = o$

alle-



allemal zwey Werthe, von welchen der eine **bejaht** und der andere **verneint** ist. Daher muß auch die zwischen $+ \infty$ und o enthaltene Anzahl aller **bejahten** Wurzeln **ungerad** und die zwischen $- \infty$ und o enthaltene Anzahl aller **verneinten** Wurzeln ebenfalls **ungerad**, folglich die Summe aller **bejahten** und **verneinten** Wurzeln **gerad** seyn, denn zwey **ungerade** Zahlen geben allemal in der Summe eine **gerade** Zahl.

3) Es sey ferner der Exponent n eine **ungerade** Zahl.

a) Setzt man hier wiederum $z = \pm \infty$; so erhält man

$$Z = N(\pm \infty)^n + M(\pm \infty)^{n-1} + \ldots B(\pm \infty) + A = \pm N \infty^n$$

Setzt man aber $z = o$; so wird

$$Z = N o^n + M o^{n-1} + \ldots + B o + A = A$$

b) Es erhält also die Function Z für $z = + \infty$ einen Werth, welcher eine unbestimmbar große **bejahte** Größe ist, und für $z = - \infty$ wird ihr Werth eine unbestimmbar große **verneinte** Größe. Für $z = o$ aber wird der Werth der Function Z dem Werthe des absoluten Gliedes gleich. Hier finden nun wiederum zwey Fälle Statt, denn das absolute Glied A kann **bejaht** $= + A$ und auch **verneint** $= - A$ seyn. Es sey

α) **bejaht.** Da in diesem Falle die Function Z für $z = o$ den Werth $+ A$ hat, für $z = + \infty$ aber einen **bejahten** und für $z = - \infty$ einen **verneinten** Werth enthält (Nro. 3.); so ist die Anzahl aller zwischen $+ \infty$ und o enthaltenen **reellen bejahten** Wurzeln **gerad** die Anzahl aller zwischen $- \infty$ und o enthaltenen **reellen verneinten** Wurzeln aber muß **ungerad** seyn (§. 51.). Demnach muß, wenn der Exponent n eine ungerade Zahl ist, die Anzahl aller **reellen** bejahten und verneinten Wurzeln **ungerad** seyn, denn die Summe aus einer geraden und ungeraden Zahl ist **ungerad.** Es sey

β) das absolute Glied A **verneint.** Weil bey dieser Voraussetzung die Function Z für $z = o$ den **verneinten** Werth $= - A$ erhalten, nach Nro. 3. aber für $z = + \infty$ **bejaht** und für $z = - \infty$ **verneint** werden muß; so ist gewiß die Anzahl aller zwischen $+ \infty$ und o fallenden **reellen bejahten** Wurzeln **ungerad** und hingegen die Anzahl aller **reellen verneinten** Wurzeln, welche zwischen $- \infty$ und o liegen, **gerad** (§. 51.). Also ist die Summe aller **reellen** bejahten und verneinten Wurzeln **ungerad**, wenn der Exponent n eine **ungerade** Zahl ist.

§. 53.

"Eine jede ganze Function Z

$$= Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + Kz^{n-3} + \ldots + Cz^2 + Bz + A$$

"hat entweder gar keine imaginären Wurzeln, oder es ist die Anzahl derselben, wenn sie "wirklich dergleichen hat, **gerad**."

Dieser Satz kann, nachdem der Lehrsatz im vorigen §. erwiesen worden ist, leicht dargethan werden. Ist nehmlich

1) der Gradexponent n der ganzen Function Z eine **gerade** Zahl; so muß ja auch die Anzahl aller Wurzeln der Function **gerad** seyn. Da nun nach §. 52. die Anzahl der **reellen** Wurzeln gewiß **gerad** ist, wenn der Exponent n zu den geraden Zahlen gehört; so muß auch die Anzahl der **imaginären** Wurzeln, wenn dergleichen Wurzeln vorhanden sind, **gerad** seyn, denn sie ist ja alsdann der Unterschied zwischen der **geraden** Anzahl der **reellen** und der **geraden** Anzahl **aller** Wurzeln der Function Z. Ist aber

2) der Gradexponent n eine **ungerade** Zahl; so muß, weil jetzt nicht nur die Anzahl **aller** Wurzeln dieser **ungeraden** Zahl n **gleich**, sondern auch die Anzahl der **reellen** Wurzeln nach §. 52. **ungerad** seyn muß, die Anzahl der **imaginären** Wurzeln **gerad** seyn, denn sie ist der Unterschied zwischen der **ungeraden** Anzahl **aller** und der **ungeraden** Anzahl der **reellen** Wurzeln.

§. 54.

Aus dem, was wir so eben in §. 53. erwiesen haben, folgt der Satz:

"Daß eine jede ganze Function Z, deren Gradexponent n eine **gerade** Zahl ist, "**lauter imaginäre** Wurzeln haben kann, und daß hingegen, wenn der Gradexponent "n zu den **ungeraden** Zahlen gehört, der Function Z wenigstens **eine reelle** Wurzel zu-"kommen muß."

§. 55.

"Eine ganze Function Z, deren Gradexponent n eine **gerade** Zahl und absolutes "Glied eine **verneinte** Größe ist, muß wenigstens **zwey reelle** Wurzeln haben, und die "eine davon ist allemal **bejaht**, die andere aber allemal **verneint**."

1) Die Function Z

$$= Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + Kz^{n-3} + \ldots + Cz^2 + Bz - A$$

erhält,

erhält, wenn n eine gerade Zahl ist, allemal einen unendlich großen bejahten Werth $= + N \infty^n$, man mag in derselben $z = + \infty$ oder $z = - \infty$ setzen, und für $z = 0$ wird dieselbe $= - A$. Nun muß aber, da sie für die beyden Werthe $z = + \infty$ und $z = 0$ zwey entgegengesetzte Werthe enthält; zwischen die beyden Gränzen $+ \infty$ und 0 wenigstens eine Wurzel der Function enthalten seyn (§. 49.), und eben dieß muß auch zwischen den beyden Gränzen $- \infty$ und 0 Statt haben, weil die Function auch für $z = - \infty$ und $z = 0$ zwey Werthe bekömmt, die einander entgegen gesetzt sind. Folglich hat die Function Z wenigstens zwey Wurzeln, welche zwischen die Gränzen $+ \infty$ und 0 und die Gränzen $- \infty$ und 0 fallen, das heißt, sie hat wenigstens zwey reelle Wurzeln, denn zwischen diesen Gränzen können nur reelle Größen enthalten seyn. Die eine davon aber, welche zwischen den Gränzen $+ \infty$ und 0 liegt, muß bejaht und die andere, welche zwischen $- \infty$ und 0 fällt, muß verneint seyn, weil zwischen die Gränzen $+ \infty$ und 0 nur bejahte und zwischen die Gränzen $- \infty$ und 0 nur verneinte Größen fallen können.

§. 56.

Nun ist es leicht, die im §. 47. erwähnten Lehrsätze über die Factoren der ganzen Function aufzustellen und zu beweisen, denn es sind die meisten derselben eigentlich nur Folgesätze aus dem, was von §. 52. an bis zu dem gegenwärtigen §. über die Wurzeln der ganzen Functionen gesagt worden ist.

§. 57.

"Die Anzahl der einfachen reellen Factoren einer ganzen Function Z ist gerad, "wenn der Gradexponent n der Function Z eine gerade, ungerad aber, wenn dieser "Exponent eine ungerade Zahl ist. Die Anzahl der einfachen imaginären Factoren "hingegen ist allemal gerad, der Gradexponent n der Function Z mag zu den geraden "oder zu den ungeraden Zahlen gehören."

Die einfachen Factoren von der Form $a - \alpha z$ oder $\alpha z - a$ entspringen, wie wir wissen, aus den Wurzeln $\frac{a}{\alpha}$ der Function. Wenn nun die Größe $\frac{a}{\alpha}$ eine reelle Größe ist; so ist gewiß auch die daraus geformte Größe $a - \alpha z$ oder $\alpha z - a$ reell, da hingegen dieselbe gewiß imaginär seyn muß, wenn $\frac{a}{\alpha}$ zu den imaginären Größen gehört. Man erhält also gewiß aus den Wurzeln $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$; $\frac{c}{\gamma}$ ꝛc. einer Function Z eben

 so

so viele **einfache reelle** und auch eben so viele **einfache imaginäre** Factoren, als wie viel reelle und **imaginäre** Wurzeln der Function zugehören. Da nun nach §. 52. die Anzahl der **reellen** Wurzeln **gerad** ist, wenn der Gradexponent n der Function zu den **geraden**, **ungerad** aber, wenn dieser Exponent zu den **ungeraden** Zahlen gehört; so muß eben dieses auch von der Anzahl der **einfachen reellen** Factoren gelten. Da ferner nach §. 53. die Anzahl der **imaginären** Wurzeln allemal **gerad** seyn muß, es mag der Gradexponent n der ganzen Function Z eine **gerade** oder **ungerade** Zahl seyn; so muß auch die Anzahl der aus **imaginären** Wurzeln entspringenden **imaginären** Factoren allemal **gerad** seyn.

§. 58.

"Die **einfachen** Factoren einer ganzen Function Z, deren Gradexponent n eine **gerade** Zahl ist, können **alle imaginär** seyn, aber ganz gewiß werden allemal wenigstens **zwey einfache** Factoren **reell** seyn müssen, wenn das absolute Glied einer solchen "Function eine **negative** Größe ist. Unter allen **einfachen** Factoren hingegen, welche "einer ganzen Function Z, deren Gradexponent n **ungerad** ist, zukommen, muß allemal "wenigstens **einer reell** seyn."

Da die **einfachen** Factoren aus den Wurzeln der Functionen entspringen, und die **reellen** Wurzeln **reelle**, die **imaginären** aber **imaginäre** Factoren geben müssen; so folgt der erste Satz von den beyden hier aufgestellten Sätzen aus §. 54. und 55., der letztere aber aus §. 54.

§. 59.

"Wenn eine ganze Function Z vom nten Grade (n — 2) **reelle** und 2 **imaginäre einfache** Factoren hat; so muß das Product aus den beyden **imaginären** Factoren allemal einen **reellen doppelten** Factor der Function geben."

Es sey das Product aus den (n — 2) einfachen **reellen** Factoren $= P$; dieses ist gewiß **reell**, weil bekanntlich ein Product aus lauter **reellen** Factoren keine **imaginäre** Größe werden kann. Dividirt man nun dieses Product P in die ganze Function Z, die als eine solche ebenfalls eine **reelle** Größe ist; so ergiebt sich ein Quotient

$$\frac{Z}{P} = Q,$$

welcher das Product aus den beyden übrigen **einfachen** Factoren der Function Z und folglich, weil dieselben der Voraussetzung gemäß **imaginär** seyn sollen, ein Product aus

2 ein-

2 **einfachen imaginären** Factoren seyn muß. Da nun Q gewiß keine **imaginäre** Größe seyn kann, wenn Z und P **reelle** Größen sind, welches hier der Fall ist; so muß auch der Lehrsatz richtig seyn.

§. 60.

Aus dem vorigen §. erhellet, daß eine **jede** ganze Function Z vom nten Grade, welche (n — 2) **reelle** und 2 **imaginäre** Factoren enthält, als ein Product aus (n — 1) **reellen** Factoren betrachtet werden kann, von welchen (n — 2) **einfach** sind, einer aber **doppelt** ist.

§. 61.

"Wenn eine ganze Function Z vom nten Grade (n — 4) **einfache reelle** und 4 "**einfache imaginäre** Factoren enthält; so ist nicht nur das Product aus den 4 letzteren "Factoren **reell**, und also ein **reeller vierfacher** Factor von Z, sondern es lassen sich "auch gewiß aus den 4 **einfachen imaginären** Factoren zwey Paare finden, deren Pro"ducte **reelle** doppelte Factoren der Function Z werden."

1) Es sey das Product aus den (n — 4) **einfachen** Factoren der Function = P; dieses muß als ein Product aus lauter **reellen** Factoren eine **reelle** Größe seyn. Dividirt man hiermit die ganze Function Z, welche als eine solche ebenfalls eine **reelle** Größe ist; so ergiebt sich der Quotient $\frac{Z}{P} = Q$, welcher ein Product aus den vier übrigen **imaginären** Factoren von Z seyn muß, weil P alle **reellen** Factoren in sich begreift, die übrigen Factoren von Z aber **imaginär** seyn sollen. Weil nun Z und P **reelle** Größen sind, so kann Q keine **imaginäre** Größe seyn, und es geben also die vier **imaginären** Factoren von Z einen **reellen vierfachen** Factor = Q.

2) Daß sich aber unter den in diesem **vierfachen** Factor Q enthaltenen vier **einfachen imaginären** Factoren gewiß zwey Paare finden lassen müssen, von welchen ein jedes Paar einen **doppelten reellen** Factor giebt, und daß also der **reelle** und aus lauter **einfachen imaginären** Factoren bestehende **vierfache** Factor Q als ein Product aus zwey **doppelten reellen** Factoren betrachtet werden kann, dieß läßt sich so beweisen:

a) Wenn die ganze Function Z vom nten Grade unter der Form

$$Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + Kz^{n-3} + \ldots + Cz^2 + Bz + A$$

und

und eben so der Divisor P als eine ganze Function vom $(n-4)$ten Grade unter der Form $k z^{n-4} + i z^{n-5} + h z^{n-6} + \ldots + c z^2 + b z + a$ vorgestellt wird; so muß der Quotient $Q = \frac{Z}{P}$, welcher nach Nro. 1. eine ganze Function vom 4ten Grade ist, gewiß die Form

$\mathfrak{E} z^4 + \mathfrak{D} z^3 + \mathfrak{C} z^2 + \mathfrak{B} z + \mathfrak{A}$ haben, wofür man auch

$\mathfrak{E}\left[z^4 + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} z^3 + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{E}} z^2 + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} z + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right]$ setzen kann.

b) Setzt man nun $z = y - \frac{\mathfrak{D}}{4\mathfrak{E}}$, um aus dem Ausdrucke für Q das zweyte Glied wegzuschaffen; so erhält man:

$$\begin{array}{lllllll}
z^4 = & \left(y - \frac{D}{4\mathfrak{E}}\right)^4 = & y^4 - \frac{D}{\mathfrak{E}} \Big| y^3 & + \frac{3D^2}{8\mathfrak{E}^2} \Big| y^2 & - \frac{D^3}{16\mathfrak{E}^3} \Big| y & + \frac{D^4}{256\mathfrak{E}^4} \\
\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} z^3 = & \frac{D}{\mathfrak{E}}\left(y - \frac{D}{4\mathfrak{E}}\right)^3 = & + \frac{D}{\mathfrak{E}} & - \frac{3D^2}{4\mathfrak{E}^2} & + \frac{3D^3}{16\mathfrak{E}^3} & - \frac{D^4}{64\mathfrak{E}^4} \\
\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{E}} z^2 = & \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{E}}\left(y - \frac{D}{4\mathfrak{E}}\right)^2 = & - \; - & + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{E}} & - \frac{\mathfrak{C}D}{2\mathfrak{E}^2} & + \frac{D^2}{16\mathfrak{E}^3} \\
\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} z = & \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}}\left(y - \frac{\mathfrak{D}}{4\mathfrak{E}}\right) = & - \; - \; - & - \; - & + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} & - \frac{\mathfrak{B}D}{4\mathfrak{E}} \\
\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}} & = - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}
\end{array}$$

Der in y^3 multiplicirte Coeffitient ist $= 0$. Nennt man den in y^2 multiplicirten Coefficienten $\mathfrak{c}$, den in y multiplicirten Coefficienten $\mathfrak{b}$ und die Summe der letzten Vertikalreihe $\mathfrak{a}$; so hat man

$$\mathfrak{E}\left[z^4 + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} z^3 + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{E}} z^2 + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} z + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right] = \mathfrak{E}\left[y^4 + \mathfrak{c}\, y^2 + \mathfrak{b}\, y^2 + \mathfrak{a}\right]$$

Es läßt sich also auf diese Art allemal Q als eine ganze Function von z auf eine gleichgültige Function von y zurückführen, in welcher $y = z + \frac{\mathfrak{D}}{4\mathfrak{E}}$ ist und in der das zweyte Glied fehlt.

c) Wenn es nun möglich ist sich die für Q gesetzte Function $\mathfrak{E}(y^4 + \mathfrak{c} y^2 + \mathfrak{b} y + \mathfrak{a})$ oder die Function $y^4 + \mathfrak{c} y^2 + \mathfrak{b} y + \mathfrak{a}$ als ein Product aus zwey doppel-

ten

ten reellen Factoren vorzustellen; so muß dieß auch, wie wir hernach zeigen wollen, bey der Function Q möglich seyn. Jetzt wollen wir zuerst darthun, daß wirklich die Function $y^4 + c\,y^2 + b\,y + a$ als ein Product aus zwey **doppelten reellen** Factoren vorgestellt werden kann.

d) Wenn es zwey solche Factoren giebt, so muß der eine die Form $y^2 + \beta y + \alpha$ und der andere die Form $y^2 - \beta y + \alpha'$ haben, denn blos diese beyde Factoren können eine Function vom vierten Grade geben, in welcher das zweyte Glied fehlt. Können wir nun darthun, daß, wenn wir

$y^4 + c\,y^2 + b\,y + a = (y^2 + \beta y + \alpha)(y^2 - \beta y + \alpha')$ setzen,

die Coefficienten β, α und α', welche wir einstweilen hypothetisch angenommen haben, wirklich **reelle** Größen seyn können; so muß auch zugegeben werden, daß $y^4 + c\,y^2 + b\,y + a$ als ein Product aus zwey **doppelten reellen** Factoren vorgestellt werden kann. Wir wollen sehen, ob die Größen β, α, α' reell seyn können.

e) Durch die Multiplication der beyden Factoren in einander, erhält man statt der Gleichung in Nro. d. diese:

$$y^4 + c\,y^2 + b\,y + a = \left\{ \begin{array}{l} y^4 + \alpha \\ \quad - \beta^2 \\ \quad + \alpha' \end{array} \right| \begin{array}{l} y^2 - \beta\alpha \\ \quad + \beta\alpha' \end{array} \left| \; y + \alpha\alpha' \right.$$

Wenn diese Gleichung für alle Werthe, die nur immer y erhalten mag, Statt haben soll, wie hier angenommen wird; so muß nach §. 21.

$c = \alpha + \alpha' - \beta^2$; $b = \beta\alpha' - \beta\alpha$; $a = \alpha\alpha'$ seyn.

Aus den beyden ersteren Gleichungen fließt: $c + \beta^2 = \alpha + \alpha'$ und $\frac{b}{\beta} = \alpha' - \alpha$, und wenn man beyde zusammen addirt und auch von einander abzieht; so erhält man

$$c + \beta^2 + \frac{b}{\beta} = 2\,\alpha' \text{ und } c + \beta^2 - \frac{b}{\beta} = 2\,\alpha$$

Das Product aus diesen beyden Gleichungen ist

$$(c + \beta^2)^2 - \frac{b^2}{\beta^2} = 4\,\alpha\alpha' = 4\,a, \text{ denn es war } \alpha\alpha' = a.$$

Hier haben wir nun eine Gleichung für β, welche, wenn wir sie ordnen, so aussieht:

$$\beta^6 + 2\,c\,\beta^4 + (c - 4\,a)\,\beta^2 - b^2 = 0$$

Sie

Sie ist eine Gleichung vom 6ten Grade und das absolute Glied derselben ist **negativ**. Letzteres aber muß hier allemal Statt haben, es mag die Größe b **positiv** oder **negativ** seyn, denn das absolute Glied ist das Quadrat von b, welches stets eine **positive** Größe ist. Daraus folgt aber nach §. 55., daß die Gleichung für β gewiß wenigstens zwey **reelle** Wurzeln haben muß, daß es also ganz gewiß zwey **reelle** Werthe für die Größe β giebt. Nimmt man nun einen dieser beyden **reellen** Werthe von β und sucht die Größen α und α'; so erhellet, daß wirklich auch diese beyden Größen **reelle** Größen seyn können. Also können die beyden für die Function $y^4 + c\,y^2 + b\,y + a$ angenommenen Factoren **reell** seyn (Nro. d.)

f) Wenn es aber für die oben genannte Function und folglich auch für $\mathfrak{E}(y^4 + c\,y^2 + b\,y + a)$ zwey **reelle doppelte** Factoren giebt; so muß auch nothwendig die Function $Q = \mathfrak{E}\left[z^4 + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} z^3 + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{E}} z^2 + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} z + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right]$ zwey solche Factoren geben, denn man darf ja nur in den beyden Factoren, welche für die Function $\mathfrak{E}(y^4 + c\,y^2 + b\,y + a)$ gelten, statt y den Ausdruck $z + \frac{\mathfrak{D}}{4\mathfrak{E}}$ setzen, und hernach alles gehörig ordnen, und man muß alsdann die Factoren der Function $Q = \mathfrak{E}\left[z^4 + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} z^3 + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{E}} z^2 + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} z + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right]$ erhalten, welches leicht einzusehen ist.

g) Also kann Q, wenn es ein Product aus vier **einfachen imaginären** Factoren ist, allemal als ein Product aus zwey **doppelten reellen** Factoren vorgestellt werden, und es muß also gewiß 2 Paare unter den verschiedenen Paaren, die sich aus den 4 **einfachen imaginären** Factoren von Q bilden lassen, geben, deren Producte **doppelte reelle** Factoren von Z sind.

§. 62.

Aus dem in §. 61. erwiesenen Satze erhellet, daß eine jede ganze Function vom nten Grade, welche (n — 4) **reelle** und vier **einfache imaginäre** Factoren enthält, entweder als ein Product aus (n — 3), oder als ein Product aus (n — 2) **reellen** Factoren vorgestellt werden kann, und daß im ersten Falle (n — 4) der **reellen** Factoren **einfach** sind, der (n — 3)te aber ein **vierfacher** Factor seyn muß, im andern Falle aber die außer den (n — 4) **einfachen** Factoren noch vorhandenen zwey übrigen **doppelte** Factoren seyn müssen.

§. 63.

§. 63.

"Es läßt sich ganz allgemein darthun, daß, wenn eine ganze Function vom nten "Grade außer (n — 2 m) **einfachen reellen** Factoren noch 2 m **einfache imaginäre** "Factoren enthält, allemal unter den verschiedenen Paaren, welche sich aus den 2 m **ein**- "**fachen imaginären** Factoren nehmen lassen, m Paare Statt haben müssen, von wel- "chen ein jedes Paar einen **doppelten reellen** Factor im Producte giebt, so daß also "die genannte Function als ein Product aus (n — 2 m) **einfachen** und m **doppelten** "**reellen** Factoren vorgestellt werden kann."

Den Beweis für diesen Satz hat **Euler** in einem Aufsatze, welchen man in der Histoire de l'Academie royale des Sciences et belles Lettres vom Jahre 1749 unter dem Titel: Recherches sur les racines imaginaires des équations findet, auf verschiedene Art zu führen gesucht. Einen Auszug aus einem Theile dieses Aufsatzes findet man in dem Anhange zu der deutschen Uebersetzung der Eulerischen Introd. in Analys. infinit. von Joh. Andr. Chr. Michelsen. 1. B. S. 435. — S. 447.

§. 64.

"Eine ganze Function Z enthalte mehrere **reelle** und **imaginäre** Factoren. Man "soll ein Merkmal aufsuchen, wodurch sich diejenigen **reellen doppelten** Factoren, de- "ren einfache Factoren beyde **imaginär** sind, von denjenigen **reellen doppelten** Facto- "ren unterschieden, welche zwey **reelle** einfache Factoren enthalten. Ferner soll man einen "Ausdruck angeben, welcher alle die aus **imaginären** einfachen Factoren zusammengesetz- "ten **reellen doppelten** Factoren unter sich begreift, und in welchem das Merkmal, an "welchem man erkennen kann, daß die ihm zugehörigen einfachen Factoren **imaginär** "sind, deutlich ausgedrückt ist."

1) Die einfachen Factoren einer jeden ganzen Function Z von z seyen **reell** oder **imaginär**, sie müssen allemal die Form $a - \alpha z$ oder $\alpha z - a$ haben (§. 42.). Da nun ein **doppelter** Factor ein Product aus zwey einfachen Factoren ist (§. 46); so wird er ganz gewiß die Form des entwickelten Productes $(a - \alpha z)(b - \beta z) = -(-\alpha z + a) \times -(-\beta z + b) = (\alpha z - a)(\beta z - b)$ haben. Nun ist aber

$$(a - \alpha z)(b - \beta z) = a b - (a \beta + b \alpha) z + \alpha \beta z^2 \text{ und}$$

$$(\alpha - a z)(\beta z - b) = \alpha \beta z^2 - (a \beta + b \alpha) z + a b; \text{ es ist}$$

also, wenn man a b durch **a**, $a \beta + b \alpha$ durch **b** und $\alpha \beta$ durch **c** bezeichnet, die Form

eines

eines jeden **doppelten** Factors, er mag nun entweder **gar keinen**, oder **einen**, oder **zwey imaginäre** einfache Factoren enthalten, allemal

$$a - b\,z + c\,z^2 \text{ oder } c\,z^2 - b\,z + a$$

und, im Falle $b = 0$ ist, $a + c\,z^2$ oder $c\,z^2 + a$.

2) Soll nun ein solcher **doppelter** Factor **reell** seyn, aber zwey **imaginäre** einfache Factoren enthalten; so müssen die in demselben stehenden Coefficienten a, b, c **reelle** Größen, die Wurzeln desselben aber müssen **imaginär** seyn. Wir wollen jetzt die Bedingungen aufsuchen, unter welchen, wenn a, b, c **reelle** Größen sind, diese Wurzeln **imaginär** seyn können. Aus der Gleichung $c\,z^2 - b\,z + a = 0$ oder $z^2 - \frac{b\,z}{c} + \frac{a}{c} = 0$ folgt

$$z = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}\right)}$$
$$= \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4\,a\,c}}{2c}$$

Diese beyden Wurzeln aber können, da die Größen a, b, c **reell** seyn sollen, in der That nur unter der Bedingung **imaginär** seyn, wenn entweder b den Werth $= 0$ oder wirklich einen Werth hat, der aber $< 2\sqrt{a\,c}$ ist.

"Ein jeder **reeller doppelter** Factor also, welcher zwey **imaginäre** Wurzeln und "folglich zwey **imaginäre einfache** Factoren enthalten soll, muß von der Art seyn, "daß in ihm der Coefficient b entweder den Werth $= 0$, oder einen wirklichen Werth "hat, der aber kleiner als $2\sqrt{a\,c}$ ist. Findet das Gegentheil Statt; so wird er alle- "mal zwey **reelle einfache** Factoren enthalten."

3) Will man nun einen **allgemeinen** Ausdruck angeben, welcher alle **reellen doppelten** Factoren, in denen die einfachen Factoren **imaginär** sind, unter sich begreift; so darf man nur in dem allgemeinen Ausdrucke $a - b\,z + c\,z^2$ an die Stelle von b eine Größe setzen, welche nicht nur kleiner als $2\sqrt{a\,c}$ ist, sondern auch $= 0$ seyn kann. Dieß ist aber, wenn $\frac{1}{n}$ einen **ächten** Bruch bedeutet, die Größe $\frac{1}{n}\,2\sqrt{a\,c}$, denn diese ist nicht nur $< 2\sqrt{a\,c}$, sondern sie kann auch $= 0$ seyn, alsdann nehmlich, wenn man $n = \infty$ setzt. Demnach ist der verlangte **allgemeine** Ausdruck dieser:

$$a - \frac{2\sqrt{a\,c}}{n} + c\,z^2 \text{ oder } c\,z^2 - \frac{2\sqrt{a\,c}}{n} + a$$

4) An

4) An die Stelle dieses Ausdruckes aber kann man noch einen andern setzen, welcher, wie die Folge zeigen wird, mit vielem Vortheile gebraucht werden kann. Bekanntlich sind, wenn π die halbe Kreislinie bedeutet, für die Bögen $0.\pi$, $1.\pi$, $2.\pi$, $3.\pi$, $4.\pi$ u. s. w., d. h. allgemein, für alle Bögen $2k\pi$ und $(2k+1)\pi$ (wo k eine jede ganze bejahte Zahl bedeutet) die Cosinus entweder $=+1$ oder $=-1$, für alle übrigen Bögen φ aber, welche weder zu $=2k\pi$, noch zu $(2k+1)\pi$ gehören, bedeutet $\text{Cos}\,\varphi$ entweder einen bejahten oder verneinten **ächten** Bruch, oder 0. Lassen wir also φ solche Bögen bedeuten, die weder $=2k.\pi$ noch $=(2k+1)\pi$ sind; so können wir statt des Bruches $\frac{1}{n}$ in dem obigen Ausdrucke auch $\text{Cos}\,\varphi$ setzen, und wir erhalten, wenn wir dieses thun, den nachstehenden Ausdruck:

$$a - 2z\,\text{Cos}\,\varphi\,\sqrt{ac} + cz^2 \text{ oder } cz^2 - 2z\,\text{Cos}\,\varphi\,\sqrt{ac} + a$$

Nun hindert uns nichts, die Größe a als ein Quadrat $= p^2$ und so auch die Größe c als ein Quadrat $= q^2$ vorzustellen. Wenn wir dieses thun; so wird $2\sqrt{ac} = 2\sqrt{p^2.q^2} = 2pq$, und der vorige Ausdruck verwandelt sich bey dieser Vorstellungsart in folgenden:

$$p^2 - 2pqz\,\text{Cos}\,\varphi + q^2z^2,$$

dessen wir uns in der Folge statt des vorigen bedienen werden, weil er kein Wurzelzeichen enthält, wie der vorige, und auch noch aus andern Gründen sehr vortheilhaft wird. Bedeutet in diesem Ausdrucke φ einen Bogen $\frac{1}{2}\pi$, oder $\frac{3}{2}\pi$, oder $\frac{5}{2}\pi$ rc. dessen Cosinus $= 0$ ist; so verwandelt er sich in den Ausdruck $p^2 - q^2z^2$.

§. 65.

"Eine Function Z von z enthalte **ein** Paar oder **mehrere** Paare **imaginäre** einfache Factoren. Man soll untersuchen, wie jedesmal **das** Paar von solchen Factoren geformt seyn muß, welches im Producte einen **reellen doppelten** Factor geben soll. "Ferner soll man angeben, wie die beyden **imaginären einfachen** Factoren der allgemeinen Form $q^2z^2 - 2pqz\,\text{Cos}\,\varphi + p^2$ oder $p^2 - 2pqz\,\text{Cos}\,\varphi + q^2z^2$ "aussehen müssen."

1) Da ein jeder **doppelter** Factor die Form

$$a - bz + cz^2 \text{ oder } cz^2 - bz + a$$

haben muß; so werden wir die Form der zwey **imaginären einfachen** Factoren, welche einen **reellen doppelten** Factor im Producte geben können, finden, wenn wir den **doppelten** Factor $a - bz^2 + cz^2$ oder $cz^2 - bz + a$ als einen **reellen** Factor,

dessen Wurzeln aber als **imaginär** betrachten und daraus die **imaginären einfachen** Factoren desselben nach den Formen bilden, nach welchen ein jeder einfacher Factor gebildet werden muß (§. 41.). Man findet aber aus der regulirten Gleichung

$$z^2 - \frac{b}{c}z + \frac{a}{c} = 0$$

die zwey Wurzeln

$$z = \frac{b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2c},\ z = \frac{b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2c},$$

welche wir, wenn sie zwey solche Brüche $\frac{a}{\alpha}$ und $\frac{b}{\beta}$ seyn sollen, bey welchen das Product aus den Nennern α und β dem Coefficienten c gleich ist (§. 45), auf folgende Art ausdrücken müssen:

$$z = \frac{\frac{b}{2\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2\sqrt{c}}}{\sqrt{c}},\quad z = \frac{\frac{b}{2\sqrt{c}} - \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2\sqrt{c}}}{\sqrt{c}}.$$

Soll nun der mit **reellen** Coefficienten versehene **doppelte** Factor $cz^2 - bz + a$ **imaginäre** Wurzeln haben; so muß b entweder $= 0$ oder $< 2\sqrt{ac}$ seyn, damit die Größe $\frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2\sqrt{c}}$ oder $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c}}$ **imaginär** werde. Man kann demnach die Größe $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c}}$ hier allemal durch $\sqrt{-S}$ ausdrücken, und da erhält man dann, wenn man die Größe $\frac{b}{2\sqrt{c}}$ kurz durch r bezeichnet, die nachstehenden Formen für die beyden **imaginären** Wurzeln eines **reellen doppelten** Factors:

$$z = \frac{r + \sqrt{-S}}{\sqrt{c}};\ z = \frac{r - \sqrt{-S}}{\sqrt{c}}$$

Formirt man nun aus diesen Wurzeln die **imaginären einfachen** Factoren für den **reellen doppelten** Factor $cz^2 - bz + a$ nach der Form $\alpha z - a$ (§. 42.); so erhält man

$$z\sqrt{c} - (r + \sqrt{-S}),\ z\sqrt{c} - (r - \sqrt{-S}).$$

Formirt man aber aus ihnen diese Factoren für den **reellen doppelten** Factor, $a - bz + cz^2$ nach der Form $a - \alpha z$ (§. 42.); so bekommt man

$$r + \sqrt{-S} - z\sqrt{c},\ r - \sqrt{-S} - z\sqrt{c}\ldots$$

2) Wenn

2) Wenn in dem **reellen doppelten** Factor $a - b z + c z^2$ der Coefficient $c = 1$ ist, und also der Factor $a - b z + z^2$ heißt; so ist

$$r \text{ oder } \frac{b}{2\sqrt{c}} = \frac{b}{2}, \text{ und } \sqrt{-S} \text{ oder } \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c}} \text{ ist } = \sqrt{\frac{b^2 - 4a}{4}},$$

die beyden **imaginären einfachen** Factoren aber, welche der Form $c z^2 - b z + a$ zugehören, heißen alsdann $z - (r + \sqrt{-S})$, $z - (r - \sqrt{-S})$; die aber, welche der Form $a - b z + c z^2$ entsprechen, heißen $r + \sqrt{-S} - z$; $r - \sqrt{-S} - z$.

Wenn ferner $b = 0$ ist, und der **reelle doppelte** Factor $a + c z^2$ oder $c z^2 + a$ heißt; so ist r oder $\frac{b^2}{2\sqrt{c}} = 0$ und $\sqrt{-S}$ oder $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c}}$ ist $= \sqrt{-a}$. Die der Form $c z^2 + a$ entsprechenden **imaginären einfachen** Factoren aber heißen $z - \sqrt{-S}$, $z + \sqrt{-S}$, und die **imaginären einfachen** Factoren, welche der Form $a - c z^2$ zugehören, sind folgende: $\sqrt{-S} - z$; $-\sqrt{-S} - z$.

3) Auf dieselbe Art findet man nun auch die Formen der beyden **imaginären einfachen** Factoren des **reellen doppelten** Factors

$$q^2 z^2 - 2 p q z \operatorname{Cos} \varphi + p^2 \text{ oder } p^2 - 2 p q z \operatorname{Cos} \varphi + q^2 z^2$$

Aus der regulirten Gleichung $z^2 - \frac{2 p z \operatorname{Cos} \varphi}{q} + \frac{p^2}{q^2} = 0$ nehmlich ergeben sich folgende Wurzeln:

$$z = \frac{p \operatorname{Cos} \varphi}{q} + \sqrt{\left(\frac{p^2 \operatorname{Cos} \varphi^2}{q^2} - \frac{p^2}{q^2}\right)}, \; z = \frac{p \operatorname{Cos} \varphi}{q} - \sqrt{\left(\frac{p^2 \operatorname{Cos} \varphi^2}{q^2} - \frac{p^2}{q^2}\right)},$$

oder

$$z = \frac{p\,(\operatorname{Cos} \varphi + \sqrt{(\operatorname{Cos} \varphi^2 - 1)})}{q}, \; z = \frac{p\,(\operatorname{Cos} \varphi - \sqrt{(\operatorname{Cos} \varphi^2 - 1)})}{q},$$

wofür man auch, weil $\sqrt{(\operatorname{Cos} \varphi^2 - 1)} = \sqrt{((1 - \operatorname{Cos} \varphi^2) \times -1)} = \sqrt{(1 - \operatorname{Cos} \varphi^2)} \times \sqrt{-1} = \operatorname{Sin} \varphi \cdot \sqrt{-1}$ ist, setzen kann:

$$z = \frac{p\,(\operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Sin} \varphi \sqrt{-1})}{q}, \; z = \frac{p\,(\operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Sin} \varphi \sqrt{-1})}{q}.$$

Formirt man nun hieraus nach der Form $\alpha z - a$ die beyden **imaginären einfachen** Factoren des **reellen doppelten** Factors $q^2 z^2 - 2 p q z \operatorname{Cos} \varphi + p^2$; so erhält man:

$$q z - p\,(\operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Sin} \varphi \sqrt{-1}); \quad q z - p\,(\operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Sin} \varphi \sqrt{-1}).$$

Formirt man aber diese Factoren nach der Form $a - \alpha z$ für die andere Form $p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2 z^2$ des **rellen doppelten** Factors; so ergeben sich für die **imaginären einfachen** Factoren die Formen

$$p(\operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Sin}\varphi \sqrt{-1}) - qz;\ p(\operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \sqrt{-1}) - qz.$$

Wenn $\operatorname{Cos}\varphi = 0$ und also $\operatorname{Sin}\varphi$ entweder $= +1$ oder $= -1$ ist, in welchem Falle der **reelle doppelte** Factor $q^2 z^2 - p^2$ oder $p^2 - q^2 z$ heißt; so sind für die Form $q^2 z^2 - p^2$ die Formen der **imaginären einfachen** Factoren

$$qz - p\sqrt{-1},\quad qz + p\sqrt{-1},$$

und für die Form $p^2 - q^2 z^2$ sind die Formen dieser Factoren

$$p\sqrt{-1} - qz,\quad -p\sqrt{-1} - qz.$$

§. 66.

Dieses sind nun die Hauptlehren von den **einfachen** und **doppelten** Factoren der ganzen Functionen einer veränderlichen Größe z. Auf diese gründet sich diejenige Umformung der ganzen Functionen, welche man die **Zerfällung** derselben in ihre Factoren zu nennen pflegt, und die für die Integralrechnung besonders wichtig ist. In den folgenden §§. soll von dieser **Zerfällung** gehandelt werden.

§. 67.

"Eine **ganze** Function $Z = A + Bz + Cz^2 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1}$ "$+ Nz^n$ in ihre einfachen Factoren zu zerfällen."

1) In einer ganzen Function Z von z ist entweder das absolute Glied $= 0$, oder es hat einen bestimmten Werth. Ist ersteres, so kann man die Function allemal nach §. 43. in zwey Factoren zerlegen, von welchen der eine entweder z, oder, wenn ausser dem absoluten Gliede noch mehrere zunächst darauf folgende Glieder fehlen, eine Potenz von z ist, der andere aber eine ganze mit einem absoluten Gliede versehene Function bildet. Daher kann man ganz gewiß eine **jede** ganze Function in ihre einfachen Factoren zerfällen, wenn man die Function $Z = A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^n$, in welcher A einen bestimmten Werth hat, zerfällen kann.

2) Diese Zerfällung aber hängt zunächst von der Bestimmung der Wurzeln einer solchen Function ab, aus welchen die einfachen Factoren entspringen. Man setze also die Function

$$Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + \ldots + Cz^2 + Bz + A = 0,$$

regu-

regulire diese Gleichung, so wie sichs gehört, und suche alsdann aus der regulirten Gleichung

$$z^n + \frac{M}{N} z^{n-1} + \frac{L}{N} z^{n-2} + \ldots + \frac{C}{N} z^2 + \frac{B}{N} z + \frac{A}{N} = 0$$

die Wurzeln zu erhalten.

3) Wenn man die Wurzeln gefunden hat; so richte man dieselben unbeschadet ihres Werthes so ein, daß das Product aus ihren Nennern = N seyn kann (§. 45.)

4) Aus den Wurzeln, welche ganze Zahlen sind, formire man ferner nach der Form $z - a$ die Factoren, in dem man sie von z subtrahirt; aus den Wurzeln aber, welche Brüche sind, formire man die Factoren nach der Form $\alpha z - a$, indem man den Nenner α mit z multiplicirt, und von dem Producte den bejahten oder verneinten Zähler gehörig abzieht. Hierdurch erhält man die Factoren für die Form

$$N z^n + M z^{n-1} + L z^{n-2} + \ldots + C z^2 + B z + A$$

der Function. Will man aber die Factoren für die in der umgekehrten Form vorgegebene Function $A + B z + C z^2 + \ldots\ldots\ldots + L z^{n-2} + M z^{n-1} + N z^n$ haben; so kehre man nur alle Factoren, die man vorher hatte, um, d. h. man setze statt $z - a$, $-a + z$; statt $\alpha z - a$, $-a + \alpha z$. Hierdurch wird der Werth des Productes, welches sie vorher gaben, nicht verändert. Eine gerade Anzahl derselben kann man alsdannn negativ nehmen, d. h. man kann die Zeichen ihrer Glieder in entgegengesetzte verwandeln, wodurch ebenfalls in dem Werthe ihres Products keine Abänderung bewirkt wird.

§. 68.

1) "Es soll die ganze Function $Z = 3 - 7z - 6z^2$ in ihre einfachen Factoren "zerfällt werden."

Aus der Gleichung $3 - 7z - 6z^2 = 0$ erhält man die regulirte Gleichung $z^2 + \frac{7}{6} z - \frac{1}{2} = 0$. Aus dieser folgen für z die beyden Wurzelwerthe $= -\frac{7}{12} \pm \sqrt{\frac{121}{144}}$, es ist also $z = \frac{1}{3}$ und $z = -\frac{3}{2}$. Die beyden Nenner dieser Wurzeln geben das Product $2 \cdot 3 = 6$. Da aber hier $N = -6$ ist; so muß man statt $z = -\frac{3}{2}$,

z =

$z = \frac{3}{-2}$ setzen, und nun ist das Product aus den Nennern $= -2 \cdot 3 = -6$. Demnach sind die beyden Factoren der Function $-6z^2 - 7z + 3$, wenn man dieselben gehörig nach der Form $\alpha z - a$ formirt, $3z - 2$ und $-2z - 3$. Weil nun $-6z^2 - 7z + 3 = (3z - 1)(-2z - 3)$ ist; so muß $3 - 7z - 6z^2 = (-1 + 3z)(-3 - 2z) = -(-1 + 3z) \times -(-3 - 2z) = (1 - 3z)(3 + 2z)$ seyn.

II) "Man soll die Function $Z = 2z - 4z^2 - 6z^3$ in ihre einfachen Factoren "zerfällen."

Es ist $2z - 4z^2 - 6z^3 = z(2 - 4z - 6z^2)$. Setzt man nun $2 - 4z - 6z^2 = 0$ und sucht die Wurzeln; so erhält man aus der regulirten Gleichung $z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0$ die beyden Wurzelwerthe $z = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$. Also ist $z = \frac{1}{3}$ und $z = -1$. Das Product aus den Nennern der Wurzeln ist hier $= 3$, es muß aber $= -6$ seyn. Man setze daher statt $z = -1$, $z = \frac{2}{-2}$, dann ist das Product aus den Nennern $= 3 \times -2 = -6$, und die beyden Factoren der Function $-6z^2 - 4z + 2$ sind $3z - 1$; $-2z - 2$. Weil nun $-6z^2 - 4z + 2 = (3z - 1)(-2z - 2)$ ist; so muß $2 - 4z - 6z^2 = (-1 + 3z) \times (-2 - 2z) = -(-1 + 3z) \times -(-2 - 2z) = (1 - 3z), (2 + 2z)$, und folglich $z(2 - 4z - 6z^2)$ oder $2z - 4z^2 - 6z^3 = z(1 - 3z)(2 + 2z)$ seyn.

III) "Man soll die Function $Z = z - z^3$ in die einfachen Factoren zerlegen."

Hier ist $z - z^3 = z(1 - z^2)$ und aus bekannten Gründen kann man $1 - z^2 = (1 - z)(1 + z)$ setzen; es ist also $z - z^3 = z(1 - z)(1 + z)$.

IV) "Es sey die Function $Z = 1 - 3z - 4z^2 + 12z^3$ in ihre einfachen Fa"ctoren zu zerfällen."

Setzt man $1 - 3z - 4z^2 + 12z^3 = 0$ und sucht aus der regulirten Gleichung $z^3 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z + \frac{1}{12} = 0$ die Wurzeln; so findet man $z = \frac{1}{2}$; $z = -\frac{1}{2}$; $z = -\frac{1}{3}$. Das Product aus ihren Nennern ist $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$,

also

also dem Coefficienten N, welcher hier ebenfalls = 12 ist, gleich, und man braucht demnach keine der Wurzeln anders auszudrücken. Aus diesen Wurzeln folgen für die Function $12z^3 - 4z^2 - 3z + 1$ die Factoren $2z - 1$, $2z + 1$, $3z - 1$. Da $12z^3 - 4z^2 - 3z + 1 = (2z - 1)(2z + 1)(3z - 1)$ ist; so muß

$$1 - 3z - 4z^2 + 12z^3 = (-1 + 2z)(1 + 2z)(-1 + 3z)$$
$$= -(-1 + 2z)(1 + 2z) \times -(-1 + 3z)$$
$$= (1 - 2z)(1 + 2z)(1 - 3z) \text{ seyn.}$$

V) "Es soll die Function $Z = 1 + 4z^4$ in die einfachen Factoren zerfällt werden."

Wenn man $1 + 4z^4 = 0$ setzt und aus der regulirten Gleichung $z^4 + \frac{1}{4} = 0$ die Wurzeln sucht; so findet man

$$z = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{-1}}{2}}$$

und hierfür kann man, weil bekanntlich $\frac{\pm\sqrt{-1}}{2} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2}\right)^2$ ist, auch

$$z = \pm\sqrt{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2}\right)^2}$$

setzen, woraus dann $z = \pm\frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2}$ folgt. Dieser Ausdruck aber giebt

$$z = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{2},\quad z = \frac{-1 - \sqrt{-1}}{2},\quad z = \frac{1 - \sqrt{-1}}{2},\quad z = \frac{1 + \sqrt{-1}}{2}.$$

Das Product aus allen Nennern der Wurzeln ist hier $= 2.2.2.2 = 8$, N aber ist $= 4$, daher müssen wir die Wurzeln so einrichten, daß das Product aus ihren Nennern $= 4$ seyn kann. Weil $(\sqrt{2})^4 = 4$ ist; so wollen wir einen jeden Nenner 2 durch $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ ausdrücken, und blos $\sqrt{2}$ als den Hauptnenner der gebrochenen Wurzeln ansehen, so daß also die Wurzeln so aussehen:

$$z = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{2}},\quad z = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{2}},\quad z = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{2}},\quad z = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Daraus folgen für die Function $4z^4 + 1$ die einfachen und nach der Form $\alpha z - a$ formirten Factoren

$$z\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{-1}{2}};\ z\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{-1}{2}};$$

$$z\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{-1}{2}};\ z\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{-1}{2}}.$$

Kehrt man diese um und verändert in beyden Paaren die Zeichen; so hat man $1+4z^4$

$$=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{-1}{2}}-z\sqrt{2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{-1}{2}}-z\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{-1}{2}}-z\sqrt{2}\right)$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{-1}{2}}-z\sqrt{2}\right)$$

*) Die beyden ersten Factoren geben hier den **reellen doppelten** Factor $1+2z+2z^2$, und aus den beyden letzten erhält man den **reellen doppelten** Factor $1-2z+2z^2$; man kann daher auch $1+4z^4=(1+2z+2z^2)\times(1-2z+2z^2)$ setzen.

VI) "Man soll die einfachen Factoren der Function

"$Z=3-\frac{7}{2}z-10z^2+15z^3+2z^4-24z^5$ aufsuchen."

Setzt man $3-\frac{7}{2}z-10z^2+15z^3+2z^4-24z^5=0$ und sucht aus der regulirten Gleichung $z^5-\frac{1}{12}z^4-\frac{5}{8}z^3+\frac{5}{12}z^2+\frac{7}{48}z-\frac{1}{8}=0$ die Wurzeln; so erhält man $z=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{2}{3}$, $z=-\frac{3}{4}$, $z=\frac{1+\sqrt{-1}}{2}$, $z=\frac{1-\sqrt{-1}}{2}$. Das Product aus den Nennern der Wurzeln ist $=2.3.4.2.2=$ 106, es muß aber, weil hier $N=-24$ ist, $=-24$ seyn. Man sehe, um dieß zu erhalten, die beyden imaginären Wurzeln als ganze Zahlen an, und bilde also die Factoren aus ihnen nach der Form $z-a$, eine der übrigen Wurzeln aber, z. E. die Wurzel $z=-\frac{2}{3}$ drücke man so aus, daß der Nenner negativ ist, man setze also $z=\frac{2}{-3}$. Auf diese Art ist das Product aus allen Nennern derjenigen Wurzeln, welche man als Brüche ansieht, $=2\times-3\times4=-24$, wie es seyn muß, und man erhält nun für die Function $-24z^5+2z^4+15z^3-10z^2-\frac{7}{2}z+3$ die Factoren $2z-1$

-3

$-3z-2,\ 4z+3,\ z-\frac{1+\sqrt{-1}}{2},\ z-\frac{1-\sqrt{-1}}{2}$. Demnach muß

$$3-\frac{7}{2}z-10z^2+15z^3+2z^4-24z^5$$

$$=(-1+2z)(-2-3z)(3+4z)\left(-\frac{1+\sqrt{-1}}{2}+z\right)\left(-\frac{1-\sqrt{-1}}{2}+z\right)$$

oder, wenn man einen jeden der beyden ersten und beyden letzten Factoren negativ nimmt,

$$=(1-2z)(2+3z)(3+4z)\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{2}-z\right)\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{2}-z\right)$$ seyn.

*) Die beyden imaginären Factoren geben hier den **doppelten reellen** Factor $\frac{1}{2}-z+z^2$, und man kann also auch die obige Function $=(1-2z)(2+3z)(3+4z)\left(\frac{1}{2}-z+z^2\right)$ setzen.

§. 69.

Es lassen sich aber nach dem bisher gezeigten Verfahren wegen der Schwierigkeiten, mit welchen die Bestimmung der **imaginären** Wurzeln der höhern Gleichungen verbunden ist, die **imaginären einfachen** Factoren der ganzen Functionen nur sehr schwer finden; daher soll nun noch ein zweytes Verfahren gezeigt werden, nach welchem man die **imaginären einfachen** Factoren der ganzen Functionen aufsuchen kann. Es beruht dieses Verfahren darauf, daß man diejenigen **reellen doppelten** Factoren der ganzen Functionen zu bestimmen sucht, welche Producte aus zwey **imaginären einfachen** Factoren sind, und die man gewöhnlich wegen der Anzahl ihrer Glieder **dreytheilige** Factoren nennt, welche Benennung auch hier beybehalten werden soll. Sobald man nehmlich die **dreytheiligen** Factoren einer ganzen Function, welche **imaginäre einfache** Factoren enthält, anzugeben im Stande ist; so lassen sich auch, wie man leicht einsieht, ohne Schwierigkeit die darinnen enthaltenen **imaginären einfachen** Factoren bestimmen.

§. 70.

"Man soll zeigen, auf welche Art man untersuchen kann, ob eine vorgegebene ganze "Function $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n$, deren Coef-"ficienten A, B, C, D ... M, N bekannte Größen sind, **dreytheilige** Factoren ent-"hält und wie dieselben, wenn dieses wirklich der Fall ist, nebst den in ihnen enthaltenen "**imaginären einfachen** Factoren heißen."

 1) Wenn

1) Wenn die vorgelegte Function Z **dreytheilige** Factoren enthält; so müssen sich dieselben in der Form $p - 2pqz \, \text{Cos} \, \varphi + q^2 z^2$ vorstellen lassen, denn diese ist eine allgemeine Form der **dreytheiligen** Factoren (§. 64.). Es sind aber die beyden **imaginären** Wurzeln eines so geformten dreytheiligen Factors folgende:

$$\frac{p}{q} (\text{Cos} \, \varphi + \text{Sin} \, \varphi \sqrt{-1}), \quad \frac{p}{p} (\text{Cos} \, \varphi - \text{Sin} \, \varphi \sqrt{-1})$$

und die beyden aus ihnen formirten **imaginären einfachen** Factoren heißen

$$p (\text{Cos} \, \varphi + \text{Sin} \, \varphi \sqrt{-1}) - qz, \quad p (\text{Cos} \, \varphi - \text{Sin} \, \varphi \sqrt{-1}) - qz,$$

worinnen unter p und q **reelle** Größen zu verstehen sind und φ alle möglichen Kreisbögen bedeuten kann, ausgenommen die Bögen $2k\pi$ und $(2k + 1)\pi$, deren Sinus $= 0$ und Cosinus entweder $= +1$ oder $= -1$ seyn müssen (§. 64.). Hat also die vorgegebene Function Z dreytheilige Factoren, und man stellt sich dieselben unter der Form $p^2 - 2pqz \, \text{Cos} \, \varphi + q^2 z^2$ vor; so muß sie auch, weil die einfachen Factoren und Wurzeln eines zusammengesetzten Factors einer Function Z zugleich Factoren und Wurzeln der Function selbst seyn müssen, imaginäre einfache Factoren und Wurzeln von den vorhin angegebenen Formen enthalten. Da aber zu diesen Factoren und Wurzeln Größen p, q und φ in der vorhin angegebenen Bedeutung gehören; so muß es für eine jede ganze Function Z, welche dreytheilige Factoren enthalten soll, **reelle** und durch die Function selbst **bestimmte** Größen p, q und φ geben, aus denen sich in Verbindung mit der Größe z nach den vorhin erwähnten Formen die Factoren und Wurzeln bilden lassen. Hingegen wird es für eine ganze Function Z, welcher keine dreytheiligen Factoren zukommen, auch keine **reellen** Größen p, q und φ geben können. Man wird demnach bey einer jeden vorgegebenen ganzen Function Z, von der man wissen will, ob sie dreytheilige Factoren enthält, nur untersuchen dürfen, ob sich aus ihr **reelle** Werthe für p, q und φ ableiten lassen, wobey man jedoch immer vor Augen haben muß, daß unter den **reellen** Werthen von φ blos diejenigen in Betrachtung kommen, welche weder $2k\pi$ noch $(2k + 1)\pi$ sind.

Diese Untersuchung aber läßt sich auf folgende Art anstellen:

2) Man kann allemal bey der vorgegebenen Function Z, über welche die Untersuchung angestellt werden soll, einstweilen hypothetisch annehmen, daß sie dreytheilige Factoren von der Form $p^2 - 2pqz \, \text{Cos} \, \varphi + q^2 z^2$, und also auch Paare von imaginären Wurzeln enthalte, deren Formen folgende sind:

$$\frac{p}{q} (\text{Cos} \, \varphi + \text{Sin} \, \varphi \sqrt{-1}), \quad \frac{p}{q} (\text{Cos} \, \varphi - \text{Sin} \sqrt{-1})$$

(Nro. 1.)

(Nro. 1). Vermöge dieser Hypothese muß dann, wenn man eine jede der genannten Wurzeln an die Stellen von z in die Function Z setzt; diese Function zweymal = o werden, und man muß also zwey Gleichungen erhalten, in denen ausser den bekannten Größen A, B, C ... M, N blos noch die zwey unbekannten Größen $\frac{p}{q}$ und φ vorkommen. Daß es aber für diese beyden Gleichungen zusammengehörige Werthe von $\frac{p}{q}$ und φ geben muß, welche den Gleichungen ein Genüge leisten, dieß ist leicht einzusehen. Suchte man nun diese Werthe aus den Gleichungen abzuleiten und man fände, daß sie entweder alle, oder doch zum **Theil reell** sind, und daß überdieß unter den **reellen** Werthen von φ solche vorkommen, die weder $= 2\,k\,\pi$ noch $= (2\,k + 1)\,\pi$ sind; so wäre dieß ein Beweis, daß der vorgegebenen Function Z wirklich dreytheilige Factoren von der oben angegebenen Form zukommen. Fände man aber im Gegentheile, daß sich entweder gar keine **reellen** Werthe für $\frac{p}{q}$ und φ aus den erwähnten Gleichungen ableiten lassen, oder daß, wenn es auch **reelle** Werthe von $\frac{p}{q}$ und φ giebt, die Werthe von φ allemal $= 2\,k\,\pi$ oder $(2\,k + 1)\,\pi$ sind; so zeigte dies an, daß die Function Z keine dreytheilige Factoren enthalten kann.

3) Es scheint aber in der That die Formation der Gleichungen, welche man erhält, wenn man in der Function Z überall an die Stelle von z zuerst die Wurzel $\frac{p}{q}\,(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})$ und hernach auch die Wurzel $\frac{p}{q}\,(\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})$ setzt, sehr beschwerlich und die Ableitung der Werthe von $\frac{p}{q}$ und φ aus denselben nicht ausführbar zu seyn. Dieses wäre auch wirklich der Fall, wenn nicht hier mancherley Abkürzungen möglich wären, welche sich auf die besondere trigonometrische Form gründen, in welcher wir die beyden imaginären Wurzeln ausgedrückt haben. Diese sollen nun gezeigt werden.

a) Es ist $(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})^2 = \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1} - \mathrm{Sin}\,\varphi^2$. Weil nun, wie aus der Trigonometrie bekannt ist, statt $\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2$ der Werth $\mathrm{Cos}\,2\,\varphi$ und ferner statt $2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ der Werth $\mathrm{Sin}\,2\,\varphi$ gesetzt werden kann; so ist
$(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})^2 = \mathrm{Cos}\,2\,\varphi + \mathrm{Sin}\,2\,\varphi\,\sqrt{-1}$. Nun ist aber auch

b) $(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})^3 = (\text{Cos}\,2\varphi + \text{Sin}\,2\varphi\sqrt{-1})\,(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})$
$= \text{Cos}\,2\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,2\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi\,.\sqrt{-1} + \text{Cos}\,2\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1}$
$- \text{Sin}\,2\varphi\;\text{Sin}\,\varphi,$

und weil $\text{Cos}\,2\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi - \text{Sin}\,2\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi = \text{Cos}\,(2\varphi + \varphi) = \text{Cos}\,3\varphi$ und $(\text{Sin}\,2\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,2\varphi\;\text{Sin}\,\varphi)\sqrt{-1} = \text{Sin}\,(2\varphi + \varphi)\sqrt{-1}$ $= \text{Sin}\,3\varphi\,.\sqrt{-1}$ seyn muß; so erhält man hier

$$(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})^3 = \text{Cos}\,3\varphi + \text{Sin}\,3\varphi\sqrt{-1}.$$

c) Es ist also $(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})^2 = \text{Cos}\,2\varphi + \text{Sin}\,2\varphi\sqrt{-1}$ und $(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})^3 = \text{Cos}\,3\varphi + \text{Sin}\,3\varphi\sqrt{-1}$; daraus aber läßt sich vermuthen, daß demselben Gesetze, nach welchem hier die erste und zweyte Potenz der Größe $\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1}$ ausgedrückt ist, auch eine jede nte Potenz unterworfen werden könne, daß also

$$(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})^n = \text{Cos}\,n\,\varphi + \text{Sin}\,n\,\varphi\sqrt{-1}$$

seyn müsse. Wir wollen einmal setzen, es sey dieses richtig, und wollen unter dieser Voraussetzung die $(n+1)$te Potenz aufsuchen. Es muß bey der gemachten Hypothese

$$(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})^{n+1} = (\text{Cos}\,n\,\varphi + \text{Sin}\,n\,\varphi\sqrt{-1})\,(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})$$
$$= \text{Cos}\,n\,\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,n\,\varphi\;\text{Cos}\,\varphi\,.\sqrt{-1}$$
$$+ \text{Cos}\,n\,\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi\,.\sqrt{-1} - \text{Sin}\,n\,\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi$$

seyn, welches, wenn man

$\text{Cos}\,n\,\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi - \text{Sin}\,n\,\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi = \text{Cos}\,(n\,\varphi + \varphi) = \text{Cos}\,(n+1)\,\varphi$ und $(\text{Sin}\,n\,\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,n\,\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi)\sqrt{-1} = \text{Sin}\,(n\,\varphi + \varphi)\,.\sqrt{-1}$
$= \text{Sin}\,(n+1)\,\varphi\,.\sqrt{-1}$

setzt, die nachstehende Gleichung giebt:

$$(\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})^{n+1} = \text{Cos}\,(n+1)\,\varphi + \text{Sin}\,(n+1)\,\varphi\sqrt{-1}.$$

Aus ihr erkennt man, daß das Gesetz für die $(n+1)$te Potenz der Größe $\text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi\sqrt{-1}$ noch eben das ist, welches für die nte Potenz angenommen wurde. Nun giebt es aber wirklich eine nte Potenz von dieser Größe, die 2te und 3te nehmlich, für welche das Gesetz keine Hypothese ist; also muß es auch für die $(3+1)$te oder 4te, und darum wieder für die $(4+1)$te oder 5te u. s. w. d. h. es muß für eine jede nte Potenz gültig seyn.

Man

Man sieht leicht ein, daß auf dieselbe Art auch

$(\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})^n = \mathrm{Cos}\,n\,\varphi - \mathrm{Sin}\,n\,\varphi\,\sqrt{-1}$ gesetzt werden kann.

d) Man setze nun $\frac{p}{q} = r$, dann ist

$$\left[\frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})\right]^n = r^n(\mathrm{Cos}\,n.\,\varphi + \mathrm{Sin}\,n\,\varphi\,\sqrt{-1})$$

$$\left[\frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})\right]^n = r^n(\mathrm{Cos}.\,n.\,\varphi - \mathrm{Sin}\,n.\,\varphi\,\sqrt{-1}),$$

und man erhält, wenn man die erwähnte Substitution vornimmt, die beyden Gleichungen

$$(\natural)\ A + B.\,r(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1}) + C\,r^2(\mathrm{Cos}\,2\,\varphi + \mathrm{Sin}\,2\,\varphi\,\sqrt{-1}) + D\,r^3(\mathrm{Cos}\,3\,\varphi + \mathrm{Sin}\,3\,\varphi\,\sqrt{-1}) + \ldots + N\,r^n(\mathrm{Cos}\,n\,\varphi + \mathrm{Sin}\,n\,\varphi\,\sqrt{-1}) = 0;$$

$$(\delta)\ A + B\,r(\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1}) + C\,r^2(\mathrm{Cos}\,2\,\varphi - \mathrm{Sin}\,2\,\varphi\,\sqrt{-1}) + D\,r^3(\mathrm{Cos}\,3\,\varphi - \mathrm{Sin}\,3\,\varphi\,\sqrt{-1}) + \ldots + N\,r^n(\mathrm{Cos}.\,n\,\varphi - \mathrm{Sin}\,n\,\varphi\,\sqrt{-1}) = 0.$$

e) Aus diesen beyden Gleichungen folgt, wenn man die Gleichung (δ) zu der Gleichung ($\natural$) addirt und dann mit 2 dividirt, die Gleichung I) und, wenn man die Gleichung (δ) von der Gleichung ($\natural$) subtrahirt, und hernach den Rest durch $2\sqrt{-1}$ dividirt, die Gleichung II) der beyden hier folgenden Gleichungen:

$$\text{I)}\ A + B\,r\,\mathrm{Cos}\,\varphi + C\,r^2\,\mathrm{Cos}\,2\,\varphi + D\,r^3\,\mathrm{Cos}\,3\,\varphi + \ldots + N\,r^n\,\mathrm{Cos}\,n\,\varphi = 0$$

$$\text{II)}\ B\,r\,\mathrm{Sin}\,\varphi + C\,r^2\,\mathrm{Sin}\,2\,\varphi + D\,r^3\,\mathrm{Sin}\,3\,\varphi + \ldots + N\,r^n\,\mathrm{Sin}\,n\,\varphi = 0$$

4) Dieses sind die bequemsten Gleichungen, die sich für die Bestimmung der Werthe $r = \frac{p}{q}$ und φ angeben lassen, und aus welchen man, wie die Folge zeigen wird, in mehrern Fällen selbst auf eine sehr leichte Art, die Werthe von r und φ ableiten kann.

Man bemühe sich also, wenn man für eine bestimmte vorgegebene Function die beyden Gleichungen I) und II) gehörig formirt hat, **alle reellen** Werthe von $r = \frac{p}{q}$ und φ, im Falle es dergleichen Werthe giebt, aus den beyden Gleichungen abzuleiten. Hat man

man dieselben erhalten; so nehme man die jedesmal zusammengehörigen Werthe von p, q und φ, und setze sie in den in Nro. 1. stehenden allgemeinen Ausdruck für die dreytheiligen Factoren, und auch, wenn man die demselben jedesmal entsprechenden imaginären einfachen Factoren haben will, in die in Nro. 1. aufgestellten allgemeinen Ausdrücke für dieselben. Auf diesem Wege wird man alle dreytheiligen und auch alle imaginären einfachen Factoren entdecken, welche der vorgegebenen Function Z zugehören.

In den nachfolgenden §§. wollen wir das bisher gezeigte allgemeine Verfahren auf einige bestimmte vorgegebene Functionen wirklich anwenden, und hierbey wird sich das noch aufklären, was vielleicht bis jetzt noch undeutlich ist.

§. 71.

"Man soll die gehörige Untersuchung über die dreytheiligen Factoren der ganzen "Function $Z = \alpha \pm z^n$ anstellen, und soll angeben, wie dieselben, wenn es dergleichen "Factoren giebt, heißen."

Wenn man den Verlauf der hier folgenden Rechnung betrachtet; so wird man finden, daß dieselbe einfacher und leichter ist, wenn die Größe α in der Form a^n vorgestellt wird. Da wir diese Vorstellung ungehindert wählen können; so wollen wir wirklich $\alpha = a^n$ setzen, wo denn $a = \sqrt[n]{\alpha}$ ist, und also annehmen, $a^n \pm z^n$ sey die in ihre dreytheiligen Factoren aufzulösende Function Z. Zuerst wollen wir, weil die verschiedenen in der vorgegebenen Function Z vorkommenden Zeichen (+) und (—) verschiedene Betrachtungen verursachen, die Function $a^n + z^n$ betrachten. Es sey also

A) $Z = a^n + z^n$ die vorgegebene Function, über welche die Untersuchung angestellt werden soll.

1) Wenn man diese Function mit der allgemeinen Function $Z = A + Bz$ $Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$ (§. 70.) vergleicht; so findet man, daß hier $A = a^n$, $B = 0$; $C = 0$ ꝛc. $N = 1$ ist. Für diese Werthe von A, B, C ... N aber verwandeln sich die beyden Gleichungen in §. 70. Nro. 3., e. in die nachstehenden:

$$\text{I)}\ a^n + r^n \operatorname{Cos} n\varphi = 0;\quad \text{II)}\ r^n \operatorname{Sin} n\varphi = 0,$$

und dieses sind hier die beyden Gleichungen, aus denen sich für die Function $a^n + z^n$ die Werthe von $r = \frac{p}{q}$ und φ ableiten lassen, die zur Bestimmung der dreytheiligen Factoren der genannten Function nöthig sind. Die Ableitung ist folgende:

2) Aus



2) Aus der Gleichung II) ergiebt sich sogleich der Werth von $n\,\varphi$. Es soll nehmlich nach der Forderung dieser Gleichung $r^n \operatorname{Sin} n\,\varphi = 0$, und also $\operatorname{Sin} n\,\varphi = \frac{0}{r^n} = 0$ seyn. Da nun blos für Bögen $2\,k\,\pi$ und $(2\,k + 1)\,\pi$ die Sinus $= 0$ seyn können; so muß hier entweder

$$n\,\varphi = 2\,k\,\pi \text{ und also } \varphi = \frac{2\,k\,\pi}{n}, \text{ oder es muß}$$

$$n\,\varphi = (2\,k + 1)\,\pi \text{ und folglich } \varphi = \frac{(2\,k + 1)\,\pi}{n} \text{ seyn.}$$

Man setze nun **zuerst** $n\,\varphi = 2\,k\,\pi$.

Für diesen aus der Gleichung II) folgenden Werth von $n\,\varphi$ verwandelt sich die Gleichung I) in die nachstehende Gleichung

$$a^n + r^n \operatorname{Cos} 2\,k\,\pi = 0,$$

welche, weil $\operatorname{Cos} 2\,k\,\pi = +1$ ist, $a^n + r^n = 0$, und also $r = \sqrt[n]{-a^n}$ giebt. Man sieht, daß dieser Werth von $r = \frac{p}{q}$ **imaginär** ist, wenn n eine **gerade**, **negativ** aber, wenn n eine **ungerade** Zahl bedeutet, und daß man also hier den Werth $2\,k\,\pi$ für $n\,\varphi$ nicht gebrauchen kann.

Man setze **zweytens** $n\,\varphi = (2\,k + 1)$, wo dann $\varphi = \frac{(2\,k + 1)\,\pi}{n}$ seyn muß.

Für diesen aus der Gleichung II) folgenden Werth von $n\,\varphi$ verwandelt sich die Gleichung I) in folgende:

$$a^n + r^n \operatorname{Cos} (2\,k + 1)\,\pi = 0,$$

aus welcher, weil $\operatorname{Cos} (2\,k + 1)\,\pi = -1$ seyn muß, die Gleichung $a^n - r^n = 0$ und mithin der Werth von r oder $\frac{p}{q} = a$ folgt, und woraus sich ferner für p der Werth $= a$ und für q der Werth $= 1$ ergiebt. Aus den Werthen $\varphi = \frac{(2k + 1)\,\pi}{n}$, $p = a$ und $q = 1$ sieht man, daß die Function $a^n + z^n$ ganz gewiß dreytheilige Factoren enthält. Man nehme also diese Werthe, und setze sie in die allgemeine Formel $p^2 - 2\,p\,q\,z \operatorname{Cos} \varphi + q^2 z^2$, um die der Function $a^n + z^n$ zugehörigen dreytheiligen Factoren zu bestimmen. Durch die erwähnte Substitution erhält man den Ausdruck $a^2 - 2\,a\,z \operatorname{Cos} \frac{(2\,k + 1)\,\pi}{n} + z^2$, und dieses ist der **allgemeine** Ausdruck für **alle** der

 Fun-

Function $a^n + z^n$ zugehörigen dreytheiligen Factoren, aus welchen sich nun die **bestimmten** dreytheiligen Factoren ableiten lassen müssen, indem man für k der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 . . . setzt. Es muß aber, ehe diese Ableitung vorgenommen wird, bestimmt werden, **wie viele** dreytheilige Factoren aus dem Ausdrucke $a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{(2k+1)\pi}{n} + z^2$, in welchem k überhaupt **eine ganze** Zahl bedeutet, abgeleitet werden dürfen, denn daß die Function $a^n + z^n$ gewiß nicht eben so viele dreytheilige Factoren enthält, als wie viel k bestimmte Werthe haben kann, dieß ist leicht einzusehen.

3) Man setze also, es sey der Gradexponent n der Function $a^n + z^n$ eine **gerade** Zahl, und bestimme zuerst für diesen Fall die mögliche Anzahl der dreytheiligen Factoren, die der Function $a^n + z^n$ zugehören.

Diese Bestimmung ist leicht. Da eine jede ganze Function Z von z, deren Gradexponent n **gerad** ist, n **imaginäre** einfache Factoren haben kann (§. 58.), zwey solche Factoren aber einen dreytheiligen Factor geben können (§. 63.); so fällt sogleich in die Augen, daß die Anzahl der dreytheiligen Factoren einer ganzen Function Z wohl $< \frac{n}{2}$ oder $= \frac{n}{2}$, nie aber $> \frac{n}{2}$ seyn kann. Es ist also die **größte** Anzahl der dreytheiligen Factoren, welche der Function $a^n + z^n$ zukommen mögen, $= \frac{n}{2}$, wenn n eine **gerade** Zahl bedeutet.

Nun setze man auch, der Gradexponent n der Function $a^n + z^n$ sey eine **ungerade** Zahl.

Bekanntlich muß eine jede ganze Function Z von z in dem Falle, wenn ihr Gradexponent **ungerad** ist, unter denen ihr zugehörigen n einfachen Factoren wenigstens **einen reellen** Factor haben, die $n - 1$ übrigen einfachen Factoren aber können **alle imaginär** seyn (§. 58.). Da nun jedesmal **zwey** imaginäre einfache Factoren zu einem dreytheiligen Factor erforderlich sind; so erhellet, daß die Anzahl der einer ganzen Function Z von z zugehörigen dreytheiligen Factoren wohl $< \frac{n-1}{2}$ oder $= \frac{n-1}{2}$ seyn, nie aber die Zahl $\frac{n-1}{2}$ übersteigen kann, sobald der Gradexponent n zu den **ungeraden** Zahlen gehört. Die Function $a^n + z^n$ enthält folglich, wenn n **ungerad** ist, außer dem **einen** reellen einfachen Factor, der ihr nothwendig zukommen muß, höchstens nur $\frac{n-1}{2}$ dreytheilige Factoren.

4) Aus

4) Aus Nro. 3. läßt sich nun bestimmen, wie groß man k, und also die Größe $2k+1$ nehmen darf. Die Reihe der Werthe für k ist 0, 1, 2, 3 ꝛc., und man erhält hier für $k=0$ den **ersten** dreytheiligen Factor, weil für $k=0$ allemal $\mathrm{Cos}\,\frac{2k+1}{n}\pi = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\pi$ wird, welcher weder $=+1$ noch $=-1$ ist. Daher muß man, um den **zweyten** dreytheiligen Factor zu erhalten, $k=1$, um den **dritten** zu erhalten, $k=2$ ꝛc. setzen. Wenn also n **gerad**, und folglich die Anzahl der dreytheiligen Factoren $=\frac{n}{2}$ ist; so muß man, um den $\frac{n}{2}$ten oder **letzten** dreytheiligen Factor zu bekommen, $k=\frac{n}{2}-1$ setzen. Da aber schon der letzte Factor für $=\frac{n}{2}-1$ erhalten wird; so kann k nie $>\frac{n}{2}-1$, und also $2k+1$ nie grösser $n-1$ genommen werden.

Ist ferner n **ungerad**; so kann, weil hier ebenfalls der **erste** dreytheilige Factor für $k=0$, der **zweyte** für $k=1$, der **dritte** für $k=2$ u. s. w., also der $\frac{n-1}{2}$te oder **letzte** für $k=\frac{n-1}{2}-1$ erhalten wird, k nie $>\frac{n-1}{2}-1$, und daher $2k+1$ nie $>n-2$ genommen werden.

Es findet demnach folgende Regel statt: "Man gehe mit den Werthen von $2k+1$ "nicht über $n-1$ hinaus, wenn n eine **gerade**, und nicht über $n-2$, wenn n eine "**ungerade** Zahl ist."

5) Nun wollen wir aus der für die dreytheiligen Factoren der Function a^n+z^n gefundenen **allgemeinen** Formel

$$a^2 - 2az\;\mathrm{Cos}\,\frac{2k+1}{n}\pi - z^2$$

(Nro. 2.) für mehrere **bestimmte** Werthe des Gradexponenten n die **bestimmten** dreytheiligen Factoren ableiten.

a) Es sey $n=1$.

Für diesen Werth von n ist die Function $a^n+z^n=a+z$, also eine Function vom **ersten** Grade, und es kann daher von dreytheiligen Factoren hier nicht die Rede seyn.

b) Es sey n = 2.

Für diesen Werth von n ist die Function $a^n + z^n = a^2 + z^2$. Diese kann nur $\frac{1}{2}$. 2 dreytheilige Factoren, d. h. nur **einen** dreytheiligen Factor enthalten, welcher sich für $2k + 1 = 2 . 0 + 1 = 1$ ergiebt, und dieser ist:

$a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\pi + z^2$, wofür man, weil $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\pi = 0$ seyn muß, $a^2 + z^2$ setzen kann. Der dreytheilige Factor ist hier die Function selbst.

c) Es sey n = 3.

Hierfür ist die Function $a^n + z^n = a^3 + z^3$. Diese muß wenigstens **einen** reellen einfachen Factor enthalten, welcher, wie man leicht sehen kann, $= a + z$ ist, und die Anzahl der dreytheiligen Factoren muß hier $= \frac{3-1}{2} = 1$ seyn. Man erhält denselben für $2k + 1 = 2 . 0 + 1 = 1$ und er ist $= a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{1}{3}\pi - z^2$.

d) Es sey n = 4.

Für n = 4 ist die Function $a^n + z^n = a^4 + z^4$, die größte Anzahl aller dreytheiligen Factoren aber ist hier $= \frac{4}{2} = 2$. Für $2k + 1 = 2 . 0 + 1 = 1$ erhält man den **einen**, nehmlich $a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{1}{4}\pi + z^2$, und für $2k + 1 = 2 . 1 + 1 = 3$ ergiebt sich der **andere**, welcher $a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{3}{4}\pi$ heißt.

e) Es sey n = 5.

Für diesen Werth von n ist die Function $a^n + z^n = a^5 + z^5$. Diese muß wenigstens **einen** reellen einfachen Factor haben, welcher hier $= a + z$ ist, die Anzahl ihrer dreytheiligen Factoren aber ist hier nicht über $\frac{5-1}{2} = 2$. Für $2k + 1 = 2 . 0 + 1 = 1$ erhält man den **einen**, welcher $a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{1}{5}\pi + z^2$ heißt, und für $2k + 1 = 2 . 1 + 1 = 3$ folgt der **andere**, nehmlich $a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{3}{5}\pi + z^2$.

f) Es sey n = 6.

Hierfür ist die Function $a^n + z^n = a^6 + z^6$, die Anzahl der dreytheiligen Factoren aber ist hier nicht über $\frac{6}{2} = 3$. Für $2k + 1 = 2 . 0 + 1 = 1$ folgt

$a^2 -$

$a^2 - 2az\ \mathrm{Cos}\ \frac{1}{6}\pi + z^2$; für $2k+1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ erhält man $a^2 - 2az \times \mathrm{Cos}\ \frac{3}{6}\pi + z^2$, und für $2k+1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ endlich ergiebt sich ein dritter Factor $a^2 - 2az\ \mathrm{Cos}\ \frac{5}{6}\pi + z^2$.

Auf ähnliche Art geschieht die Bestimmung der dreytheiligen Factoren der Funtion $a^n + z^n$ für andere Werthe des Exponenten n.

B) "Nun sollen auch die dreytheiligen Factoren der ganzen Function $Z = a^n - z^n$ "bestimmt werden."

1) Diese Function giebt, wenn man sie mit der allgemeinen in §. 70. vergleicht, wiederum $A = a^n$, $B = 0$, $C = 0$ ꝛc., N aber ist hier $= -1$. Hierfür verwandeln sich die beyden Gleichungen in §. 70. Nro. 3. e. in die nachstehenden:

$$\text{I)}\ a^n - r^n\ \mathrm{Cos}\ n\varphi = 0; \quad \text{II)}\ r^n\ \mathrm{Sin}\ n\varphi = 0.$$

2) Aus der Gleichung II) folgt $n\varphi = 2k\pi$ oder $= (2k+1)\pi$, und also $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ oder $= \frac{(2k+1)\pi}{n}$. Setzt man für $n\varphi$ den Werth $(2k+1)\pi$ in die Gleichung I); so erhält man $a^n - r^n\ \mathrm{Cos}\ (2k+1)\pi = 0$, oder, weil $\mathrm{Cos}\ (2k+1)\pi = -1$ ist, $a^n + r^n = 0$, woraus dann $r = \sqrt[n]{-a^n}$ folgt, welcher Werth von r oder $\frac{p}{q}$ nicht brauchbar ist. Setzt man aber für $n\varphi$ den Werth $2k\pi$ in die Gleichung I); so folgt $a^n - r^n\ \mathrm{Cos}\ 2k\pi = 0$, oder, weil $\mathrm{Cos}\ 2k\pi = +1$ seyn muß, $a^n - r^n = 0$, woraus dann r oder $\frac{p}{q} = a$ folgt, weswegen $p = a$ und $q = 1$ gesetzt werden muß.

3) Für die Werthe $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, $p = a$, $q = 1$ hat die Function $a^n - z^n$ ganz gewiß dreytheilige Factoren, und der allgemeine Ausdruck für dieselben wird erhalten, wenn man diese Werthe in die allgemeine Formel $p^2 - 2pqz\ \mathrm{Cos}\ \varphi + q^2z^2$ setzt, er ist folgender:

$$a^2 - 2az\ \mathrm{Cos}\ \frac{2k\pi}{n} + z^2.$$

4) Die Reihe der Werthe für k ist: 0, 1, 2, 3 ꝛc. Für den Werth $k = 0$ aber erhält man hier darum keinen dreytheiligen Factor, weil $\mathrm{Cos}\ \frac{2.0.\pi}{n}$ oder $\mathrm{Cos}\ 0.\pi = +1$ ist, und der **erste** Werth von k, für welchen man einen dreytheiligen Factor erhal-

erhalten kann, ist hier der Werth = 1, denn hierfür wird Cos $\frac{2k\pi}{n}$ = Cos $\frac{2\pi}{n}$, dessen Werth weder = + 1 noch = − 1 ist. Demnach muß man nun den **zweyten** dreytheiligen Factor für k = 2, den **dritten** für k = 3 ꝛc., folglich, wenn n **gerad** ist, den $\frac{n}{2}$ten oder **letzten** für k = $\frac{n}{2}$ und, wenn n **ungerad** ist, den $\frac{n-1}{2}$ten oder **letzten** für k = $\frac{n-1}{2}$ suchen. Daraus folgt die Regel:

"Wenn n **gerad** ist, so gehe man mit den Werthen von k nicht über $\frac{n}{2}$, und also "mit den Werthen von 2 k nicht über n hinaus; ist hingegen n **ungerad**, so lasse man "k nicht über $\frac{n-1}{2}$ und folglich 2 k nicht über n − 1 steigen."

5) Setzt man nun für mehrere bestimmte Werthe von n in folgenden Ausdruck $a^2 - 2az\,\text{Cos}\,\frac{2k\pi}{n} + z^2$ die Werthe 1, 2, 3 ꝛc. für k, und zwar von k = 1 an bis zu den durch n bestimmten Gränzen von k; so erhält man die bestimmten dreytheiligen Factoren, die der Function $a^n - z^n$ für die bestimmten Werthe von n zugehören müssen.

a) Für n = 1 ist die Function $a^n - z^n = a - z$, und es ist also hier von keinen dreytheiligen Factoren die Rede.

b) Für n = 2 ist die Function $a^n - z^n = a^2 - z^2$, und die Anzahl der dreytheiligen Factoren muß hier $\frac{n}{2} = \frac{2}{2} = 1$ seyn. Für k = 1 wird hier Cos $\frac{2k\pi}{n}$ = Cos $\frac{2\pi}{2}$ = Cos $\pi = -1$, daher giebt es keinen dreytheiligen Factor, sondern die Function $a^2 - z^2$, welche hier der dreytheilige Factor selbst seyn müßte, ist ein Product aus zwey **reellen** einfachen Factoren. Bekanntlich ist $a^2 - z^2 = (a+z)(a-z)$.

c) Für n = 3 ist die Function $a^n - z^n = a^3 - z^3$, und diese hat wenigstens **einen** reellen einfachen Factor, die Anzahl der ihr zugehörenden dreytheiligen Factoren aber ist $= \frac{n-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$. Für k = 1 ist hier Cos $\frac{2k\pi}{n}$ = Cos $\frac{2}{3}\pi$, und der dreytheilige Factor heißt also $a^2 - 2az\,\text{Cos}\,\frac{2}{3}\pi + z^2$.

d) Für

d) Für $n = 4$ ist $a^n - z^n = a^4 - z^4$, und die größte Anzahl der dreytheiligen Factoren ist hier $= \frac{n}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Man setze nun zuerst $k = 1$, dann wird $\mathrm{Cos}\,\frac{2\,k\,\pi}{n} = \mathrm{Cos}\,\frac{2\,\pi}{4} = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\pi = 0$, und der dreytheilige Factor heißt demnach $a^2 - 2\,a\,z\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\pi + z^2 = a^2 + z^2$. Man setze ferner $k = 2$, hierfür wird $\mathrm{Cos}\,\frac{2\,k\,\pi}{4} = \mathrm{Cos}\,\pi = -1$, und es kann also hier kein dreytheiliger Factor Statt haben. Da nun $2\,k$ nicht über $2\,n$, folglich hier nicht über $2 \cdot 2 = 4$ genommen werden darf; so hat hiermit die Substitution ein Ende. Man erhält also keinen dreytheiligen Factor mehr, und es muß der zweyte **doppelte** Factor, der hier doch noch vorhanden seyn muß, ein Factor seyn, dessen **einfache** Factoren beyde **reell** sind. Er heißt $a^2 - z^2$ und ist $= (a + z)\,(a - z)$.

e) Für $n = 5$ ist $a^n - z^n = a^5 - z^5$. Bey der gehörig vorgenommenen Untersuchung erhält man hier den einfachen reellen Factor $a - z$ und die beyden dreytheiligen Factoren $a^2 - 2\,a\,z\,\mathrm{Cos}\,\frac{2}{5}\,\pi + z^2$, $a^2 - 2\,a\,z\,\mathrm{Cos}\,\frac{4}{5}\,\pi + z^2$.

f) Für $n = 6$ ist $a^n - z^n = a^6 - z^6$. Man findet hier einen **doppelten** Factor, dessen **einfache** Factoren beyde reell sind, nehmlich den Factor $a^2 - z^2$ $= (a + z)\,(a - z)$ und die beyden dreytheiligen Factoren $a^2 - 2\,a\,z\,\mathrm{Cos}\,\frac{2}{6}\,\pi$ $+ z^2$, $a^2 - 2\,a\,z\,\mathrm{Cos}\,\frac{4}{6}\,\pi + z^2$.

§. 72.

"Man soll die gehörige Untersuchung über die dreytheiligen Factoren anstellen, welche einer ganzen Function $Z = \alpha \pm \beta\,z^n + z^{2n}$ zukommen mögen."

Wir wollen hier wegen der verschiedenen vor dem Gliede $\beta\,z^n$ stehenden Zeichen

A) die Function $\alpha - \beta\,z^n + z^{2n}$ vornehmen.

1) Wenn die Function $\alpha - \beta\,z^n + z^{2n}$ mit der allgemeinen Function in §. 70. gehörig verglichen wird, um für sie die beyden Gleichungen zu formiren, aus welchen die Größen $r = \frac{p}{q}$ und φ abgeleitet werden müssen; so findet man aus den allgemeinen

Glie

Gliedern der beyden Gleichungen I) und II) in §. 70. Nro. 3. e. die nachstehenden zwey Gleichungen

I) $\alpha - \beta r^n \operatorname{Cos} n \phi + r^{2n} \operatorname{Cos} 2 n \phi = 0$; II) $- \beta r^n \operatorname{Sin} n \phi + r^{2n} \times \operatorname{Sin} 2 n \phi = 0$.

Aus diesen nun muß man die Werthe für $r = \frac{p}{q}$ und ϕ abzuleiten suchen. Es ist aber diese Ableitung hier nicht so leicht zu Stande zu bringen, wie bey den Functionen im vorigen §. Daher wollen wir zuerst ein Verfahren zeigen, nach welchem man unter gewissen Umständen zur Bestimmung der dreytheiligen Factoren der Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$ gelangen kann, ohne daß man nöthig hat, den hier eingeschlagenen Weg zu wählen.

2) Gleich bey dem ersten Anblicke sieht man, daß sich die Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$ in zwey Factoren zerlegen läßt, welche beyde Functionen von der Form $a - z^n$ sind. Setzt man nehmlich $z^n = y$; so ist $\alpha - \beta z^n + z^{2n} = \alpha - \beta y + y^2$. Werden jetzt von der letzten Function die Wurzeln gesucht; so erhält man $y = \frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha)}}{2}$, $y = \frac{\beta - \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha)}}{2}$, von welchen wir kurz die eine durch a und die andere durch b bezeichnen wollen. Formirt man aber aus diesen Wurzeln die **einfachen** Factoren; so erhält man $\alpha - \beta y + y^2 = (a - y)(b - y)$, woraus dann, wenn wiederum anstatt y der Werth z^n gesetzt wird, $\alpha - \beta z^n + z^{2n} = (a - z^n)(b - z^n)$ folgt. Sind nun die letzten Functionen $a - z^n$ und $b - z^n$, in welche man auf dem eben gezeigten Wege die Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$ auflösen kann, **reell**; so kann man diese beyden Functionen nehmen und die ihnen zugehörigen dreytheiligen Factoren auf dem im vorigen §. gezeigten Wege aufsuchen, und man erhält hierdurch alle dreytheiligen Factoren der Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$. Sind aber die beyden Functionen $a - z^n$ und $b - z^n$ **imaginäre** Größen; so kann man freylich die dreytheiligen Factoren auf die bisher erwähnte Art nicht bestimmen, sondern man muß wirklich zu den in Nro. 1. angegebenen Gleichungen seine Zuflucht nehmen, und die Größen $r = \frac{p}{q}$ und ϕ zu bestimmen suchen.

Man sieht leicht ein, in welchem Falle der hier angegebene Weg eingeschlagen werden kann. Die beyden Functionen $a - z^n$ und $b - z^n$ sind gewiß nur in dem Falle **reell**, wenn der Coefficient β entweder $= 2\sqrt{\alpha}$ oder $> 2\sqrt{\alpha}$ ist, denn alsdann können die Wurzeln a und b nicht imaginär seyn.

3) Wir

3) Wir betrachten nun den Fall, wenn $\beta < 2\sqrt{\alpha}$ ist, und man aus den Gleichungen I) und II) in Nro. 1. die Werthe von r und φ zu erhalten suchen muß. Wir wollen aber erst, ehe wir mit der Ableitung der Werthe von r und φ den Anfang machen, der Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$ eine andere Form geben, welche unserem Zwecke angemessener ist, und hiernach auch die beyden Gleichungen I) und II) in Nro. 1. umformen. Ist $\beta < 2\sqrt{\alpha}$, so läßt sich β ganz gewiß durch $2\sqrt{\alpha} \times \mathrm{Cos}\,\psi$ ausdrücken, wenn man unter ψ Bögen versteht, welche weder $2k\pi$ noch $(2k+1)$, und deren Cosinus also entweder ächte Brüche bedeuten, oder $= 0$ sind. Man kann also ganz gewiß eine jede ganze Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$, welche sich nicht nach Nro. 2. in zwey reelle Functionen von der Form $a - z^n$ auflösen lassen will, in der Form $\alpha - 2z^n \mathrm{Cos}\,\psi \times \sqrt{\alpha} + z^{2n}$ darstellen. Ferner hindert uns nichts, α als eine Potenz einer Größe a vorzustellen und $= a^{2n}$ zu setzen, bey welcher Vorstellung alsdann $2\sqrt{\alpha} = 2\sqrt{a^{2n}} = 2a^n$ wird. Thun wir dieß, so wird $\alpha - 2z^n \mathrm{Cos}\,\psi . \sqrt{\alpha} + z^{2n} = a^{2n} - 2a^n . z^n . \mathrm{Cos}\,\psi + z^{2n}$, und dieß sey die Form, in welcher wir die Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$, in der $\beta < 2\sqrt{\alpha}$ ist, bey der Bestimmung der ihr zugehörigen dreytheiligen Factoren betrachten wollen.

4) Setzen wir nun statt α, a^{2n}, und statt β, $2a^n . \mathrm{Cos}\,\psi$ in den beyden Gleichungen I) und II) in Nro. 1.; so sehen dieselben so aus:

$$\text{I)}\quad a^{2n} - 2a^n . \mathrm{Cos}\,\psi . r^n . \mathrm{Cos}\,n\varphi + r^{2n} . \mathrm{Cos}\,2n\varphi = 0;$$

$$\text{II)}\quad -2a^n . \mathrm{Cos}\,\psi . r^n . \mathrm{Sin}\,n\varphi + r^{2n} . \mathrm{Sin}\,2n\varphi = 0.$$

Um aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von $r = \frac{p}{q}$ und φ auf eine bequeme Art auszumitteln; so multiplicire man die erste mit $\mathrm{Sin}\,n\varphi$, und die zweyte mit $\mathrm{Cos}\,n\varphi$, wodurch man die beyden nachstehenden Gleichungen erhält:

$$\text{III)}\quad a^{2n} . \mathrm{Sin}\,n\varphi - 2a^n . \mathrm{Cos}\,\psi . r^n . \mathrm{Cos}\,n\varphi . \mathrm{Sin}\,n\varphi + r^{2n} . \mathrm{Cos}\,2n\varphi . \mathrm{Sin}\,n\varphi = 0;$$

$$\text{IV)}\quad -2a^n . \mathrm{Cos}\,\psi . r^n . \mathrm{Cos}\,n\varphi . \mathrm{Sin}\,n\varphi + r^{2n} . \mathrm{Cos}\,n\varphi . \mathrm{Sin}\,2n\varphi = 0.$$

Wenn man nun die Gleichung IV) von der Gleichung III) abzieht, so erhält man ferner $a^{2n} . \mathrm{Sin}\,n\varphi + r^{2n} . (\mathrm{Cos}\,2n\varphi . \mathrm{Sin}\,n\varphi - \mathrm{Cos}\,n\varphi . \mathrm{Sin}\,2n\varphi) = 0$, oder

$$a^{2n} . \mathrm{Sin}\,n\varphi - r^{2n} . (\mathrm{Sin}\,2n\varphi\ \mathrm{Cos}\,n\varphi - \mathrm{Sin}\,n\varphi . \mathrm{Cos}\,2n\varphi) = 0,$$

wofür man aus bekannten Gründen auch setzen kann:

$$a^{2n} . \mathrm{Sin}\,n\varphi - r^{2n} . \mathrm{Sin}\,(2n\varphi - n\varphi) = 0, \text{ oder}$$

$$a^{2n} . \mathrm{Sin}\,n\varphi - r^{2n} . \mathrm{Sin}\,n\varphi = 0.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man aber, daß $a^{2n} = r^{2n}$, und also $a = r = \frac{p}{q}$ seyn muß, woraus $p = a$ und $q = 1$ folgt.

Wenn man jetzt ferner in der Gleichung IV) statt r den Werth $= a$ setzt, so erhält man

$$a^{2n} (- \text{Cos}\, \psi . 2 \text{Cos}\, n\, \varphi . \text{Sin}\, n\, \varphi + \text{Cos}\, n\, \varphi . \text{Sin}\, 2\, n\, \varphi) = 0,$$

wofür auch, weil bekanntlich $2 \text{Cos}\, n . \varphi . \text{Sin}\, n\, \varphi = \text{Sin}\, 2\, n\, \varphi$ ist, der Ausdruck

$a^{2n} (- \text{Cos}\, \psi . \text{Sin}\, 2\, n\, \varphi + \text{Cos}\, n\, \varphi . \text{Sin}\, 2\, n\, \varphi) = 0$ gesetzt werden kann.

Aus dieser letzten Gleichung folgt aber

$$a^{2n} . \text{Sin}\, 2\, n\, \varphi\, (\text{Cos}\, n\, \varphi - \text{Cos}\, \psi) = 0,$$

$$\text{d. h. } \text{Cos}\, n\, \varphi - \text{Cos}\, \psi = 0$$

$$\text{und } \text{Cos}\, n\, \varphi = \text{Cos}\, \psi.$$

Nun ist bekanntlich $\text{Cos}\, (2\, k\, \pi \pm \psi)$ allemal $= \text{Cos}\, \psi$, man kann demnach statt der vorigen Gleichung auch diese setzen:

$$\text{Cos}\, (2\, k\, \pi \pm \psi) = \text{Cos}\, n\, \varphi,$$

woraus $2\, k\, \pi \pm \psi = n\, \varphi$ und $\frac{2\, k\, \pi \pm \psi}{n} = \varphi$ folgt.

5) Setzt man diesen Werth von φ mit den Werthen, welche für p und q gefunden wurden, in den allgemeinen Ausdruck $p^2 - 2\, p\, q\, z\, \text{Cos}\, \varphi + z^2$; so ergiebt sich der nachstehende **allgemeine** Ausdruck

$$a^2 - 2\, a\, z\, \text{Cos}\, \frac{2\, k \pm \psi}{n} + z^2$$

für die dreytheiligen Factoren der in der Form $a^{2n} - 2\, a^n . z^n\, \text{Cos}\, \psi + z^{2n}$ vorgestellten ganzen Function $\alpha - \beta\, z^n + z^{2n}$, aus welchem nun für bestimmte Werthe von n alle bestimmten dreytheiligen Factoren der vorgegebenen Function abgeleitet werden können, indem man $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ rc. setzt. Da aber die vorgegebene Function vom 2nten Grade ist, und also nur $\frac{2\, n}{2} = n$ dreytheilige Factoren enthält; so wird man für k der Reihe nach nur so viele von seinen Werthen 0, 1, 2, 3 rc. bey der erwähnten Substitution gebrauchen dürfen, als wie viele jedesmal erforderlich sind, um die n Factoren zu erhalten.

6) Man setze nun a) die Größe $n = 1$. Dafür wird die Function

$$a^{2n} - 2\, a^n . z^n\, \text{Cos}\, \psi + z^{2n} = a^2 - 2\, a\, z\, \text{Cos}\, \psi + z^2,$$

und es giebt hier nur einen **einzigen** dreytheiligen Factor, welcher die Function selbst ist.

Man

Man setze b) die Größe n = 2. Hierfür wird die Function
$a^{2n} - 2a^n z^n . \text{Cos}\,\psi + z^{2n} = a^4 - 2a^2 . z^2 \ \text{Cos}\,\psi + z^4$, und die Anzahl der dreytheiligen Factoren ist = 2. Für k = 0 wird $\text{Cos}\,\frac{2k\pi \pm \psi}{n} = \text{Cos} \pm \frac{\psi}{2} = \text{Cos}\,\frac{\psi}{2}$, und $a^2 - 2az\ \text{Cos}\,\frac{2k\pi \pm \psi}{n} + z^2 = a^2 - 2az\ \text{Cos}\,\frac{\psi}{2} + z^2$. Für k = 1 wird $\text{Cos}\,\frac{2k\pi \pm \psi}{n} = \text{Cos}\,\frac{2\pi \pm \psi}{n} = \text{Cos}\,(\pi \pm \frac{\psi}{2}) = -\text{Cos}\,\frac{\psi}{2}$; demnach ist der andere dreytheilige Factor $= a^2 + 2az\ \text{Cos}\,\frac{\psi}{2} + z^2$.

Man setze c) die Größe n = 3. Hierfür wird die Function
$a^{2n} - 2a^n z^n\ \text{Cos}\,\psi + z^{2n} = a^6 - 2a^3 . z^3 . \text{Cos} + z^6$, und die Anzahl der dreytheiligen Factoren muß = 3 seyn. Für k = 0 wird hier $\text{Cos}\,\frac{2k\pi \pm \psi}{n} = \text{Cos} \pm \frac{\psi}{3} = \text{Cos}\,\frac{\psi}{3}$, und der **erste** dreytheilige Factor ist also $= a^2 - 2az\ \text{Cos}\,\frac{\psi}{3} + z^2$. Für k = 1 wird ferner $\text{Cos}\,\frac{2k\pi \pm \psi}{n} = \text{Cos}\,\frac{2\pi \pm \psi}{3}, = \text{Cos}\,\frac{2\pi + \psi}{3}$ oder $= \text{Cos}\,\frac{2\pi - \psi}{3}$. Man erhält also hier sogleich für k = 1 den **zweyten** und **dritten** der drey hier möglichen dreytheiligen Factoren, nehmlich: $a^2 - 2az\ \text{Cos}\,\frac{2\pi + \psi}{3} + z^2$ und $a^2 - 2az\ \text{Cos}\,\frac{2\pi - \psi}{3} + z^2$.

Man setze d) die Größe n = 4, wofür die Function
$a^{2n} - 2a^n . z^n\ \text{Cos}\,\psi + z^{2n} = a^8 - 2a^4 z^4\ \text{Cos}\,\psi + z^8$ wird, die Anzahl der dreytheiligen Factoren aber = 4 seyn muß. Für k = 0 wird hier $\text{Cos}\,\frac{2k\pi \pm \psi}{n} = \text{Cos} \pm \frac{\psi}{4} = \text{Cos}\,\frac{\psi}{4}$, und der **erste** dreytheilige Factor ist $= a^2 - 2az\ \text{Cos}\,\frac{\psi}{4} + z^2$. Für k = 1 muß $\text{Cos}\,\frac{2k\pi \pm \psi}{n} = \text{Cos}\,\frac{2\pi \pm \psi}{4}, = \text{Cos}\,\frac{2\pi + \psi}{4}$ oder $= \text{Cos}\,\frac{2\pi - \psi}{4}$ seyn, woraus

 der

der zweyte und dritte der hier Statt habenden vier dreytheiligen Factoren, nehmlich $a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{2\pi + \psi}{4} + z^2$ und $a^2 - 2az \operatorname{Cos} \frac{2\pi - \psi}{4} + z^2$ folgt. Für $k = 2$ endlich wird $\operatorname{Cos} \frac{2k\pi \pm \psi}{n} = \operatorname{Cos} \frac{4\pi \pm \psi}{4}$ $= \operatorname{Cos} (\pi \pm \frac{\psi}{4}) = - \operatorname{Cos} \frac{\psi}{4}$, und es muß also der vierte Factor $= a^2 + 2az \operatorname{Cos} \frac{\psi}{4} + z^2$ seyn.

Auf ähnliche Art erhält man auch für $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$ rc. die dreytheiligen Factoren der Function $a^{2n} - 2a^n z^n \operatorname{Cos} \psi + z^{2n}$.

B) Durch die Auflösung der Function $\alpha - \beta z^n + z^{2n}$ in die ihr zugehörigen dreytheiligen Factoren ist nun auch zugleich der Weg gezeigt, auf welchem sich die dreytheiligen Factoren einer jeden ganzen Function $\alpha + \beta z^n + z^{2n}$ angeben lassen, und es kann von nun an keine Function $\alpha \pm \beta z^n + z^{2n}$ mehr vorkommen, deren dreytheilige Factoren nicht nach dem in Nro. A. beobachteten Verfahren gefunden werden könnten.

§. 73.

Durch die in §. 71. und §. 72. gezeigte Bestimmung der dreytheiligen Factoren, welche den ganzen Functionen $\alpha \pm z^n$ und $\alpha \pm \beta z^n + z^{2n}$ zugehören können, ist hinlänglich erläutert, auf welche Art sich die in §. 70. angegebenen allgemeinen Regeln über die Untersuchung der dreytheiligen Factoren vorgegebener ganzer Functionen anwenden lassen. Hier wollen wir noch zeigen, wie man die Bestimmung der dreytheiligen Factoren der nachstehenden Functionen

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$$
$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n}$$
$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}$$

auf die in §. 71. und §. 72. angegebene Bestimmung der dreytheiligen Factoren solcher Functionen, deren Formen $\alpha \pm z^n$ und $\alpha \pm \beta z^n + z^{2n}$ sind, auf eine leichte Art zurückführen kann.

1) Es sey die ganze Function Z folgende:

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n},$$

welche für $n = 1$, $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ heißt.

Die

Die hier gegebene Function Z ist, wenn man den Coefficienten δ von z^{3n} trennt,

$$= \delta \left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} z^n + \frac{\gamma}{\delta} z^{2n} + z^{3n} \right),$$

und hierfür erhält man, wenn man die Größen $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ durch a, b, c bezeichnet,

$$\delta (a + b z^n + c z^{2n} + z^{3n}).$$

Man bekommt aber, wie leicht einzusehen ist, dreytheilige Factoren für die vorgegebene Function, wenn man dieselben für die Function $a + b z^n + c z^{2n} + z^{3n}$ sucht.

Man setze also $z^n = y$, dann wird die Function

$$a + b z^n + c z^{2n} + z^{3n} = a + b y + c y^2 + y^3,$$

und diese hat ganz gewiß wenigstens **eine reelle** Wurzel (§. 54.), welche hier α' heißen soll. Man suche sie und formire daraus den Factor $\alpha' \pm y$, dann dividire man denselben in die Function, wodurch sich ein Quotient ergeben muß, welcher eine **ganze** und mit **reellen** Coefficienten versehene Function von der Form $\alpha'' \pm \beta'' y + y^2$ ist. Man setze ferner in die beyden Factoren $\alpha' \pm y$ und $\alpha'' \pm \beta'' y + y^2$ statt y den Werth z^n, so erhält man die zwey Factoren

$$\alpha' \pm z^n \text{ und } \alpha'' \pm \beta'' z^n + z^{2n}$$

für die Function $a + b z^n + c z^{2n} + z^{3n}$, und dieser Factoren ihre dreytheiligen Factoren, welche auch die dreytheiligen Factoren der eben genannten Function sind, lassen sich gewiß nach §. 71. und §. 72. bestimmen. Man nehme die Bestimmung derselben wirklich vor, dann erhält man dreytheilige Factoren der vorgegebenen Function Z.

2) Es sey die ganze Function Z folgende:

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n},$$

welche für $n = 1$, $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$ heißt.

Die hier vorgegebene Function Z ist, wenn man den Coefficienten ε von z^{4n} trennt,

$$= \varepsilon \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon} z^n + \frac{\gamma}{\varepsilon} z^{2n} + \frac{\delta}{\varepsilon} z^{3n} + z^{4n} \right)$$

oder, wenn man kurz $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$, $\frac{\delta}{\varepsilon}$ durch a, b, c, d bezeichnet, $= \varepsilon (a + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + z^{4n})$, und man erhält hier wiederum dreytheilige Factoren für die vorgegebene Function, wenn man die der Function $a + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + z^{4n}$ zugehörigen dreytheiligen Factoren aufsucht.

Man setze also $z^n = y$; dann wird

$$a + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + z^{4n} = a + b y + c y^2 + d y^3 + y^4.$$

Es läßt sich aber nach §. 61. diese ganze Function vom vierten Grade ganz gewiß in zwey reelle Factoren auflösen, welche ganze Functionen vom zweyten Grade sind, und die wir durch $\alpha' \pm \beta' y + y^2$, $\alpha'' \pm \beta'' y + y^2$ bezeichnen können. Man suche diese und setze alsdann statt y wiederum die Größe z^n, so erhält man zwey Factoren

$$\alpha' \pm \beta' z^n + z^{2n}, \quad \alpha'' \pm \beta'' z^n + z^{2n}$$

für die Function $a + b z^n + c z^{2n}\ d z^{3n}$, deren dreytheilige Factoren sich nach §. 74. bestimmen lassen. Nimmt man nun diese Bestimmung vor, so erhält man die dreytheiligen Factoren der Function $a + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + z^{4n}$; welche auch zugleich dreytheilige Factoren der vorgegebenen Function sind.

3) Es sey die ganze Function Z diese:

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n},$$

welche für $n = 1$, $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5$ heißt.

Diese ist $= \zeta \left(\frac{\alpha}{\zeta} + \frac{\beta}{\zeta} z^n + \frac{\gamma}{\zeta} z^{2n} + \frac{\delta}{\zeta} z^{3n} + \frac{\varepsilon}{\zeta} z^{4n} + z^{5n}\right)$ oder,

wenn man die Coefficienten $\frac{\alpha}{\zeta}, \frac{\beta}{\zeta}, \frac{\gamma}{\zeta}$ ꝛc. kurz durch a, b, c ꝛc. ausdrückt,

$$= \zeta (a + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + e z^{4n} + z^5)$$

Es müssen aber die dreytheiligen Factoren der Function $a + b z^n + c z^{2n}$ ꝛc. zugleich auch dreytheilige Factoren der vorgegebenen Function Z seyn.

Man setze also $z^n = y$, wodurch

$$a + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + e z^{4n} + z^{5n} = a + b y + c y^2 + d y^3 + e y^4 + y^5$$

wird. Diese Function von y enthält gewiß eine reelle Wurzel α' (§. 54.), welche einen reellen Factor $\alpha' \pm y$ giebt. Man bestimme diese Wurzel und diesen Factor, und dividire denselben in die Function. Der durch die erwähnte Division erhaltene Quotus muß eine ganze Function seyn, deren Coefficienten reelle Größen sind, und deren Form folgende ist: $\alpha'' + \beta'' y + \gamma'' y^2 + \delta'' y^3 + y^4$. Diese zerlege man ferner nach §. 61. in ihre beyden reellen Factoren $\alpha''' \pm \beta''' y + y^2$, $\alpha'''' \pm \beta'''' y + y^2$, so erhält man,

man, wenn man nun wieder statt y die Größe z^n setzt, für die Function $a + b z^n$ $c z^{2n} + d z^{3n} + e z^{4n} + z^{6n}$ drey Factoren

$$\alpha' \pm z^n,\ \alpha''' \pm \beta''' z^n + z^{2n},\ \alpha'''' \pm \beta'''' z^n + z^{2n},$$

deren dreytheilige Factoren, welche zugleich auch der ebengenannten und der vorgegebenen Function zugehören, ebenfalls nach §. 71. und §. 72. bestimmt werden können.

2) Von den verschiedenen Formen, deren die gebrochenen Functionen fähig sind.

§. 74.

"In der nachstehenden Function

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z + \ldots + \mathfrak{L}z^{\mathfrak{n}-2} + \mathfrak{M}z^{\mathfrak{n}-1} + \mathfrak{N}z^{\mathfrak{n}}} \quad (k)$$

"sollen die Coefficienten **positive** oder **negative** endliche Größen seyn, welche eine jede "beliebige arithmetische Form haben und auch = o seyn können, übrigens aber von der "absolut veränderlichen Größe z ganz unabhängig sind. Die Exponenten n und $\mathfrak{n}$ sollen "ebenfalls endliche **ganze** und **positive** Zahlen bedeuten, welche von z nicht abhängen. "Ich behaupte, daß sich alle algebraischen Ausdrücke der gebrochenen Functionen, welche "nicht schon die Form der hier aufgestellten Functionen haben, auf diese Form müssen "zurückführen lassen."

1) Aus der Lehre von der Eintheilung der Functionen wissen wir, daß die gebrochenen Functionen zu den algebraischen und rationalen Functionen gehören, daß also die Anzahl ihrer Glieder endlich groß seyn muß, und daß die in den Gliedern vorkommende absolut veränderliche Größe z keinen Wurzelzeichen, oder gebrochenen Potenzenexponenten, wohl aber solchen Potenzenexponenten, welche ganze Zahlen sind, unterworfen seyn kann. Die Erklärung ferner, welche wir im §. 17. Nro. 4. über die gebrochenen Functionen gegeben haben, verlangt, daß eine jede Function, die zu den gebrochenen gehören soll, ausser andern Gliedern, die ihr zukommen können, auch solche Glieder enthalte, welche entweder Quotienten mit veränderlichen Divisoren, oder Glieder sind, in welchen die absolut veränderliche Größe ganzen negativen Potenzenexponenten unterworfen ist.

2) Dem-



2) Demnach kann die endliche Anzahl der Glieder einer gebrochenen Function nur drey verschiedene Arten von veränderlichen Gliedern enthalten, nehmlich: a) solche, in welchen die Größe z ganzen negativen Potenzenexponenten unterworfen ist; b) solche, welche Quotienten mit veränderlichen Divisoren und entweder constanten, oder auch veränderlichen Dividenden sind; c) solche einfache oder zusammengesetzte Glieder, welche auch als Glieder ganzer Functionen angesehen werden können (§. 24. Nro. 3.).

3) Es lassen sich aber nach der Lehre von den negativen Potenzenexponenten solche Größen, in welchen negative Potenzenexponenten vorkommen, allemal in gleichgeltende Größen mit positiven Potenzenexponenten umformen. Daher kann man gewiß allemal aus den Gliedern einer gebrochenen Function die negativen Potenzenexponenten durch die gehörige Umformung der Glieder in positive verwandeln, und man muß hierdurch Glieder erhalten, welche entweder von der Art in Nro. 2) b., oder von der Art in Nro. 2) c. sind.

4) Da sich nun alle Glieder, welche von der Art in Nro. 2) b., d. h. Quotienten mit veränderlichen Divisoren sind, durch die Reduction derselben auf ein und denselben Divisor und durch die Addition ihrer Zähler in einen einzigen Quotienten Q' verwandeln lassen müssen, und da ferner auch die Summe aller Glieder von der Art in Nro. 2) c., wenn dergleichen Glieder vorhanden sind, mit diesem Quotienten Q' wiederum zu einem einzigen neuen Quotienten Q'' verbunden werden können, indem man diese Summe mit dem Divisor von Q' zuerst multiplicirt, hernach dividirt, und alsdann die beyden Dividenden der nebeneinander stehenden und mit einerley Divisor versehenen Quotienten zusammen addirt; so erhellt, daß man gewiß alle Glieder einer gebrochenen Function zusammen in einem Quotienten Q vereinigt darstellen kann, dessen Dividendus und Divisor aus einfachen und zusammengesetzten Gliedern ganzer Functionen besteht, welche in §. 34. Nro. 3) beschrieben sind.

5) Die Summe solcher Glieder aber läßt sich jedesmal nach §. 34. auf die Form $A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^n$ bringen, demnach wird sich gewiß auch der Divisor und Dividendus von Q in dieser Form darstellen lassen. Die Anzahl der Glieder des in dieser Form dargestellten Divisors und Dividendus aber wird endlich werden müssen, welches leicht einzusehen ist.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich, daß die Behauptung des aufgestellten Lehrsatzes richtig ist.

§. 75.

§. 75.

1) Die im vorigen §. angegebene Form (h), auf welche sich alle gebrochenen Functionen Z von z zurückführen lassen, ist eine **allgemeine** Form der gebrochenen Functionen (§. 36.), und was also in der Folge von der Function (h) gelehrt und erwiesen wird, das ist auch von allen nur möglichen gebrochenen Functionen gelehrt und erwiesen (§. 38.).

2) Eine gebrochene Function auf diese allgemeine Form zurückführen heißt: dieselbe **formiren.** Eine jede in der allgemeinen Form dargestellte gebrochene Function ist daher eine **formirte.**

3) Eine formirte gebrochene Function wird **ächt** genannt, wenn der Potenzexponent der höchsten Potenz von z im Zähler größer ist, als im Nenner, **unächt** aber, wenn das Gegentheil Statt findet.

§. 76.

"Wenn eine gebrochene Function Z von z formirt worden ist, so kann in der Form

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n}$$

"das absolute Glied $\mathfrak{A}$ des Nenners den Werth = 0, oder den Werth = 1, oder irgend "einen Werth, welcher größer oder kleiner als 1 ist, erhalten haben. Ist nun

a) "das **absolute** Glied $\mathfrak{A}$ weder = 0, noch = 1; so kann man anstatt der durch "die Formation der Function Z erhaltenen Form eine andere derselben gleichgeltende "und ähnliche Form

$$\frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots + \lambda z^{n-2} + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{1 + az + bz^2 + cz^3 \ldots + lz^{n-2} + mz^{n-1} + nz^n}$$

"gebrauchen, in welcher das absolute Glied des Nenners = 1 ist, und die Coefficienten alle bestimmte Größen sind. Ist aber

b) "das **absolute** Glied $\mathfrak{A}$ = 0; so werden, wenn man statt der ersteren Form "die zweyte gebrauchen will, die Coefficienten in der zweyten Form unbestimmbar "große Größen. Dagegen kann man aber allemal eine solche Function Z in eine "Function von der Form

$$\frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \lambda z^{n-2} + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{z(1 + az + bz^2 + cz^3 + \ldots + lz^{n-3} + mz^{n-2} + nz^{n-1})}$$

"verwandeln."

1) Wenn in der durch Formation für Z erhaltenen Form

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n}$$

das absolute Glied $\mathfrak{A}$ nicht schon $= 1$ ist, aber auch den Werth $= 0$ nicht hat; so kann man den Zähler und Nenner durchaus mit $\mathfrak{A}$ dividiren, und man erhält hierdurch

$$Z = \frac{\frac{A}{\mathfrak{A}} + \frac{Bz}{\mathfrak{A}} + \frac{Cz^2}{\mathfrak{A}} + \frac{Dz^3}{\mathfrak{A}} + \ldots + \frac{Lz^{n-2}}{\mathfrak{A}} + \frac{Mz^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{Nz^n}{\mathfrak{A}}}{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{B}z}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{C}z^2}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{D}z^3}{\mathfrak{A}} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}z^{n-2}}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{M}z^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{N}z^n}{\mathfrak{A}}},$$

worin die Coefficienten der Potenzen von z bestimmte Größen sind. Nennt man nun die Coefficienten im Zähler der Ordnung nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \lambda, \mu, \nu$, und die im Nenner $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$; so ist

$$Z = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \lambda z^{n-2} + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{1 + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \ldots + \mathfrak{l}z^{n-2} + \mathfrak{m}z^{n-1} + \mathfrak{n}z^n}$$

2) Wenn aber in der für Z erhaltenen Form das absolute Glied $\mathfrak{A}$ im Nenner $= 0$ ist; so werden, wenn man nach Nro. 1. verfahren will, die Coefficienten α, β, γ rc. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ rc. unbestimmt große Größen, denn es ist alsdann z. E. $\frac{A}{\mathfrak{A}}$ oder $\alpha = \frac{A}{0} = \infty$, und eben dieses findet bey allen übrigen Coefficienten Statt. Hingegen kann man, wenn bey der Formation die Function

$$Z = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n}{0 + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n}$$

geworden ist,

$$Z = \frac{\frac{A}{\mathfrak{B}} + \frac{Bz}{\mathfrak{B}} + \frac{Cz^2}{\mathfrak{B}} + \frac{Dz^3}{\mathfrak{B}} + \ldots + \frac{Lz^{n-2}}{\mathfrak{B}} + \frac{Mz^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{Nz^n}{\mathfrak{B}}}{\frac{\mathfrak{B}z}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{C}z^2}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{D}z^3}{\mathfrak{B}} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}z^{n-2}}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{M}z^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{N}z^n}{\mathfrak{B}}}$$

setzen, wofür man alsdann, wenn man die Coefficienten im Zähler der Ordnung nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \lambda, \mu, \nu$, und die im Nenner $a, b, c \ldots l, m, n$ nennt, und von einem jeden Gliede im Nenner den Factor z trennt,

$$Z = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \lambda z^{n-2} + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{z(1 + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{l}z^{n-3} + \mathfrak{m}z^{n-2} + \mathfrak{n}z^{n-1})}$$

erhält.

§. 77.

§. 77.

"Wenn bey der Formation einer gebrochenen Function Z von z in der Form

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n}$$

"ausser dem ersten Gliede $\mathfrak{A}$ des Nenners noch mehrere von den Gliedern, welche dem "Gliede $\mathfrak{A}$ zunächst folgen, $= 0$ sind, so daß z. E. das erste Glied des Nenners "$= \mathfrak{G}z^s$ ist, und also die Form von Z so aussieht:

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{G}z^s + \mathfrak{H}z^{s+1} + \ldots + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n};$$

"so kann man allemal diese Function auf eine ihr gleichgeltende und ähnliche Function

$$\frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \lambda z^{n-2} + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{z^s(1 + az + bz^2 + \ldots + lz^{n-s-2} + mz^{n-s-1} + nz^{n-s})}$$

"zurückführen."

Wenn man nehmlich den Zähler und Nenner der erstern Form durch $\mathfrak{G}$ dividirt, so erhält man

$$Z = \frac{\frac{A}{\mathfrak{G}} + \frac{Bz}{\mathfrak{G}} + \frac{Cz^2}{\mathfrak{G}} + \frac{Dz^3}{\mathfrak{G}} + \ldots + \frac{Lz^{n-2}}{\mathfrak{G}} + \frac{Mz^{n-1}}{\mathfrak{G}} + \frac{Nz^n}{\mathfrak{G}}}{\frac{\mathfrak{G}z^s}{\mathfrak{G}} + \frac{\mathfrak{H}z^{s+1}}{\mathfrak{G}} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}z^{n-2}}{\mathfrak{G}} + \frac{\mathfrak{M}z^{n-1}}{\mathfrak{G}} + \frac{\mathfrak{N}z^n}{\mathfrak{G}}}.$$

Nennt man nun die Coefficienten der Potenzen von z im Zähler der Ordnung nach α, β, γ, δ . . . λ, μ, ν, die im Nenner aber a, b . . . l, m, n, und trennt von einem jeden Gliede des Nenners den Factor z^s; so erhält man

$$Z = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \lambda z^{n-2} + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{z^s(1 + az + bz^2 + \ldots + lz^{n-s-2} + mz^{n-s-1} + nz^{n-s})}.$$

§. 78.

Ausser der bisher betrachteten Formungsart, die sich bey den gebrochenen Functionen vornehmen läßt, giebt es noch zwey andere Hauptformungsarten dieser Functionen, welche wegen ihres öfteren und vortheilhaften Gebrauches für die Analysis von grosser Wichtigkeit sind.

Die **eine** dieser Formungsarten ist die, welche man **die Verwandlung der gebrochenen Functionen in Reihen** nennt. Es läßt sich nehmlich eine jede **gebrochene** Function in eine Reihe auflösen, welche dem allgemeinen Ausdrucke $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$ der **ganzen** Functionen von z ähnlich ist, und sich von demselben blos dadurch unterscheidet, daß die Anzahl der Glieder des Ausdruckes nicht endlich, sondern unendlich groß ist. Man kann sich eben daher dem wahren Werthe einer gebrochenen Function, welche in eine Reihe aufgelöst ist, nur nähern, aber erreichen kann man denselben nie. Die gebrochenen Functionen werden, wenn man sie in Rücksicht ihrer Fähigkeit, sich in einer der Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$ der ganzen Functionen ähnlichen Form darstellen zu lassen, betrachtet, den transcendentischen Functionen ähnlich, deren Hauptcharakter darin besteht, daß sie nur durch eine unendliche Anzahl von Gliedern, und mithin blos näherungsweise algebraisch ausgedrückt werden können.

Die **andere** der erwähnten Formungsarten der gebrochenen Functionen nennt man **die Zerlegung derselben in Partialbrüche.** Es läßt sich nehmlich eine gebrochene Function, deren Nenner eine Function von höherem Grade ist, in mehrere Brüche zerlegen, deren Nenner Factoren des Nenners der gebrochenen Functionen sind, und deren Zähler ein solches Verhältniß zu den Nennern haben, daß, wenn man die einzelnen Brüche unter einerley Benennung bringt und addirt, die Summe derselben der gebrochenen Function gleich wird. Die einzelnen Brüche, welche diesen Forderungen ein Genüge leisten, heißen in Beziehung auf die gebrochene Function **Partialbrüche**, und zwar werden diejenigen unter den Partialbrüchen, deren Nenner **einfache** Factoren des Nenners der Function sind, **einfache**, diejenigen hingegen, deren Nenner zusammengesetzte Factoren des Nenners der gebrochenen Function sind, **zusammengesetzte** Partialbrüche genannt.

A) Die Verwandlung der gebrochenen Functionen in Reihen.

---

§. 79.

„Eine formirte gebrochene Function Z von z in eine Reihe zu verwandeln."

1) Eine jede formirte gebrochene Function Z ist

$$= \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + Hz^7 + \ldots + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \mathfrak{F}z^5 + \mathfrak{G}z^6 + \mathfrak{H}z^7 + \ldots + \mathfrak{N}z^n}.$$

Nun

Nun wissen wir zwar nicht, ob eine Function Z von dieser Form entweder ganz genau, oder doch wenigstens näherungsweise für einen jeden beliebigen Werth von z einer Function von der Form

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+gz^6+hz^7+\ldots+nz^r+pz^{r+1}+\ldots$$

gleichgesetzt werden könne, es hindert uns aber doch nichts, dieß einstweilen hypothetisch als möglich anzunehmen. Können wir durch eine auf diese Hypothese gegründete Rechnung Gleichungen für die bis jetzt noch unbestimmten Coefficienten a, b, c, d ... n, p ... erhalten, aus denen sich bestimmte und reelle Werthe für diese Coefficienten ableiten lassen; so ist dieß ein Beweis, daß die Hypothese keine Ungereimheit enthält. Wäre sie nehmlich ungereimt; so könnte man unmöglich von ihr aus durch Schlüsse auf bestimmte und reelle Werthe der Coefficienten a, b, c, d ... kommen.

2) Es sey also für alle nur immer denkbaren Werthe von z

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+Gz^6+Hz^7+\ldots+Nz^n}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\mathfrak{C}z^2+\mathfrak{D}z^3+\mathfrak{E}z^4+\mathfrak{F}z^5+\mathfrak{G}z^6+\mathfrak{H}z^7+\ldots+\mathfrak{N}z^n}$$

$$=a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+gz^6+hz^7+\ldots+nz^r+pz^{r+1}+\ldots$$

Bey der Annahme der vorigen Gleichung ist man genöthigt auch die nachstehende Gleichung als gültig anzunehmen:

$$(a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+gz^6+hz^7+\ldots+nz^r+pz^{r+1}+\ldots)$$
$$\times(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\mathfrak{C}z^2+\mathfrak{D}z^3+\mathfrak{E}z^4+\mathfrak{F}z^5+\mathfrak{G}z^6+\mathfrak{H}z^7+\ldots+\mathfrak{N}z^n)$$
$$=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+Gz^6+Hz^7+\ldots+Nz^n,$$

aus welcher, wenn man die linke Seite derselben gehörig entwickelt, folgende wird:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l|l|l}
a\mathfrak{A} & +b\mathfrak{A} & .z+c\mathfrak{A} & .z^2+d\mathfrak{A} & z^3+e\mathfrak{A} & .z^4+f\mathfrak{A} & .z^5+g\mathfrak{A} & .z^6+h\mathfrak{A} & z^7+\ldots \\
 & +a\mathfrak{B} & +b\mathfrak{B} & +c\mathfrak{B} & +d\mathfrak{B} & +e\mathfrak{B} & +f\mathfrak{B} & +g\mathfrak{B} & \\
 & & +a\mathfrak{C} & +b\mathfrak{C} & +c\mathfrak{C} & +d\mathfrak{C} & +e\mathfrak{C} & +f\mathfrak{C} & \\
 & & & +a\mathfrak{D} & +b\mathfrak{D} & +c\mathfrak{D} & +d\mathfrak{D} & +e\mathfrak{D} & \\
 & & & & +a\mathfrak{E} & +b\mathfrak{E} & +c\mathfrak{E} & +d\mathfrak{E} & \\
 & & & & & +a\mathfrak{F} & +b\mathfrak{F} & +c\mathfrak{F} & \\
 & & & & & & +a\mathfrak{G} & +b\mathfrak{G} & \\
 & & & & & & & +a\mathfrak{H} &
\end{array}$$

$$=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+Gz^6+Hz^7+\ldots$$

3) Da

3) Da nun der Voraussetzung gemäß diese Gleichung für einen jeden beliebigen Werth von z gelten soll; so müssen die in einerley Potenz von z multiplicirten Coefficienten auf beyden Seiten einander gleich seyn (§. 21.), welche Forderung folgende Coefficientengleichungen giebt:

$$a\mathfrak{A} \quad \ldots \quad = A$$
$$b\mathfrak{A} + a\mathfrak{B} \quad \ldots \quad = B$$
$$c\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + a\mathfrak{C} \quad \ldots \quad = C$$
$$d\mathfrak{A} + c\mathfrak{B} + b\mathfrak{C} + a\mathfrak{D} \quad \ldots \quad = D$$
$$e\mathfrak{A} + d\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} + b\mathfrak{D} + a\mathfrak{E} \quad \ldots \quad = E$$
$$f\mathfrak{A} + e\mathfrak{B} + d\mathfrak{C} + c\mathfrak{D} + b\mathfrak{E} + a\mathfrak{F} \quad \ldots \quad = F$$
$$g\mathfrak{A} + f\mathfrak{B} + e\mathfrak{C} + d\mathfrak{D} + c\mathfrak{E} + b\mathfrak{F} + a\mathfrak{G} \quad \ldots \quad = G$$
$$h\mathfrak{A} + g\mathfrak{B} + f\mathfrak{C} + e\mathfrak{D} + d\mathfrak{E} + c\mathfrak{F} + b\mathfrak{G} + a\mathfrak{H} \quad \ldots \quad = H$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen folgt aber diese:

$$a = \frac{A}{\mathfrak{A}},$$
$$b = \frac{B - a\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},$$
$$c = \frac{C - b\mathfrak{B} - a\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},$$
$$d = \frac{D - c\mathfrak{B} - b\mathfrak{C} - a\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}},$$
$$e = \frac{E - d\mathfrak{B} - c\mathfrak{C} - b\mathfrak{D} - a\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}},$$
$$f = \frac{F - e\mathfrak{B} - d\mathfrak{C} - c\mathfrak{D} - b\mathfrak{E} - a\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}},$$
$$g = \frac{G - f\mathfrak{B} - e\mathfrak{C} - d\mathfrak{D} - c\mathfrak{E} - b\mathfrak{F} - a\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}},$$
$$h = \frac{H - g\mathfrak{B} - f\mathfrak{C} - e\mathfrak{D} - d\mathfrak{E} - c\mathfrak{F} - b\mathfrak{G} - a\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}},$$

u. s. w.

Hier-

Hieraus nun lassen sich die Werthe von a, b, c ꝛc. bestimmen, wenn man den Werth von a in die Gleichung für b, die Werthe von a und b in die Gleichung für c, die Werthe von a, b, c ferner in die Gleichung für d u. s. w. setzt, und man sieht, daß die Größen a, b, c, d ꝛc. wirklich bestimmbare und reelle Größen werden. Es folgt demnach, daß die in Nro. 1. gemachte Hypothese möglich ist, und daß sich wirklich die formirte gebrochene Function in eine Function von der Form $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$ umformen läßt.

4) Es leidet aber dennoch die hier aufgestellte Behauptung eine Einschränkung. Man sieht nehmlich, daß die Bestimmung aller Coefficienten a, b, c, d, e ꝛc. von der Bestimmung des Coefficienten $a = \frac{A}{\mathfrak{A}}$ abhängt. Soll nun der erste Coefficient $a = \frac{A}{\mathfrak{A}}$ eine bestimmte Größe werden, so darf das absolute $\mathfrak{A}$ im Nenner der Function Z nicht $= 0$ seyn, weil sonst $a = \frac{A}{0} = \infty$ wird. Wir können demnach bis jetzt blos behaupten, daß sich eine jede formirte gebrochene Function, in welcher das absolute Glied $\mathfrak{A}$ des Nenners nicht $= 0$ ist, in eine Reihe von der Form $a + bz + cz^3 + dz^4 + \ldots$ umformen läßt, deren Coefficienten a, b, c, d ... nach den vorhin angegebenen Coefficientengleichungen bestimmt werden müssen und von den Werthen der Coefficienten A, B, C ..., $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ... abhängen. Also bleibt uns noch zu untersuchen übrig, ob sich auch eine jede formirte gebrochene Function, in welcher $\mathfrak{A} = 0$ ist und vielleicht auch noch einige andere dem Gliede $\mathfrak{A}$ nachfolgende Gliede den Werth $= 0$ haben, in eine Reihe auflösen läßt, und wie man bey dieser Auflösung verfahren muß. Zuvor aber wollen wir noch etwas über diejenigen Functionen erinnern, welche, wenn man sie formirt, keinen Nenner erhalten, dessen absolutes Glied $= 0$ oder $= 1$ ist. Man kann dergleichen Functionen, wie wir aus §. 76. wissen, allemal auf eine gleichgültige Function Z′ zurückführen, deren Nenner mit dem absoluten Gliede $= 1$ anfängt. Reducirt man nun eine solche Function

$$Z = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + Hz^7 + \ldots + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \mathfrak{F}z^5 + \mathfrak{G}z^6 + \mathfrak{H}z^7 + \ldots + \mathfrak{N}z^n}$$

auf eine ihr gleichgeltende Function

$$Z' = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \eta z^6 + \vartheta z^7 + \ldots + \nu z^n}{1 + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 + \mathfrak{e}z^5 + \mathfrak{f}z^6 + \mathfrak{g}z^7 + \ldots + \mathfrak{n}'z^n},$$

in welcher $\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}}$, $\beta = \frac{B}{\mathfrak{A}}$ ꝛc. $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ ꝛc. ist, und verwandelt statt der

Fun-

Function Z die Function Z' durch die in Nro. 1, 2, 3 gebrauchte Schlußart in eine Reihe $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \dots$; so erhält man für Z' folgende Coefficientengleichungen:

$$\begin{aligned}
a &= \alpha,\\
b &= \beta - a.\mathfrak{a},\\
c &= \gamma - b.\mathfrak{a} - a.\mathfrak{b},\\
d &= \delta - c.\mathfrak{a} - b.\mathfrak{b} - a.\mathfrak{c},\\
e &= \varepsilon - d.\mathfrak{a} - c\mathfrak{b} - b\mathfrak{c} - a\mathfrak{d},\\
f &= \zeta - e.\mathfrak{a} - d.\mathfrak{b} - c.\mathfrak{c} - b.\mathfrak{d} - a.\mathfrak{e},
\end{aligned}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen müssen sich bey der Rechnung mit bestimmten Functionen, wie leicht einzusehen ist, dieselben Werthe für a, b, c ꝛc. ergeben, welche aus den Gleichungen in Nro. 3. folgen.

5) Wenn in einer formirten gebrochenen Function

$$Z = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \dots + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n}$$

das absolute Glied $\mathfrak{A}$ den Werth $= 0$ hat; so kann man dieselbe nach §. 76. allemal durch

$$\frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \dots + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{z(1 + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 + \dots + \mathfrak{m}z^{n-1} + \mathfrak{n}z)}$$

ausdrücken, worin $\alpha = \frac{A}{\mathfrak{B}}$, $\beta = \frac{B}{\mathfrak{B}}$, $\gamma = \frac{C}{\mathfrak{B}}$ ꝛc. $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$ ꝛc. ist. Nun läßt sich aber gewiß eine jede Function

$$Z' = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \dots + \mu z^{n-1} + \nu z^n}{1 + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 + \dots + \mathfrak{m}z^{n-1} + \mathfrak{n}z^n}$$

in eine Reihe von der Form

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \dots + mz^{r-1} + nz^r + pz^{r+1} + \dots$$

auflösen, denn die möglichen Coefficienten derselben sind die in Nro. 4. angegebenen; darum muß, wenn man dieß thut,

$$Z = \frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \dots + mz^{r-1} + nz^r + pz^{r+1} + \dots}{z}$$

$$= \frac{a}{z} + b + cz + dz^2 + ez^3 + \dots mz^{r-2} + nz^{r-1} + pz^r + \dots$$

werden.

werden. Also läßt sich eine gebrochene Function Z, in welcher das absolute Glied A den Werth = o hat, allemal in eine Reihe von der Form $a z^{-1} + b z^{0} + c z + d z^{2} + e z^{3} + \ldots + m z^{r-2} + n z^{r-1} + p z^{r} + \ldots$ auflösen.

6) Wenn endlich im Nenner einer formirten gebrochenen Function Z außer dem absoluten Gliede A noch mehrere zunächst folgende Glieder den Werth = o haben, wenn z. E. der Nenner mit dem Gliede $\mathfrak{G} z^{s}$ anfängt; so kann man nach §. 77. allemal die Function

$$Z = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^{n}}{\mathfrak{G} z^{s} + \mathfrak{H} z^{s+1} + \ldots\ldots + \mathfrak{M} z^{n-1} + \mathfrak{N} z^{n}}$$

so ausdrücken, daß

$$Z = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots + \mu z^{n-1} + \nu z^{n}}{z^{s}(1 + \mathfrak{a} z + \mathfrak{b} z^2 + \mathfrak{c} z^3 + \mathfrak{d} z^4 + \ldots + \mathfrak{m} z^{n-s-1} + \mathfrak{n} z^{n-s})}$$

wird, worin $\alpha = \frac{A}{\mathfrak{G}}$; $\beta = \frac{B}{\mathfrak{G}}$, $\gamma = \frac{C}{\mathfrak{G}}$ ꝛc. $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$; $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{G}}$ ꝛc. ist. Da nun, wenn man in dem Nenner des vorigen Ausdruckes den Factor z^{s} wegläßt, die dann bleibende Function

$$Z' = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots + \mu z^{n-1} + \nu z^{n}}{1 + \mathfrak{a} z + \mathfrak{b} z^2 + \mathfrak{c} z^3 + \mathfrak{d} z^4 + \ldots + \mathfrak{m} z^{n-s-1} + \mathfrak{n} z^{n-s}}$$

in eine Reihe von der Form $a + b z + c z^2 + d z^3 + e z^4 + \ldots + m z^{r-1} + n z^{r} + p z^{r+1} + \ldots$ aufgelöst werden kann, deren Coefficienten a, b, c ꝛc. aus den Gleichungen in Nro. 4. angegeben werden können; so erhält man, wenn man dieses thut,

$$Z = \frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots + mz^{r-1} + nz^{r} + pz^{r+1} + \ldots}{z^{s}}$$

$$= \frac{a}{z^{s}} + \frac{b}{z^{s-1}} + \frac{c}{z^{s-2}} + \frac{d}{z^{s-3}} + \frac{e}{z^{s-4}} + \ldots$$

$$+ \frac{m}{z^{s-r+1}} + \frac{n}{z^{s-r}} + \frac{p}{z^{s-r-1}} + \ldots$$

Es läßt sich also eine jede formirte gebrochene Function, in deren Nenner ausser dem Gliede A noch mehrere darauf folgende Glieder = o sind, in eine Reihe von der obigen Form auflösen, welche man auch so ausdrücken kann:

$$az^{-s} + bz^{1-s} + cz^{2-s} + dz^{3-s} + ez^{4-s} + \ldots + mz^{r-s-1} + nz^{r-s} + \ldots$$

7) Wir haben uns bey der Auflösung unserer Aufgabe der Methode der unbestimmten Coefficienten bedient, weil sich hiernach die Coefficienten a, b, c, d ꝛc. der Reihe, in welche die formirte gebrochene Function Z aufgelöst werden soll, gewöhnlich am bequem-

sten finden lassen, es läßt sich aber auch die Reihe für die Function Z noch auf andere Arten finden. Man kann nehmlich den Nenner der gebrochenen Function Z nach den gewöhnlichen Divisionsregeln in den Zähler dividiren, und man muß allemal dieselbe Reihe erhalten, welche man auf eine leichtere Art erhält, wenn man nach der bisher angegebenen Methode die Coefficienten a, b, c, d ꝛc. der hypothetisch angenommenen Reihe $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots + pz^{r+1} + \ldots$ bestimmt, und die dafür erhaltenen Werthe in diese Reihe statt a, b, c, d ꝛc. setzt. Ferner kann man auch auf folgende Art verfahren: Man setzt die formirte gebrochene Function

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n}$$
$$= (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n)$$
$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n)^{-1},$$

löst die Potenz $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots)^{-1}$ nach §. 32. auf und multiplicirt die dadurch erhaltene Reihe mit dem Factor $(A + Bz + Cz^2 + \ldots)$. Eben so kann man auch verfahren, wenn die in eine Reihe aufzulösende Function

$$Z = \frac{(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n)^r}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n)^s}$$ ist.

§. 80.

Damit das, was im vorigen §. gelehrt worden ist, noch deutlicher werde; so sollen hier einige gebrochene Functionen, deren Coefficienten bestimmte Größen sind, und welche im Nenner und Zähler eine bestimmte Anzahl von Gliedern haben, in Reihen aufgelöst wrden.

I) "Es sey die formirte gebrochene Function

$$Z = \frac{1 + 2z}{3 - z - 5z^2}$$

"in eine Reihe aufzulösen:"

1) Vergleicht man die hier angegebene Function mit der allgemeinen Form in §. 79. Nro. 1., so erhält man:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 0 \text{ ꝛc.}$$
$$\mathfrak{A} = 3,\ \mathfrak{B} = -1,\ \mathfrak{C} = 5,\ \mathfrak{D} = 0 \text{ ꝛc.}$$

Daher müssen die Coefficienten der Reihe $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots$, welche dieser Function entspricht, diese seyn:

a =



$$a = \tfrac{1}{3},$$

$$b = \frac{2 - \frac{1}{3} \times -1}{3} = \frac{7}{3 \cdot 3},$$

$$c = \frac{0 - \frac{7}{3 \cdot 3} \times -1 - \frac{1}{3} \times 5}{3} = \frac{-8}{3 \cdot 3 \cdot 3},$$

$$d = \frac{0 - \frac{-8}{3 \cdot 3 \cdot 3} \times -1 - \frac{7}{3 \cdot 3} \times 5 - 0}{3} = \frac{-113}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3},$$

$$e = \frac{0 - \frac{-113}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \times -1 - \frac{-8}{3 \cdot 3 \cdot 3} \times 5 - 0}{3} = \frac{7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3},$$

u. s. w.

Es ist demnach die vorgegebene Function

$$\frac{1 + 2z}{3 - z + 5z^2} = \frac{1}{3} + \frac{7}{9}z - \frac{8}{27}z^2 - \frac{113}{81}z^3 + \frac{7}{243}z^4 \pm \ldots$$

2) Hätte man zuerst nach §. 76. Nro. 1. die vorgegebene Function

$$Z = \frac{1 + 2z}{3 - z + 5z^2}$$

auf die andere Form $Z' = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z}{1 - \frac{1}{3}z + \frac{5}{3}z^2}$ reducirt; so wäre nach §. 79. Nro. 4. ebenfalls

$$a = \frac{1}{3},$$

$$b = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times -\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9},$$

$$c = 0 - \frac{7}{9} \times -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{7}{27} - \frac{15}{27} = \frac{-8}{27},$$

$$d = 0 - \frac{-8}{27} \times -\frac{1}{3} - \frac{7}{9} \times \frac{5}{3} - 0 = \frac{-8}{81} - \frac{105}{81} = \frac{-113}{18},$$

$$e = 0 - \frac{-113}{81} \times -\frac{1}{3} - \frac{-40 \times 3}{81 \cdot \times 3} = \frac{7}{243},$$

u. s. w.,

und also die Reihe für die Function Z dieselbe, wie in Nro. 1.

 II) Es

II) "Es soll die formirte gebrochene Function

$$Z = \frac{1 + 2z}{1 - z - z^2}$$

"in eine Reihe aufgelöst werden."

Wenn man diese Function mit der in §. 79. Nro. 1. vergleicht, so erhält man:

$A = 1;\ B = 2,\ C = 0,\ D = 0$ etc.

$\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = -1,\ \mathfrak{C} = -1,\ \mathfrak{D} = 0$ etc., und also

$a = 1,\ b = 3,\ c = 4,\ d = 7,\ e = 11,\ f = 18$ etc.

Demnach muß die hier vorgegebene Function

$$\frac{1 + 2z}{1 - z - z^2} = 1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots \text{ seyn.}$$

III) "Es sey die formirte gebrochene Function

$$Z = \frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$$

"in eine Reihe zu verwandeln."

Wird diese Function mit der allgemeinen Function Z' in §. 79. Nro. 4. verglichen, so erhält man:

$\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 0;\ \delta = 0$ etc.

$\mathfrak{a} = -5,\ \mathfrak{b} = 6,\ \mathfrak{c} = 0,\ \mathfrak{d} = 0$ etc., und also

$a = 1,\ b = 4,\ c = 14,\ d = 46,\ e = 146$ etc.

Es muß also die vorgegebene Function

$$\frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2} = 1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + \ldots \text{ seyn}$$

IV) "Es sey die formirte gebrochene Function

$$Z = \frac{3 + 2z}{5z^3 + 7z^5}$$

"in eine Reihe zu verwandeln."

Es ist $Z = \frac{3 + 2z}{z^3(5 + 7z^2)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}z}{z^3(1 + \frac{7}{5}z^2)}$. Läßt man nun den Factor z^3 im Nenner des letztern Ausdruckes weg, nimmt hierauf die sich hierdurch ergebende Function

$$Z' = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}z}{1 + \frac{7}{5}z^2}$$

und

und vergleicht sie mit der allgemeinen Form in §. 79. Nro. 4.; so ergeben sich folgende Werthe:

$$\alpha = \frac{3}{5},\ \beta = \frac{2}{5},\ \gamma = 0,\ \delta = 0 \text{ rc.}$$

$$\mathfrak{a} = 0,\ \mathfrak{b} = \frac{7}{5},\ \mathfrak{c} = 0,\ \mathfrak{d} = 0 \text{ rc.},$$

und es ist also $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{-21}{25}$, $d = \frac{-14}{25}$, $e = \frac{147}{125}$ u. s. w.

Darum muß nun die Function:

$$\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}z}{1 + \frac{7}{5}z^2} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}z - \frac{21}{25}z^2 - \frac{14}{25}z^3 + \frac{147}{125}z^4 \pm \ldots$$ werden, woraus

$$\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}z}{z^3(1 + \frac{7}{5}z^2)} = \frac{3 + 2z}{5z^3 + 7z^5}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot z^{-3} + \frac{2}{5}z^{-2} - \frac{21}{25}z^{-1} + \frac{14}{25}z^0 + \frac{147}{125}z \pm \ldots$$ folgt.

B) Die Zerlegung der gebrochenen Functionen in ihre Partialbrüche.

---

§. 81.

"Wenn die nachstehende formirte gebrochene Function

$$Z = \frac{A + Bz + Cz^2 + \ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \ldots + \mathfrak{K}z^{\mathfrak{n}-3} + \mathfrak{L}z^{\mathfrak{n}-2} + \mathfrak{M}z^{\mathfrak{n}-1} + \mathfrak{N}z^{\mathfrak{n}}}$$

"eine **unächte**, und also $n > \mathfrak{n}$ ist; so muß sich dieselbe allemal in zwey Theile zerlegen "lassen, von welchen der eine eine **ganze** Function vom $(n - \mathfrak{n})$ten Grade, der andere "aber eine ächte **gebrochene** Function ist, und die beyde, wenn man sie addirt, die ge-"brochene Function Z wieder geben.

1) Man kann, ohne den Werth des Zählers und Nenners der gebrochenen Functionen zu verändern, dieselben so ausdrücken, daß das erste Glied in ihnen die höchste Potenz von z enthält, und daß der Ordnung nach auf dieses Glied alle Glieder mit den niedrigern Potenzen von z folgen (§. 35.). Hierdurch erhält die gebrochene Function folgende Gestalt:

$$Z = \frac{Nz^n + Mz^{n-1} + Lz^{n-2} + Kz^{n-3} + \ldots + Cz^2 + Bz + A}{\mathfrak{N}z^{\mathfrak{n}} + \mathfrak{M}z^{\mathfrak{n}-1} + \mathfrak{L}z^{\mathfrak{n}-2} + \mathfrak{K}z^{\mathfrak{n}-3} + \ldots + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{B}z + \mathfrak{A}}$$

2) Nun

2) Nun kann man den Zähler auf die gewöhnliche Art durch den Nenner dividiren und die Division abbrechen, wenn bey der Fortsetzung derselben in den Quotienten negative Potenzen von z kommen würden. Hierdurch erhält man einen aus zwey Theilen bestehenden Quotienten. Der **erste** Theil fängt mit dem Gliede $\frac{N}{\mathfrak{N}} z^{n-\mathfrak{n}}$ an und die folgenden Glieder in demselben enthalten lauter ganze bejahte Potenzen von z, nehmlich $z^{n-\mathfrak{n}-1}$, $z^{n-\mathfrak{n}-2}$, $z^{n-\mathfrak{n}-3}$ rc. mit Coefficienten, welche von den Coefficienten M, L, K rc. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ rc. abhängen; er ist also eine **ganze** Function von z. Der **zweyte** Theil aber ist ein Bruch, dessen Zähler der bey der abgebrochenen Division gebliebene Rest, dessen Nenner aber der Nenner der Function Z ist, und dieser Bruch muß eine **ächte** gebrochene Function von z seyn, weil in dessen Zähler kein Glied vorkommen kann, welches z in einer Potenz enthielte, die höher wäre, als die höchste Potenz $= z^{\mathfrak{n}}$ des Nenners ist.

3) Die nachstehende unächte gebrochene Function

$$Z = \frac{6z^5 + 3z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 9}{2z^3 - 3z^2 - 6}$$

wird durch die Division auf folgende Art zerlegt:

$$\begin{array}{r|l}
2z^3 - 3z^2 - 6)\ 6z^5 + 3z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 9 & 3z^2 + 6z + 6 + \ldots \\
6z^5 - 9z^4 \qquad\quad - 18z^2 & \\
\hline
12z^4 - 6z^3 + 20z^2 & \\
12z^4 - 18z^3 \qquad - 36z & \\
\hline
12z^3 + 20z^2 + 36z & \\
12z^3 - 18z^2 - 36 & \\
\hline
38z^2 + 36z + 27 & \\
\text{u. s. w.} &
\end{array}$$

Demnach ist

$$\frac{6z^5 + 3z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 9}{2z^3 - 3z^2 - 6} = 3z^2 + 6z + 6 + \frac{38z^2 + 36z + 27}{2z^3 - 3z - 6}$$

§. 82.

"Es seyen

$$\frac{Z}{P} = \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + \mu z^{\varrho-1} + \nu z^{\varrho}}{a + bz + cz^2 + \ldots + mz^{r-1} + nz^{r}} \text{ und}$$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{\alpha' + \beta' z + \gamma' z^2 + \ldots + \mu' z^{r-1} + \nu' z^{r}}{a' + b'z + c'z^2 + \ldots + m'z^{\mathfrak{n}-1} + n'z^{\mathfrak{n}}}$$

"zwey

"zwey **ächte** gebrochene Functionen von z. Die Summe aus diesen beyden Functionen "muß sich allemal durch eine einzige gebrochene Function $\frac{M}{N}$ darstellen lassen, welche die"selbe Form hat, wie die Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$, in welcher ferner der Nenner N ein "Product aus den Nennern P und $\mathfrak{P}$ ist, und die übrigens zu den ächten gebrochenen "Functionen gehört.

1) Man kann allemal die beyden zu summirenden ächten gebrochenen Functionen unter einerley Benennung bringen, und dann wird ihre Summe

$$\frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}.P}{\mathfrak{P}.P}$$

Die Producte $Z.\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Z}.P$, $\mathfrak{P}.P$ in derselben sind Producte aus **ganzen** Functionen Z, $\mathfrak{Z}$, P, $\mathfrak{P}$, und also wieder **ganze** Functionen von derselben Form (§. 22.), die Summe $Z\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}P$ aber muß, wenn man alle die mit einerley Potenz von z versehenen Glieder in derselben gehörig zusammenordnet, ebenfalls eine Function werden, welche die Form der Zähler Z und $\mathfrak{Z}$ hat. Also kann die Summe aus $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ als eine gebrochene Function $\frac{M}{N}$ dargestellt werden, deren Form der Form der Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ ähnlich und deren Nenner N ein Prodcut aus zwey Functionen P und $\mathfrak{P}$ ist.

2) Eine **ächte** gebrochene Function aber muß $\frac{M}{N}$ aus folgenden Gründen seyn. Es ist bekanntlich der Gradexponent von $Z\mathfrak{P}$, $= \varrho + \varkappa$

. . . . $\mathfrak{Z}P$, $= \sigma + \iota$

. . . . $\mathfrak{P}P$, $= \iota + \varkappa$,

daher muß der Gradexponent des Zählers $Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}.P$ in der Function $\frac{M}{N}$ entweder $\varrho + \varkappa$ oder $= \sigma + \iota$ seyn, je nachdem nehmlich $\varrho + \varkappa$ oder $\sigma + \iota$ die größere Anzahl von Einheiten enthält. Sind nun nach der Voraussetzung die Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ **ächte** gebrochene Functionen, so ist ganz gewiß

$$\varkappa > \sigma \text{ und auch } \iota > \varrho,$$

folglich ist auch der Gradexponent $\iota + \varkappa$ des Nenners $\mathfrak{P}.P$ größer als der Gradexponent $\varrho + \varkappa$ oder $\sigma + \iota$ des Zählers $Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}.P$. Also ist $\frac{M}{N}$ eine **ächte** gebrochene Function.

§. 83.

§. 83.

Unter allen nur immer denkbaren ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$ von z kommen auch alle diejenigen vor, welche durch die Addition zweyer ächter gebrochener Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ entstehen und deren Nenner N Producte aus zwey ganzen Functionen P und $\mathfrak{P}$ sind. Wenn also eine ächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$ vorkommt, deren Nenner als ein Product aus zwey ganzen Functionen P und Q vorgestellt werden kann; so kann es seyn, daß sie eine Summe aus zwey Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ ist.

§. 84.

„Man soll untersuchen, ob eine jede unter den verschiedenen möglichen ächten gebro„chenen Functionen von z, deren Nenner ein Product aus zwey Factoren ist, die ganze „Functionen von z sind, als eine Summe aus zwey andern ächten gebrochenen Functio„nen gedacht werden kann, welche die beyden Factoren des Nenners der ersten Function „zu ihren Nennern haben.

1) Es bedeute $\frac{M}{N}$ eine ächte gebrochene Function von z, und unter P und $\mathfrak{P}$ stelle man sich zwey ganze Functionen von z vor, deren Product $P \cdot \mathfrak{P} = N$ ist. Diese beyden Functionen können Functionen vom ersten oder vom höheren Grade seyn, daher sollen für den letzten Fall die einfachen Factoren von P durch U, V, W ꝛc. und die einfachen Factoren von $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ꝛc. bezeichnet werden, so daß $N = P \cdot \mathfrak{P} = U \cdot V \cdot W \times \ldots \times \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W} \times \ldots$ ist. Unter Z und $\mathfrak{Z}$ denke man sich zwey unbestimmte ganze Functionen von z, die der Gleichung $\frac{M}{N} = \frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ ein Genüge leisten sollen.

2) Damit die Untersuchung desto einfacher werde, so setze man, es habe der Zähler M mit dem Nenner N keinen einzigen Factor gemein, und es sey also $\frac{M}{N}$ eine auf ihren einfachsten Ausdruck zurückgeführte ächte gebrochene Function von z. Dieß läßt sich allemal annehmen, denn man kann ja den Zähler und Nenner einer jeden gebrochenen Function nach der Lehre von der Zerlegung der ganzen Functionen in die einfachen Factoren zerfällen, die gemeinschaftlichen Factoren hernach weglassen, und blos die Producte aus den verschiedenen Factoren beybehalten.

3) Wenn man nun setzt, es könne eine vorgegebene ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}.P}{P.\mathfrak{P}}$$

seyn, und zwar so, daß $P\,\mathfrak{P} = N$ ist; so muß man auch annehmen, daß

$$M = Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}\,P, \text{ also}$$

$$\frac{M - Z.\mathfrak{P}}{P} = \mathfrak{Z} \text{ und}$$

$$\frac{M - \mathfrak{Z}.P}{\mathfrak{P}} = Z \text{ sey.}$$

Da aber wegen der Voraussetzung, daß $\mathfrak{Z}$ und Z ganze Functionen von z seyen, die beyden letzteren Gleichungen blos alsdann bestehen können, wenn sich die Differenz $M - Z\mathfrak{P}$ durch die Größe P, und so auch die Differenz $M - \mathfrak{Z}.P$ durch $\mathfrak{P}$ ohne Rest dividiren läßt; so muß man auch die Möglichkeit der Theilbarkeit der beyden genannten Differenzen durch P und $\mathfrak{P}$ annehmen, so bald man setzt, es sey $\frac{M}{N} = \frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ und $N = P.\mathfrak{P}$. Es fragt sich, in welchen Fällen die Möglichkeit der Theilbarkeit der genannten Differenzen angenommen werden kann, und in welchen nicht. Wir wollen dieß untersuchen.

4) Ehe wir aber diese Untersuchung anfangen, so müssen wir an einen Satz aus der Arithmetik erinnern, welchen wir bey derselben brauchen. "Wenn eine Differenz $A - B$ "$= D$ durch eine Zahl μ theilbar seyn soll, so muß der Subtractor B allemal durch "μ getheilt werden können, so bald der Minuendus A durch μ theilbar ist; im Falle "sich aber der Minuendus A durch μ nicht theilen läßt, so darf auch der Subtractor "B nicht durch μ theilbar seyn, weil sonst unmöglich die Differenz D durch μ getheilt "werden könnte."

5) Nun soll die Differenz $M - Z.\mathfrak{P}$ durch P, und also auch durch einen jeden der Factoren U, V, W rc. von P theilbar seyn. Da angenommen worden ist, M habe mit N, und also auch mit P keinen einzigen Factor gemein (Nro. 2.); so ist der Minuendus in der Differenz $M - Z.\mathfrak{P}$ dieser Annahme gemäß ganz gewiß weder durch P, noch durch irgend einen Factor von P theilbar. Soll also die Theilbarkeit dieser Differenz $M - Z.\mathfrak{P}$ durch P nicht gerade zu bey unseren Voraussetzungen unmöglich seyn, so muß sich nach Nro. 4. der Subtractor $Z.\mathfrak{P}$ ebenfalls weder durch P noch durch irgend einen Factor von P theilen lassen. Weil nun, wenn $Z.\mathfrak{P}$ durch keinen Factor von P theilbar

seyn darf, auch ganz gewiß die beyden Functionen P und $\mathfrak{P}$, deren Product $P.\mathfrak{P} = N$ seyn soll, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben dürfen; so ergiebt sich folgender Satz:

"Die Theilbarkeit der Differenz $M - Z.\mathfrak{P}$ durch P ist in dem Falle ganz gewiß "unmöglich, wenn die beyden Factoren P und $\mathfrak{P}$ des Nenners N einen oder mehrere ge-"meinschaftliche Theiler haben."

Eben diesen Satz erhält man bey der ähnlichen Untersuchung über die Theilbarkeit der Differenz $M - \mathfrak{Z}.P$ durch die Größe $\mathfrak{P}$.

6) Wenn aber die Theilbarkeit der Differenzen in Nro. 3. unmöglich ist, so bald die Factoren P und $\mathfrak{P}$ des Nenners N eine oder mehrere gemeinschaftliche Theiler enthalten; so ist auch die Voraussetzung, daß $\frac{M}{N} = \frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ und $P.\mathfrak{P} = N$ sey, aus welcher die Forderung in Nro. 3. nothwendig fließt, unmöglich, und wir erhalten also durch die bisherigen Untersuchungen nachstehendes Resultat:

"Unter allen in ihren einfachsten Ausdrücken dargestellten ächten gebrochenen Functio-"nen $\frac{M}{N}$ von z können diejenigen unmöglich als Summen aus zwey andern ächten gebro-"chenen Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$, in welchen $P = \frac{N}{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P} = \frac{N}{P}$ ist, gedacht wer-"den, deren Nenner N so beschaffen sind, daß allemal die beyden Factoren P und $\mathfrak{P}$, in "welche man N zerfällt, gemeinschaftliche Theiler bekommen, man mag auch die Zerfällung "vornehmen, wie man will."

7) Dieser Satz ist nun zwar blos für solche ächte gebrochene Functionen erwiesen, die auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht sind und bey welchen also dem Zähler M und dem Nenner N kein gemeinschaftlicher einfacher oder zusammengesetzter Factor zukommt, durch den sich $\frac{M}{N}$ aufheben ließe; er gilt aber auch für alle anderen ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$, die sich noch durch einen gemeinschaftlichen Factor von M und N aufhe-ben lassen, weil man diese auf ihren einfachsten Ausdruck bringen kann (Nro. 2.).

8) Aus Nro. 5. scheint zu folgen, daß die Differenzen in Nro. 3. allemal durch die Functionen P und $\mathfrak{P}$ theilbar seyn werden, wenn P und $\mathfrak{P}$ keine gemeinschaftlichen Theiler enthalten, dieß ist aber nicht der Fall. Blos so viel folgt aus Nro. 5., daß in dem Falle, wenn P und $\mathfrak{P}$ keine gemeinschaftlichen Theiler enthalten, die Annahme der Theil-barkeit der Differenzen in Nro. 3. keinem offenbaren Widerspruche unterworfen ist. Da-her

her darf man auch bis jetzt noch nicht behaupten, daß alle diejenigen ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$, deren Nenner N in zwey Factoren P und $\mathfrak{P}$ zerfällt werden können, welchen keine gemeinschaftlichen Theiler zukommen, Summen aus zwey andern ächten gebrochenen Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ seyn müssen; sondern man kann blos sagen, daß unter diesen Functionen ganz gewiß auch diejenigen enthalten seyn müssen, welche solche Summen sind.

§. 85.

"Man soll untersuchen, ob sich alle gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$ von z, deren Nenner N in zwey Factoren P und $\mathfrak{P}$, welchen keine gemeinschaftlichen Theiler zukommen, zerfällt werden können, als Summen aus zwey andern ächten gebrochenen Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ darstellen lassen müssen."

1) Es sey $\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Tz^{n-1} + Uz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{T}z^{\mathfrak{n}-1} + \mathfrak{U}z^{\mathfrak{n}}}$ eine ächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$, und also der Graderponent $\mathfrak{n} > n$; die Coefficienten A, B, C ꝛc. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ꝛc. seyen bekannte und bestimmte Größen. Unter P und $\mathfrak{P}$ stelle man sich die beyden Factoren vor, in welche sich der Nenner N zerfällen läßt, und denen kein gemeinschaftlicher Theiler zukommt. Ferner setze man, es sey

$$P = a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots + mz^{r-1} + nz^r,$$
$$\mathfrak{P} = a' + b'z + c'z^2 + d'z^3 + \ldots + m'z^{\mathfrak{R}-1} + n'z^{\mathfrak{R}},$$

in welchen Ausdrücken die Coefficienten a, b, c ꝛc. a', b', c' ꝛc. wieder als bestimmte und bekannte Größen angesehen werden sollen und $r + \mathfrak{R} = \mathfrak{n}$ seyn muß, weil $P . \mathfrak{P} = N$ seyn soll.

Nun nehme man an, es gebe wirklich zwey Functionen Z und $\mathfrak{Z}$ von z, die in Verbindung mit den beyden Factoren P und $\mathfrak{P}$ des Nenners N zwey ächte gebrochene Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ bilden, deren Summe $\frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{M}{N}$ ist, und setze, es sey

$$Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \mu z^{\varrho-1} + \nu z^{\varrho}.$$
$$\mathfrak{Z} = \alpha' + \beta' z + \gamma' z^2 + \delta' z^3 + \ldots + \mu' z^{r-1} + \nu' z^r$$

 In

In diesen Ausdrücken bedeuten die Coefficienten α, β, γ ꝛc. α', β', γ' ꝛc. unbestimmte Größen, die einstweilen hypothetisch angenommen sind, und von welchen erst untersucht werden muß, ob sie bestimmbar und möglich sind.

Der Gradexponent ϱ der Function Z darf höchstens $= r - 1$ seyn, und so darf auch der Gradexponent $\mathfrak{r}$ der Function $\mathfrak{Z}$ die Größe $\mathfrak{R} - 1$ nicht übersteigen, weil $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ ächte gebrochene Functionen seyn sollen.

2) Setzt man nun, daß die ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}.P}{P.\mathfrak{P}}$$

sey; so muß auch, weil nach der Voraussetzung in Nro. 1. $N = P.\mathfrak{P}$ ist, der Zähler

$$M = Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}.P$$

seyn, d. h., wenn man in dieser Gleichung die in Nro. 1. für Z, $\mathfrak{Z}$, P und $\mathfrak{P}$ festgesetzten Ausdrücke gebraucht, es muß die nachstehende Gleichung:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \ldots = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots)$$
$$\times (a' + b'z + c'z^2 + d'z^3 + \ldots)$$
$$+ (\alpha' + \beta' z + \gamma' z^2 + \delta' z^3 + \ldots) \times (a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)$$

angenommen werden, und zwar, wie leicht einzusehen ist, für alle nur immer denkbaren Werthe der Größe z. Diese Gleichung aber giebt, wenn man die Producte in derselben entwickelt darstellt, folgende:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots = \left\{\begin{array}{l|l|l|l} a'\alpha & + a'\beta & + a'\gamma & + a'\delta \\ & + b'\alpha & + b'\beta & + b'\gamma \\ & & + c'\alpha & + c'\beta \\ & & & + d'\alpha \\ + a\alpha' & + a\beta' & + a\gamma' & + a\delta' \\ & + b\alpha' & + b.\beta' & + b\gamma' \\ & & + c\alpha' & + c\beta' \\ & & & + d\alpha' \end{array}\right. \begin{array}{l} z \quad\; z^2 \quad\; z^3 + \ldots \end{array}$$

3) Will man nun diese Gleichung annehmen, so muß man auch nach §. 22. folgende Coefficientengleichungen gelten lassen:

A =

$$A = a'\alpha + a\alpha'$$
$$B = a'\beta + b'\alpha + a\beta' + b\alpha'$$
$$C = a'\gamma + b'\beta + c'\alpha + a\gamma' + b\beta' + c\alpha'$$
$$D = a'\delta + b'\gamma + c'\beta + d'\alpha + a\delta' + b\gamma' + c\beta' + d\alpha'$$

u. s. w.

4) Solcher Coefficientengleichungen aber muß man allemal eben so viele erhalten, als wie viele unbestimmte Größen α, β, γ ꝛc. α', β', γ' ꝛc. hypothetisch in Nro. 1. angenommen worden sind, welches so erhellt:.

a) Die Anzahl der Coefficienten α, β, γ ꝛc. in der Function Z, welche vom ϱten Grade ist, muß $= \varrho + 1$ seyn; und da ϱ höchstens nur $= r - 1$ seyn kann (Nro. 1.), so ist gewiß diese Anzahl nie größer als r.

Die Anzahl der Coefficienten α', β', γ' ꝛc. in der Function $\mathfrak{Z}$, deren Gradexponent r heißt, muß $= r + 1$ seyn; weil nun r höchstens nur $= \mathfrak{R} - 1$ seyn darf (Nro. 1.), so kann die Anzahl der Coefficienten α, β, γ ꝛc. die Zahl $\mathfrak{R}$ nie übersteigen.

Demnach wird gewiß die Anzahl aller hypothetisch angenommenen unbestimmten Coefficienten nie größer als $r + \mathfrak{R}$ seyn können.

b) Der Gradexponent des Productes $Z.\mathfrak{P}$ ist $= \varrho + \mathfrak{R}$, und der Gradexponent in dem Producte $\mathfrak{Z}.P$ muß $r + r$ seyn; daher kann auch der Gradexponent der Summe $Z.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}P$ nur die Größe $= \varrho + \mathfrak{R}$ oder $r + r$ haben, und er hat die eine oder die andere, je nachdem $\varrho + \mathfrak{R}$ oder $r + r$ die größere Anzahl von Einheiten enthält. $Z\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}P$ aber ist die Größe, welche auf der rechten Seite in der letzten Gleichung in Nro. 2. steht. Weil diese eine Function vom $(\varrho + \mathfrak{R})$ten oder $(r + r)$ten Grade ist; so kann die Anzahl ihrer Glieder gewiß nicht größer als $\varrho + \mathfrak{R} + 1$ oder $r + r + 1$ seyn, d. h. aber, wenn man statt ϱ das Maximum der Anzahl seiner Einheiten, nehmlich $r - 1$, und ebenso statt r, $\mathfrak{R} - 1$ schreibt, es kann die Anzahl aller Glieder in der genannten Seite der Gleichung in Nro. 2. nicht größer als $r - 1 + \mathfrak{R} + 1$ oder $\mathfrak{R} - 1 + r + 1$, mithin nie größer als $r + \mathfrak{R}$ werden. So viel nun diese Seite Glieder enthält, ebenso viel kann man Coefficientengleichungen formiren, denn wenn in der genannten Seite Potenzen von z vorkommen, die in der linken Seite nicht anzutreffen sind; so kann man ja die Coefficienten dieser fehlenden Potenzen von z, $= 0$ setzen. Man kann demnach $r + \mathfrak{R}$ Coefficientengleichungen bilden, mithin gerade so viele, als wie viele un-

 bestimm-

bestimmte Coefficienten α, β, γ ꝛc. α', β', γ' ꝛc. angenommen worden sind, (Nro. a).

5) In keiner der $r + \mathfrak{R}$ Coefficientengleichungen ist einer der unbekannten Coefficienten mit einem andern, oder mit sich selbst multiplicirt, sondern es sind nur die Coefficienten α, β, γ ꝛc. mit a', b', c' ꝛc. und die Coefficienten α', β', γ' ꝛc. mit a, b, c ꝛc. multiplicirt; also sind alle die Coefficientengleichungen **einfache**. Da nun ihrer so viele sind, als wie viele unbestimmte Größen α, β, γ ꝛc. α', β', γ' ꝛc. angenommen wurden; so müssen aus denselben **bestimmte** und reelle Werthe für die Coefficienten α, β, γ ꝛc. α', β', γ' ꝛc. abgeleitet werden können.

6) Aus den bisherigen Untersuchungen erhalten wir folgendes Resultat: Wenn man hypothetisch annimmt, es gebe zwey Functionen Z und $\mathfrak{Z}$, welche die Forderung, daß $\frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{M}{N}$ sey, ein Genüge leisten können, und man drückt die beyden Functionen Z und $\mathfrak{Z}$ durch unbestimmte Coefficienten aus und sucht alsdann durch eine auf die hypothetische Gleichung $\frac{Z}{P} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{M}{N}$ gebaute Rechnung Gleichungen für dieselben zu erhalten; so findet man wirklich solche Gleichungen, aus welchen sich **bestimmte** und **reelle** Werthe für die unbestimmt angenommenen Coefficienten der Functionen Z und $\mathfrak{Z}$ ableiten lassen, und daraus erhellet, daß die Annahme der Möglichkeit der beyden Functionen Z und $\mathfrak{Z}$ nicht ungereimt ist, sondern daß es allerdings zwey solche Functionen geben muß.

7) Also lassen sich **alle** ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$, deren Nenner N in zwey Factoren P und $\mathfrak{P}$ zerlegt werden können, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler enthalten, wirklich als Summen aus zwey andern ächten gebrochenen Functionen $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ darstellen, und man findet die Coefficienten der hypothetisch angenommenen Functionen $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + \mu z^{\varrho}$ und $\mathfrak{Z} = \alpha' + \beta' z + \gamma' z^2 + \ldots + \mu' z^{r}$ allemal aus den Gleichungen in Nro. 3., welche man nach Belieben weiter fortsetzen kann.

§. 86.

I) "Man soll die nachstehende ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{6 + 15z + 3z^2}{z + z^2 - z^3 - z^4}$$

"in zwey Partialbrüche $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ zerlegen."

1) Wenn

1) Wenn man den Nenner in die einfachen Factoren auflöst, so findet man $z + z^2 - z^3 - z^4 = (1 + z)(1 + z)(1 - z)z$, und es hat also hier der Nenner zwey gleiche einfache Factoren. Man kann aber doch aus demselben zwey Factoren P und $\mathfrak{P}$ nehmen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler enthalten, man kann z. E.

$$P = (1 + z)(1 + z) = 1 + 2z + z^2 \text{ und } \mathfrak{P} = (1 - z)z = z - z^2$$

setzen. Nimmt man nun an, es sey

$$\frac{6 + 15z + 3z^2}{z + z^2 - z^3 - z^4} = \frac{\alpha + \beta z}{1 + 2z + z^2} + \frac{\alpha' + \beta' z}{z - z^2}$$

so muß, weil hier $\gamma = 0$, $\delta = 0$ 2c. $\gamma' = 0$, $\delta' = 0$ 2c.;

$A = 6$, $B = 15$, $C = 3$, $D = 0$ 2c.;

$a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 0$ 2c.;

$a' = 0$, $b' = 1$, $c' = -1$, $d' = 0$ 2c. ist, nach §. 85. Nr. 3. seyn:

$$\begin{aligned}
6 &= 1.\alpha' && = \alpha' \\
15 &= 1.\alpha + 1.\beta' + 2\alpha' && = \alpha + \beta' + 2\alpha' \\
3 &= 1.\beta - 1.\alpha + 2\beta' + 1.\alpha' && = \beta - \alpha + 2\beta' + \alpha' \\
0 &= -1.\beta + 1.\beta' && = -\beta + \beta'
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber, wie man leicht sieht, daß $\alpha' = 6$, $\beta' = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ ist, und daß also die vorgegebene Function

$$\frac{6 + 15z + 3z^2}{z + z^2 - z^3 - z^4} = \frac{3}{1 + 2z + z^2} + \frac{6}{z - z^2} \text{ seyn muß.}$$

2) Wollten wir aber die beyden Factoren P und $\mathfrak{P}$ aus den einfachen Factoren $(1 + z)$, $(1 + z)$, $(1 - z)$, z des Nenners N so nehmen, daß

$$P = (1 + z)(1 - z) = 1 - z^2, \text{ und } \mathfrak{P} = (1 + z)z = z + z^2$$

wäre, und daß also die Factoren P und $\mathfrak{P}$ den gemeinschaftlichen Theiler $(1 + z)$ enthielten; so würde, wenn wir alsdann

$$\frac{6 + 15z + 3z^2}{z + z^2 - z^3 - z^4} = \frac{\alpha + \beta z}{1 - z^2} + \frac{\alpha' + \beta'.z}{z + z^2}$$

setzten, und aus den Gleichungen in §. 85. Nro. 3. für $A = 6$, $B = 15$, $C = 3$, $D = 0$ 2c.; $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $d = 0$ 2c.; $a' = 0$, $b' = 1$, $c' = 1$, $d' = 0$ 2c. die Werthe von α, β, α', β' suchten, aus diesen Gleichungen die ungereimte Forderung folgen,

folgen, daß $3 = 9$ sey, welches unmöglich und also ein Beweis ist, daß für diesen Fall die Größen α, β, α', β' nicht möglich sind, daß mithin der Bruch $\frac{M}{N}$ auf diese Art nicht zerlegt werden kann.

II) "Man soll die ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{1 + 4z^4}$$

"in zwey Partialbrüche $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ zerlegen."

1) In §. 68. Nro. V. ist der Nenner $1 + 4z^4$ der hier vorgegebenen Function in seine einfachen Factoren zerlegt. Diese sind, wenn man nachsieht, imaginär, und alle von einander verschieden. Man kann also gewiß zwey Factoren P und $\mathfrak{P}$ des Nenners N finden, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, und es ist hier einerley, wie man die einfachen Factoren von N zusammennimmt, um die beyden Functionen P und $\mathfrak{P}$ daraus zu formiren, welches in dem Beyspiele Nro. I. der Fall nicht war. Da hier alle einfachen Factoren imaginär sind, und bekanntlich jedesmal zwey imaginäre einfache Factoren einen doppelten reellen Factor geben müssen; so kann man die doppelten reellen Factoren von N die Functionen P und $\mathfrak{P}$ seyn lassen. Diese sind aber nach §. 69. Nro. V. $(1 + 2z + 2z^2)$ und $(1 - 2z + 2z^2)$.

2) Setzt man nun die Function

$$\frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{1 + z^4} = \frac{\alpha + \beta z}{1 + 2z + 2z^2} + \frac{\alpha' + \beta' z}{1 - 2z + 2z^2};$$

so muß, weil hier $\gamma = 0$, $\delta = 0$ rc. $\gamma' = 0$, $\delta' = 0$ rc. und

ferner $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$, $D = -4$, $E = 0$ rc.,

$a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 0$ rc.,

$a' = 1$, $b' = -2$, $c' = 2$, $d' = 0$ rc. ist,

nach §. 85. Nro. 3.

$$1 = 1 . \alpha + 1 . \alpha' \qquad = \alpha + \alpha',$$

$$-2 = 1 . \beta - 2\alpha + 1 . \beta' + 2\alpha' = \beta + \beta' + 2\alpha' - 2\alpha$$

$$3 = -2 . \beta + 2 . \alpha + 2\beta' + 2\alpha' = 2(\alpha + \alpha') + 2\beta' - 2\beta$$

$$-4 = 2\beta + 2 . \beta', \qquad = 2(\beta + \beta') \text{ seyn.}$$

Hier-

Hieraus erhält man aber, wenn man diese Coefficientengleichungen auflöst, die Coefficienten α, β, α', β'. Die Auflösung geschieht hier am kürzesten so:

Die erste Gleichung ist $\alpha + \alpha' = 1$, und die vierte gibt $-2 = \beta + \beta'$. Man setze also statt $\alpha + \alpha'$ den Werth $= 1$ in die dritte Gleichung, und statt $\beta + \beta'$ den Werth $= -2$ in die zweyte, wodurch man statt der zweyten und dritten Gleichung folgende zwey Gleichungen erhält:

$$-2 + 2\alpha' - 2\alpha = -2,$$
$$2 + 2\beta' - 2\beta = 3,$$

oder

$$\alpha' - \alpha = 0,$$
$$\beta' - \beta = \frac{1}{2}.$$

Da aus der ersten dieser beyden letzten Gleichungen $\alpha' = \alpha$ folgt und vorhin $\alpha' + \alpha = 1$ war, so muß $\alpha' = \frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ seyn. Weil ferner nach der zweyten der beyden erwähnten Gleichungen $\beta' - \beta = \frac{1}{2}$ seyn muß, und auch $\beta + \beta' = -2$ seyn soll; so folgt:

$$\beta' = -\tfrac{3}{4} \text{ und } \beta = -\tfrac{5}{4}.$$

Es ist also, wenn man die Werthe von α, β, α', β' substituirt,

$$\frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{1 + 4z^4} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{4}.z}{1 + 2z + 2z^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}.z}{1 - 2z + 2z^2}.$$

Diese beyden Partialbrüche geben auch, wenn man sie unter einerley Benennung bringt und addirt, den zerlegten Bruch wieder.

§. 87.

„Eine jede **ächte** gebrochene Function $\frac{M}{N}$ von z, deren Nenner N aus lauter **un**„**gleichen** einfachen Factoren besteht, muß sich in soviele **einfache** Partialbrüche, deren „Summe $= \frac{M}{N}$ ist, zerlegen lassen, als wie viel der Gradexponent des Nenners N Einhei„ten hat."

1) Wenn der Nenner N keine gleich großen einfachen Factoren enthält, so giebt es gewiß zwey Factoren P und $\mathfrak{P}$ desselben, welchen keine gemeinschaftlichen Theiler zukom-

 men;

men; also läßt sich in diesem Falle gewiß allemal $\frac{M}{N}$ in zwey Partialbrüche $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ zerlegen.

2) Da nun, wenn N keine gleich großen einfachen Factoren enthält, gewiß auch $\mathfrak{P}$ und P keine gleich großen einfachen Factoren enthalten wird; so kann man auch wiederum einen jeden Nenner der Partialbrüche $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ in zwey Factoren p und $\mathfrak{p}$ zerfällen, welchen keine gemeinschaftlichen Theiler zukommen, wenn nehmlich beyde Nenner noch Functionen vom höhern Grade sind. Mithin kann man alsdann auch einen jeden der Partialbrüche wieder zerlegen.

3) So kann man aber, weil nie Nenner entstehen können, in welchen gleich große Factoren enthalten sind, mit der Zerlegung fortfahren, bis man lauter Partialbrüche hat, deren Nenner Functionen vom ersten Grade sind. Da nun alle Nenner der Partialbrüche einfache Factoren des Nenners N werden müssen, und der Nenner N als eine ganze Function von z gerade so viele einfache Factoren enthält, als der Gradexponent desselben Einheiten hat (§. 42. Nro. 4.); so kann man auch eben so viele Partialbrüche erhalten. Diese alle aber müssen, wenn man sie summirt, die Function $\frac{M}{N}$ wieder geben, welches leicht einzusehen ist.

§. 88.

"Man soll die nachstehende ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{1 + z^2}{z - z^3}$$

"in lauter einfache Partialbrüche zerlegen."

1) Der Nenner $z - z^3$ ist $= z\,(1 - z^2)$, der Factor $1 - z^2$ aber ist bekanntlich $= (1 - z)\,(1 + z)$; also ist

$$z - z^3 = z\,(1 - z)\,(1 + z),$$

woraus man sieht, daß die Forderung möglich ist, denn alle einfachen Factoren von N sind hier verschieden groß.

2) Setzt man nun zuerst

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha' + \beta' z}{1 - z^2},$$

so erhält man nach §. 85. Nro. 3., weil hier

$$\beta = 0,\ \gamma = 0 \text{ u.c.};\ \gamma' = 0,\ \delta' = 0 \text{ u.c.};$$

A =

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0 \text{ etc.};$$
$$a = 0,\ b = 1,\ c = 0 \text{ etc.};$$
$$a' = 1,\ b' = 0,\ c' = -1,\ d' = 0 \text{ etc.}$$

gesetzt werden muß, folgende Gleichungen für die unbestimmt angenommenen Größen α, α', β':

$$\begin{array}{lll} 1 = & 1 \cdot \alpha & = \alpha, \\ 0 = & 1 \cdot \alpha' & = \alpha', \\ 1 = & -1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta' & = \beta' - \alpha, \\ 0 & & = 0 \end{array}$$

Hier folgt nun, weil $\alpha = 1$ und $\beta' - \alpha = 1$ seyn soll, daß $\beta' = 2$ sey. Man hat also $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$, $\beta = 2$ und $\frac{1 + z^2}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{2z}{1 - z^2}$.

3) Setzt man ferner den jetzt erhaltenen und noch zusammengesetzten Partialbruch

$$\frac{2z}{1 - z^2} = \frac{\alpha}{1 + z} + \frac{\alpha'}{1 - z},$$

so erhält man §. 85. Nro. 3., da hier

$$\beta = 0,\ \gamma = 0 \text{ etc.};\ \beta' = 0,\ \gamma' = 0 \text{ etc.};$$
$$A = 0,\ B = 2,\ C = 0 \text{ etc.};$$
$$a = 1,\ b = 1,\ c = 0 \text{ etc.};$$
$$a' = 1,\ b' = -1,\ c' = 0 \text{ etc.}$$

seyn muß, die Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} 0 = & 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha' & = & \alpha + \alpha', \\ 2 = & -1 \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha' & = & -\alpha + \alpha', \end{array}$$

aus welchen $-\alpha = \alpha'$ und mithin $\alpha' + \alpha' = 2$ folgt, weswegen $\alpha' = 1$ und $\alpha = -1$ seyn muß. Es ist also der Partialbruch

$$\frac{2z}{1 - z^2} = \frac{-1}{1 + z} + \frac{1}{1 - z}$$

4) Aus Nro. 2. und 3. sieht man, daß durch Zerlegung die vorgegebene Function

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} \text{ wird.}$$

men; also läßt sich in diesem Falle gewiß allemal $\frac{M}{N}$ in zwey Partialbrüche $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ zerlegen.

2) Da nun, wenn N keine gleich großen einfachen Factoren enthält, gewiß auch $\mathfrak{P}$ und P keine gleich großen einfachen Factoren enthalten wird; so kann man auch wiederum einen jeden Nenner der Partialbrüche $\frac{Z}{P}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ in zwey Factoren p und $\mathfrak{p}$ zerfällen, welchen keine gemeinschaftlichen Theiler zukommen, wenn nehmlich beyde Nenner noch Functionen vom höhern Grade sind. Mithin kann man alsdann auch einen jeden der Partialbrüche wieder zerlegen.

3) So kann man aber, weil nie Nenner entstehen können, in welchen gleich große Factoren enthalten sind, mit der Zerlegung fortfahren, bis man lauter Partialbrüche hat, deren Nenner Functionen vom ersten Grade sind. Da nun alle Nenner der Partialbrüche einfache Factoren des Nenners N werden müssen, und der Nenner N als eine ganze Function von z gerade so viele einfache Factoren enthält, als der Gradexponent desselben Einheiten hat (§. 42. Nro. 4.); so kann man auch eben so viele Partialbrüche erhalten. Diese alle aber müssen, wenn man sie summirt, die Function $\frac{M}{N}$ wieder geben, welches leicht einzusehen ist.

§. 88.

"Man soll die nachstehende ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{1 + z^2}{z - z^3}$$

"in lauter einfache Partialbrüche zerlegen."

1) Der Nenner $z - z^3$ ist $= z(1 - z^2)$, der Factor $1 - z^2$ aber ist bekanntlich $= (1 - z)(1 + z)$; also ist

$$z - z^3 = z(1 - z)(1 + z),$$

woraus man sieht, daß die Forderung möglich ist, denn alle einfachen Factoren von N sind hier verschieden groß.

2) Setzt man nun zuerst

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha' + \beta' z}{1 - z^2},$$

so erhält man nach §. 85. Nro. 3., weil hier

$$\beta = 0,\ \gamma = 0 \text{ rc.};\ \gamma' = 0,\ \delta = 0 \text{ rc.};$$

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0 \text{ ꝛc.};$$
$$a = 0,\ b = 1,\ c = 0 \text{ ꝛc.};$$
$$a' = 1,\ b' = 0,\ c' = -1,\ d' = 0 \text{ ꝛc.}$$

gesetzt werden muß, folgende Gleichungen für die unbestimmt angenommenen Größen α, α', β':

$$\begin{aligned} 1 &= 1.\alpha &&= \alpha, \\ 0 &= 1.\alpha' &&= \alpha', \\ 1 &= -1.\alpha + 1.\beta' &&= \beta' - \alpha, \\ 0 & &&= 0 \end{aligned}$$

Hier folgt nun, weil $\alpha = 1$ und $\beta' - \alpha = 1$ seyn soll, daß $\beta' = 2$ sey. Man hat also $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$, $\beta = 2$ und $\frac{1 + z^2}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{2z}{1 - z^2}$.

3) Setzt man ferner den jetzt erhaltenen und noch zusammengesetzten Partialbruch

$$\frac{2z}{1 - z^2} = \frac{\alpha}{1 + z} + \frac{\alpha'}{1 - z},$$

so erhält man §. 85. Nro. 3., da hier

$$\beta = 0,\ \gamma = 0 \text{ ꝛc}; \ \beta' = 0,\ \gamma' = 0 \text{ ꝛc.};$$
$$A = 0,\ B = 2,\ C = 0 \text{ ꝛc.};$$
$$a = 1,\ b = 1,\ c = 0 \text{ ꝛc.};$$
$$a' = 1,\ b' = -1,\ c' = 0 \text{ ꝛc.}$$

seyn muß, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= 1.\alpha + 1.\alpha' &&= \alpha + \alpha', \\ 2 &= -1.\alpha + 1.\alpha' &&= -\alpha + \alpha', \end{aligned}$$

aus welchen $-\alpha = \alpha'$ und mithin $\alpha' + \alpha' = 2$ folgt, weswegen $\alpha' = 1$ und $\alpha = -1$ seyn muß. Es ist also der Partialbruch

$$\frac{2z}{1 - z^2} = \frac{-1}{1 + z} + \frac{1}{1 - z}$$

4) Aus Nro. 2. und 3. sieht man, daß durch Zerlegung die vorgegebene Function

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} \text{ wird.}$$

§. 89.

"Eine jede **unächte** gebrochene Function $\frac{M}{N}$ von z, deren Nenner N aus lauter un-"gleichen einfachen Factoren besteht, läßt sich in eine **ganze** Function und alsdann noch in "so viele ächte gebrochene Functionen zerlegen, als der Gradexponent des Nenners N "Einheiten enthält."

Wenn man die unächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$ durch die Division des Nenners N in den Zähler M in eine ganze Function und in einen Bruch zerlegt, so erhält allemal der Bruch denselben Nenner N, welchen die Function $\frac{M}{N}$ hat (§. 81.); dieser Bruch aber läßt sich in so viele Brüche zerlegen, als der Nenner N einfache Factoren enthält (§. 87.).

§. 90.

"Man soll die nachstehende unächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{1+z^4}{z-z^3}$$

"in die in ihr enthaltene ganze Function und die ihr zugehörigen Partialbrüche auflösen."

1) Durch die Division des Nenners in den Zähler findet man, daß diese Function

$$\frac{z^4+1}{-z^3+z} = -z + \frac{z^2+1}{z-z^3} \text{ ist.}$$

2) Zerlegt man nun nach dem bisherigen Verfahren die ächte gebrochene Function $\frac{z^2+1}{z-z^3}$ in ihre Partialbrüche, welches in §. 88. geschehen ist; so findet man:

$$\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}.$$

Demnach ist die als zerlegt dargestellte unächte gebrochene Function

$$\frac{1+z^4}{z-z^3} = -z + \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}.$$

§. 91.

Nach der bisherigen Methode können alle die gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$ von z, in denen der Nenner N aus **verschieden großen** einfachen Factoren besteht, in einzelne Partialbrüche aufgelöst und als Summen aus denselben dargestellt werden. Es erfordert aber diese Methode bey solchen Functionen $\frac{M}{N}$, aus welchen man mehr als zwey **einfache** Partialbrüche erhält, daß man zuvor die **zusammengesetzten** Partialbrüche aufsuche (§. 87.). Dieses ist unbequem, und es fragt sich daher, ob man nicht zu einem jeden einfachen Factor F des Nenners N die Größe A suchen könne, die mit F einen **einfachen** Partialbruch $\frac{A}{F}$ von $\frac{M}{N}$ bildet, ohne daß man nöthig hat, alle **zusammengesetzten** Partialbrüche nach der bisher angegebenen Methode aufzusuchen und aus diesen nach und nach die **einfachen** Partialbrüche abzuleiten.

§. 92.

"Es sey $\frac{M}{N}$ eine ächte gebrochene Function von z, deren Nenner N aus **ungleichen** "einfachen Factoren von der Form $a - \alpha z$ besteht. Man soll eine Methode aufsuchen, "nach welcher man sogleich zu einem jeden vorgegebenen einfachen Factor von N den Zäh"ler finden kann, welcher mit dem als Nenner gebrauchten Factor einen einfachen Par"tialbruch von $\frac{M}{N}$ bildet."

1) Wenn der vorgegebene einfache Factor von N durch $a - \alpha z$ bezeichnet und das Product aus den übrigen Factoren $\mathfrak{P}$ genannt wird, so ist $N = (a - \alpha z)\,\mathfrak{P}$. Nun giebt es, da N lauter verschieden große Factoren enthalten soll, ganz gewiß zwey Zähler, die wir mit A und $\mathfrak{Z}$ bezeichnen wollen, welche der Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{a - \alpha z} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

ein Genüge leisten, und es hat also diese Gleichung, welche wir bey unserer Untersuchung zum Grund legen, volle Gültigkeit.

2) Wenn wir nun die beyden Partialbrüche unter einerley Benennung bringen, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{A\,.\,\mathfrak{P} + (a - \alpha z)\,.\,\mathfrak{Z}}{(a - \alpha z)\,.\,\mathfrak{P}},$$

 und

und daraus folgt ferner, weil $N = (a - \alpha z)\,\mathfrak{P}$ seyn soll (Nro. 1.), die Gleichung

$$M = A \,.\, \mathfrak{P} + \mathfrak{Z}\,(a - \alpha z).$$

3) Letztere Gleichung giebt aber folgende:

$$\frac{M - A \,.\, \mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \mathfrak{Z},$$

und diese ist gewiß möglich, weil die Voraussetzung in Nro. 1. als gültig erwiesen ist. Da nun die Möglichkeit dieser Gleichung keinem Zweifel unterworfen ist, und doch dieselbe nur alsdann bestehen kann, wenn $\frac{M - A \,.\, \mathfrak{P}}{a - \alpha z}$ eine ganze Function bedeutet, weil $\mathfrak{Z}$, der Zähler des einen der beyden Partialbrüche von $\frac{M}{N}$, eine solche Function seyn muß; so muß ganz gewiß $M - A\,\mathfrak{P}$ durch $a - \alpha z$ theilbar seyn, und folglich $M - A \,.\, \mathfrak{P}$ eine Function von z bedeuten, die den einfachen Factor $a - \alpha z$ enthält, welcher der vorgegebene Factor des Nenners N ist, wozu der Zähler A des Partialbruches $\frac{A}{a - \alpha z}$ gesucht werden soll.

4) Ist aber $a - \alpha z$ ein Factor der Function $M - A \,.\, \mathfrak{P}$, so muß auch diese für denselben Werth von z den Werth $= 0$ erhalten, für welchen Werth von z der Factor $a - \alpha z$ den Werth $= 0$ erhält, d. h. $M - A \,.\, \mathfrak{P}$ muß für $z = \frac{a}{\alpha}$, $= 0$ werden. Setzt man also in der Function $M - A \,.\, \mathfrak{P}$ überall statt z den Werth $\frac{a}{\alpha}$, so erhält man für den zu suchenden Zähler A nachstehende Gleichung:

$$M - A \,.\, \mathfrak{P} = 0, \text{ aus welcher}$$

$$\frac{M}{\mathfrak{P}} = A \text{ folget.}$$

5) "Wenn man also den dem Factor $a - \alpha z$ zugehörigen Zähler A des Partial-"bruchs $\frac{A}{a - \alpha z}$ finden will, so darf man nur den Zähler M der zu zerlegenden Function "$\frac{M}{N}$ durch das Product $\mathfrak{P}$ aus den übrigen Factoren des Nenners N dividiren und in "dem Quotienten $\frac{M}{\mathfrak{P}}$ überall statt z den Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzen, für welchen der Factor "$a - \alpha z = 0$ wird, und den man allemal aus der Gleichung $a - \alpha z = 0$ ableiten kann."

6) Nach dieser Regel aber läßt sich nun ein jeder Zähler der einfachen Partialbrüche von $\frac{M}{N}$ finden, der zu einem andern einfachen Factor $b - \beta z$ des Nenners N gehört, wenn man nur das Product $\mathfrak{P}'$ aus den übrigen Factoren allemal gehörig sucht.

§. 93.

§. 93.

I) "Man soll die ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{5 - 4z}{3 - 7z - 6z^2}$$

"nach der vorhin angegebenen Methode in ihre einfachen Partialbrüche zerlegen."

In §. 68. Nro. I) sind die einfachen Factoren des Nenners der hier vorgegebenen gebrochenen Function aufgesucht worden. Es ist $3 - 7z - 6z^2 = (1 - 3z)(3 + 2z)$.

Setzt man nun die gebrochene Function

$\frac{5 - 4z}{3 - 7z - 6z^2} = \frac{A}{3 + 2z} + \frac{B}{1 - 3z}$; so muß nach der im vorigen §. Nro. 5. gegebenen Regel $A = \frac{M}{\mathfrak{P}} = \frac{5 - 4z}{1 - 3z}$ seyn, und zwar für denjenigen Werth von z, welcher aus der Gleichung $3 + 2z = 0$ folgt und $= -\frac{3}{2}$ ist. Demnach wird

$$A = \frac{5 - 4 \times -\frac{3}{2}}{1 - 3 \times -\frac{3}{2}} = 2.$$

Eben so wird

$B = \frac{M}{\mathfrak{P}'} = \frac{5 - 4z}{3 + 2z}$, und zwar für denjenigen Werth von z, für welchen $1 - 3z = 0$ wird und der $= \frac{1}{3}$ ist. Es ist also

$$B = \frac{5 - 4 \times \frac{1}{3}}{3 + 2 \times \frac{1}{3}} = 1.$$

Weil nun $A = 2$ und $B = 1$ ist, so muß die als zerlegt dargestellte Function

$$\frac{5 - 4z}{2 - 7z - 6z^2} = \frac{2}{3 + 2z} + \frac{1}{1 - 3z} \text{ seyn.}$$

II) "Es sey die gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{6 - 3z - 5z^2}{2z - 4z^2 - 6z^3}$$

"in ihre einfachen Partialbrüche aufzulösen."

In §. 68. Nro. II) ist die Function $2z - 4z^2 - 6z^3$ in ihre einfachen Factoren zerlegt und gefunden worden, daß

$$2z - 4z^2 - 6z^3 = z(2 + 2z)(1 - 3z) \text{ ist.}$$

Setzt

Setzt man nun $\frac{M}{N} = \frac{A}{z} + \frac{B}{2 + 2z} + \frac{C}{1 - 3z}$, so muß seyn:

$$A = \frac{M}{(2 + 2z)(1 - 3z)} = \frac{6 - 3z - 5z^2}{2 - 4z - 6z^2}, \text{ für } z = 0;$$

$$B = \frac{M}{z(1 - 3z)} = \frac{6 - 3z - 5z^2}{z - 3z^2}, \text{ für } 2 + 2z = 0 \text{ und}$$

also $2 = -2z$ und $z = -1$;

$$C = \frac{M}{z(2 + 2z)} = \frac{6 - 3z - 5z^2}{2z + 2z^2}, \text{ für } 1 - 3z = 0 \text{ und}$$

folglich $z = \frac{1}{3}$.

Berechnet man jetzt die Werthe von A, B, C, so erhält man:

$$A = \frac{6 - 3 \times 0 - 5 \times 0}{2 - 4 \times 0 - 6 \times 0} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$B = \frac{6 - 3 \times -1 - 5 \times (-1)^2}{-1 - 3 \times (-1)^2} = \frac{9 - 5}{-4} = -1;$$

$$C = \frac{6 - 3 \times \frac{1}{3} - 5 \times (\frac{1}{3})^2}{2 \times \frac{1}{3} + 2 \times (\frac{1}{3})^2} = \frac{40}{8} = 5.$$

Also ist $\frac{6 - 3z - 5z^2}{2z - 4z^2 - 6z^3} = \frac{3}{z} - \frac{1}{2 + 2z} + \frac{5}{1 - 3z}$.

III) "Es soll die gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{1 - 8z + 7z^2}{1 - 3z - 4z^2 + 12z^3}$$

"in ihre einfachen Partialbrüche aufgelöst werden."

Nach §. 68. Nro. IV. ist der Nenner $1 - 3z - 4z^2 + 12z^3$ dieser Function $= (1 - 3z)(1 - 2z)(1 + 2z)$; es kann daher diese gebrochene Function $\frac{M}{N} = \frac{A}{1 - 3z} + \frac{B}{1 - 2z} + \frac{C}{1 + 2z}$ gesetzt werden.

Hier muß nun $A = \frac{M}{(1 - 2z)(1 + 2z)} = \frac{1 - 8z + 7z^2}{1 - 4z^2}$ seyn, und zwar für $1 - 3z = 0$ und $z = \frac{1}{3}$;

B =

$$B = \frac{M}{(1-3z)(1+2z)} = \frac{1-8z+7z^2}{1-z-6z^2},$$

für $1-2z=0$ und $z=\frac{1}{2}$;

$$C = \frac{M}{(1-3z)(1-2z)} = \frac{1-8z+7z^2}{1-5z+6z^2},$$

für $1+2z=0$ und $z=-\frac{1}{2}$. Demnach ist, wenn man A, B, C berechnet,

$$A = \frac{1-\frac{8}{3}+\frac{7}{9}}{1-\frac{4}{9}} = -\frac{8}{5},$$

$$B = \frac{1-\frac{8}{2}+\frac{7}{4}}{1-\frac{1}{2}-\frac{6}{4}} = \frac{5}{4},$$

$$C = \frac{1+\frac{8}{2}+\frac{7}{4}}{1+\frac{5}{2}+\frac{6}{4}} = \frac{27}{20},$$

und folglich $\frac{1-8z+7z^2}{1-3z-4z^2+12z^3} = \frac{-\frac{8}{5}}{1-3z} + \frac{\frac{5}{4}}{1-2z} + \frac{\frac{27}{20}}{1+2z}$.

IV) Eben so erhält man durch diese Zerlegungsmethode

für $\frac{6z+4}{z(1+z)}$ die Partialbrüche $\frac{4}{z}+\frac{2}{1+z}$,

für $\frac{1+z^2}{z(1+z)(1-z)}$ . . . $\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}$,

für $\frac{40+38z-26z^2}{(1-2z)(2+3z)(3+4z)}$ . . . $\frac{3}{1-2z}+\frac{4}{2+3z}+\frac{5}{3+4z}$.

§. 94.

Bey der hier zuletzt gezeigten und vom **Euler** erfundenen Zerlegungsmethode derjenigen ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$, deren Nenner N aus lauter **ungleichen** einfachen Factoren bestehen, muß man, wie wir gesehen haben, allemal das Product $P = \frac{N}{a-\alpha z}$ wissen, wenn man zu dem Factor $a-\alpha z$ den Zähler suchen will. **Euler** hat aber in dem ersten Theile des fünften Bandes der Acta der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1780 S. 32 ff. auch eine Methode gewiesen, nach welcher man auf einem ähnlichen Wege die genannten gebrochenen Functionen in ihre Partialbrüche auf=

 lösen

lösen kann, ohne daß man nöthig hat, jedesmal erst das Product $\mathfrak{P} = \frac{N}{a - \alpha z}$ aufzusuchen, welche daher in den Fällen, wenn N eine Function von hohem Grade ist, mit etwas mehr Bequemlichkeit gebraucht werden kann. Diese Methode kann aber dann erst gezeigt werden, wenn die Grundsätze des Differentialcalculs bekannt sind. Wir gehen also hier sogleich zu denjenigen Sätzen über, welche die ebenfalls vom **Euler** erfundene Methode enthalten, nach welcher auch alle diejenigen ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$ von z, deren Nenner N entweder aus **lauter gleichen**, oder theils aus **gleichen** und theils aus **ungleichen** einfachen Factoren $a - \alpha z$ bestehen, in so viele Partialbrüche zerlegt werden können, als der Gradexponent von N Einheiten enthält.

§. 95.

Es bedeute $\frac{M}{N}$ eine **ächte** gebrochene Function von z, deren Nenner N aus lauter **gleich großen** einfachen Factoren $(a - \alpha z)$ besteht und also, wenn man die Anzahl derselben n nennt, durch $(a - \alpha z)^n$ ausgedrückt werden kann. Eine solche Function kann nach den vorhergehenden Lehren unmöglich in zwey Partialbrüche $\frac{Z}{\mathfrak{P}}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{P}$ zerlegt werden, deren Summe $= \frac{M}{N}$ und in welchen $P = \frac{N}{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P} = \frac{N}{P}$ ist; sie kann aber auch eben deswegen keine Summe aus lauter einfachen Partialbrüchen seyn.

"Hingegen läßt sich allemal eine solche Function als eine Summe aus Partialbrüchen vorstellen, die folgende Form hat:

$$\frac{A}{(a - \alpha z)^n} + \frac{B}{(a - \alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a - \alpha z)^{n-2}} + \frac{D}{(a - \alpha z)^{n-3}} + \ldots + \frac{T}{(a - \alpha z)^2} + \frac{U}{a - \alpha z},$$

"in welcher die **Anzahl** der Brüche der Anzahl der Einheiten des Gradexponenten n des "Nenners N gleich ist, die **Nenner** die verschiedenen von der ersten bis zu der nten auf "einander folgenden Potenzen von $a - \alpha z$ sind, und alle die **Zähler** A, B, C ꝛc. constante Größen bedeuten."

1) Wenn man setzt, daß für alle nur immer denkbaren Werthe von z die gebrochene Function $\frac{M}{N}$ oder $\frac{M}{(a - \alpha z)^n}$ dem angegebenen Ausdrucke gleich sey, daß also, wenn man in demselben alle Brüche auf den Nenner $(a - \alpha z)^n$ zurückführt, die Gleichung

$$\frac{M}{(a - \alpha z)^n} = \frac{A + B(a - \alpha z) + C(a - \alpha z)^2 + D(a - \alpha z)^3 + \ldots + T(a - \alpha z)^{n-2} + U(a - \alpha z)^{n-1}}{(a - \alpha z)^n} \quad (h)$$

für alle Werthe von z Statt habe; so muß man ferner auch folgende Gleichung zugeben:

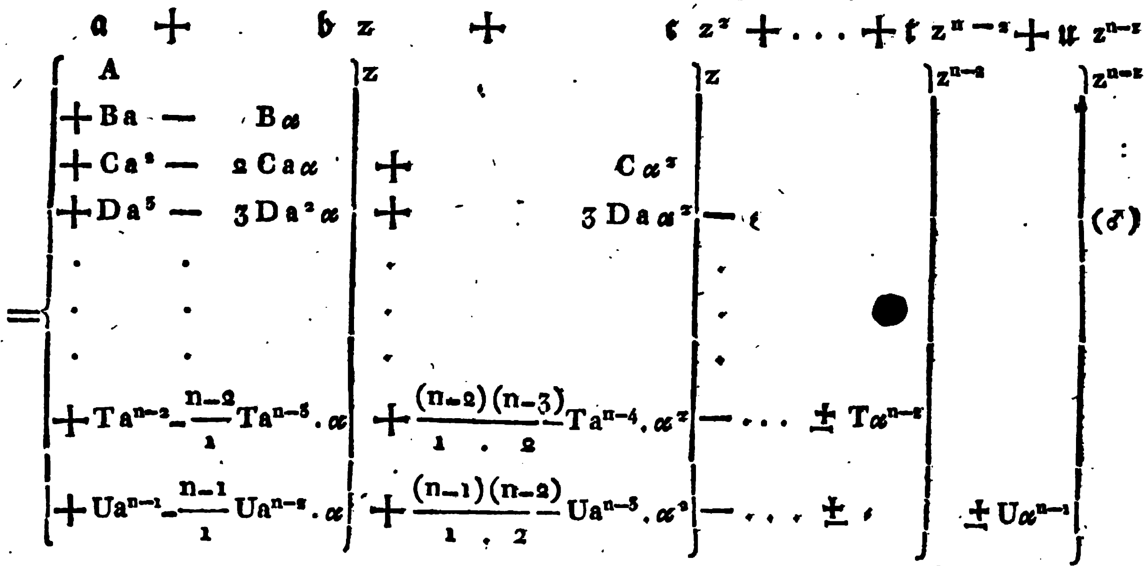
$$M = A + B(a - \alpha z) + C(a - \alpha z)^2 + D(a - \alpha z)^3 + \ldots + T(a - \alpha z)^{n-2} + U(a - \alpha z)^{n-1}.$$

Da

Da nun $\frac{M}{N}$ eine ächte gebrochene Function von z, der Gradexponent des Nenners N aber $= n$ seyn soll; so ist gewiß der Zähler M eine ganze Function von z, deren Gradexponent höchstens $= n - 1$ seyn darf. Man kann also setzen, es sey

$$M = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \mathfrak{d}z^3 + \ldots + \mathfrak{t}z^{n-2} + \mathfrak{u}z^{n-1}$$

worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ rc. bekannte und bestimmte Größen bedeuten, wenn $\frac{M}{N}$ eine bestimmte vorgegebene Function ist. Drückt man nun M so aus, und entwickelt in der Gleichung ($\mathfrak{h}$) alle Glieder gehörig; so erhält die genannte Gleichung folgende Gestalt:



2) Diese Gleichung kann aber nach §. 21. nur Statt haben, wenn die in einerley Potenzen von z multiplicirten Coefficienten einander gleich sind. Es müssen demnach, da sie vermöge der Voraussetzung in Nro. 1. wirklich Statt haben soll, folgende Gleichungen angenommen werden:

$$\mathfrak{a} = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \ldots + Ta^{n-2} + Ua^{n-1}$$

$$\mathfrak{b} = -B\alpha - 2Ca\alpha - 3Da^2\alpha - \ldots - \frac{n-2}{1}Ta^{n-3}.\alpha - \frac{n-1}{1}Ua^{n-2}.\alpha$$

$$\mathfrak{c} = C\alpha^2 + 3Da\alpha^2 + \ldots + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}.Ta^{n-4}.\alpha^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}Ua^{n-3}.\alpha^2$$

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

$$\mathfrak{t} = \pm T\alpha^{n-2} \pm \ldots$$

$$\mathfrak{u} = \mp U\alpha^{n-1}$$

In

In diesen Gleichungen sind die Größen a, b, t ꝛc. und die Größen a und α bekannt, die Größen A, B, C ꝛc. aber sind die unbekannten Zähler der im Lehrsatze angegebenen Partialbrüche; auch kommt ferner in keiner dieser Gleichungen eine der unbekannten Grössen in irgend einer Potenz oder mit einer andern unbekannten Größe multiplicirt vor: es sind also alle diese Gleichungen in Beziehung auf die unbekannten Größen A, B, C ꝛc. Gleichungen vom **ersten** Grade. Ferner erhält man solcher Gleichungen gerade so viele, als unbekannte Zähler A, B, C ꝛc. angenommen worden sind, nehmlich n, denn wenn irgend eine Potenz von z in der zweyten Seite der Gleichung ($\mathfrak{z}$) vorkommt, welche die erste Seite derselben, in welcher der Zähler M steht, nicht enthält; so kann man den Coefficienten dieser fehlenden Potenz allemal = 0 setzen. Man sieht also, daß, wenn man annimmt, es sey

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{(a-\alpha z)^n} + \frac{B}{(a-\alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a-\alpha z)^{n-2}} + \ldots + \frac{U}{a-\alpha z},$$

und durch eine auf diese Gleichung gebaute Rechnung die Zähler A, B, C ꝛc. zu bestimmen sucht, man allemal auf Gleichungen für diese Zähler kommen kann, aus welchen sich bestimmte und von z ganz unabhängige mögliche Werthe für dieselben ableiten lassen müssen. Also kann gewiß eine jede ächte gebrochene Function $\frac{M}{N} = \frac{M}{(a-\alpha z)^n}$ als eine Summe von der im Lehrsatze angegebenen Form dargestellt werden.

§. 96.

"Nun sey $\frac{M}{N}$ eine ächte gebrochene Function von z, und in dieser sey der Nenner "$N = (a-\alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}$; der Factor $\mathfrak{P}$ aber sey entweder = 1, oder = $r - \varrho z$, oder "= $(r-\varrho z)(s-\vartheta z)(t-\tau z) \times \ldots$, oder = $(b-\beta z)^p \cdot (c-\gamma z)^q \times \ldots$ "oder = $(b-\beta z)^p \cdot (c-\gamma z)^q \times \ldots \times (r-\varrho z)$, oder = $(b-\beta z)^p \cdot (c-\gamma)^q$ "$\times \ldots \times (r-\varrho z)(r-\zeta z)(t-\tau z) \times \ldots$. Eine solche Function wird "sich, es sey der Nenner N beschaffen, wie er wolle, allemal in so **viele** Partialbrüche "auflösen lassen, deren Nenner alle **verschieden** sind, als der Nenner N einfache Fa"ctoren enthält."

1) Wenn $N = (a-\alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} = 1$, folglich $N = (a-\alpha z)^n$ ist; so kann

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{(a-\alpha z)^n} + \frac{B}{(a-\alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a-\alpha z)^{n-2}} + \ldots + \frac{U}{a-\alpha z}$$

gesetzt werden, welches in dem vorigen §. erwiesen wurde.

2) Wenn



2) Wenn $N = (a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} = r - \varrho z$ ist, so kann, da der Factor $r - \varrho z$ mit $(a - \alpha z)^n$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, die Function $\frac{M}{N}$ nach §. 85. ganz gewiß in zwey Partialbrüche aufgelöst werden, so daß

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{(a - \alpha z)^n} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} \text{ ist.}$$

Zerleget man nun $\frac{Z}{(a - \alpha z)^n}$ in die n Partialbrüche nach §. 95., so erhält man für die Function $\frac{M}{N}$, $n + 1$ Partialbrüche mit verschieden großen Nennern, also gerade so viele, als der Nenner $N = (a - \alpha z)^n . (r - \varrho z)$ einfache Factoren enthält.

3) Wenn $N = (a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} = (r - \varrho z)\,(s - \vartheta z)\,(t - \tau z) \times \ldots$ ist, so kann man, da $\mathfrak{P}$ lauter von $a - \alpha z$ verschiedene Factoren enthält, nach §. 85. ebenfalls die Function $\frac{M}{N}$ in zwey Partialbrüche auflösen, so daß

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{(a - \alpha z)^n} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

wird. Nun läßt sich $\frac{Z}{(a - \alpha z)^n}$ in n Partialbrüche zerlegen, $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ aber kann, weil der Nenner $\mathfrak{P}$ aus lauter verschieden großen Factoren besteht, deren Anzahl v seyn soll, ebenfalls nach §. 92. in v Partialbrüche aufgelöst werden; es giebt also die Function $\frac{M}{N}$, wenn man diese Zerlegung vornimmt, $n + v$ Partialbrüche mit verschieden großen Nennern, mithin eben so viele, als der Nenner N einfache Factoren enthält.

4) Ist ferner $N = (a - \alpha z)^n\, \mathfrak{P}$, und der Factor $\mathfrak{P}$ ist ein Product aus lauter Potenzen verschieden großer einfacher Factoren, also $= (b - \beta z)^p . (c - \gamma z)^q \times \ldots$; so kann man abermals zuerst die Function $\frac{M}{N}$ in zwey Brüche auflösen (§. 85), so daß

$$\frac{M}{N} + \frac{Z}{(a - \alpha z)^n} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

wird; hierauf kann man ferner wiederum nach §. 85. die gebrochene Function $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ oder

$$\frac{\mathfrak{Z}}{(b - \beta z)^p . (c - \gamma z)^q \times \ldots} = \frac{Z'}{(b - \beta z)^p} + \frac{\mathfrak{Z}'}{(c - \gamma z)^q \times \ldots} \text{ setzen}$$

und Z' und $\mathfrak{Z}'$ bestimmen; dann kann man abermals

$$\frac{\mathfrak{Z}'}{(c-\gamma z)^q.(d-\delta z)^r \times \ldots} = \frac{Z''}{(c-\gamma z)^q} + \frac{\mathfrak{Z}''}{(d-\delta z)^r \times \ldots}$$ setzen

und nach §. 85. die Zähler Z'' und $\mathfrak{Z}''$ berechnen. So kann man fortfahren, bis man zuletzt auf einen Bruch kommt, welcher nur **eine** Potenz eines einfachen Factors, nicht aber ein Product aus **mehreren** Potenzen verschiedener solcher Factoren im Nenner hat. Diesen wollen wir durch $\frac{\mathfrak{Z}'''\cdots}{(l-\lambda z)^s}$ bezeichnen. Durch diese Operation nun erhält man die nachstehende Gleichung:

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{(a-\alpha z)^n} + \frac{Z'}{(b-\beta z)^p} + \frac{Z''}{(c-\gamma z)^q} + \ldots + \frac{\mathfrak{Z}'''\cdots}{(l-\lambda z)^s},$$

aus welcher man sieht, daß es für $\frac{M}{N}$ gerade so viele Partialbrüche giebt, deren Nenner Potenzen einfacher Factoren sind, als der Nenner N solcher Potenzen enthält. Da sich nun ein jeder der genannten Partialbrüche wiederum nach §. 95. in so viele Partialbrüche auflösen lassen muß, als der in dessen Nenner stehende Potenzenexponent Einheiten in sich begreift; so fällt in die Augen, daß man, im Falle man diese Auflösung vornimmt, $n + p + q + \ldots + s$ Partialbrüche mit verschieden großen Nennern für die Function $\frac{M}{N}$ erhalten muß, daß also auch hier die Zahl dieser Partialbrüche der Anzahl der einfachen Factoren von N gleich ist.

5) Wenn $N = (a-\alpha z)^n . \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} = (b-\beta z)^p . (c-\gamma z)^q \times \ldots \times (l-\lambda z)^s . (r-\varrho z)$ ist, so kann man sich, wie man leicht sieht, der Zerlegungsart in Nro. 4. bedienen, und man muß endlich hierbey auf einen Bruch kommen, welcher $\frac{\mathfrak{Z}'''\cdots}{(l-\lambda z)^s . (r-\varrho z)}$ heißt. Dieser aber kann hernach noch einmal nach §. 85. zerlegt werden, so daß

$$\frac{\mathfrak{Z}'''\cdots}{(l-\lambda z)^s (r-\varrho z)} = \frac{Z'''\cdots}{(l-\lambda z)^s} + \frac{\mathfrak{Z}''''\cdots}{r-\varrho z}$$ wird. Daher muß dann

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{(a-\alpha z)^n} + \frac{Z'}{(b-\beta z)^p} + \frac{Z''}{(c-\gamma z)^q} + \ldots + \frac{Z'''\cdots}{(l-\lambda z)^s} + \frac{\mathfrak{Z}''''\cdots}{(r-\varrho z)}$$ seyn.

Der letztere Bruch läßt sich hier nicht mehr zerlegen, weil der Nenner einfach ist, die übrigen aber geben $n + p + q + \ldots + s$ Partialbrüche, wenn man sie nach §. 95. zerlegt; man erhält also für $\frac{M}{N}$ in diesem Falle $n + p + q + \ldots + s + 1$ Partial-

tialbrüche mit verschiedenen Nennern, woraus man sieht, daß wiederum die Anzahl der Partialbrüche mit der Anzahl der einfachen Factoren des Nenners N übereinstimmt.

6) Wenn $N = (a - \alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} = (b - \beta z)^p \cdot (c - \gamma z)^q \times \ldots \times (1 - \lambda z)^s \cdot (r - \varrho z) \cdot (s - \sigma z) \times \ldots$ ist, so kann man ebenfalls die Zerlegungsmethode in Nro. 4. gebrauchen, und man muß hierbey endlich auf eine gebrochene Function $\frac{\mathfrak{Z}'''\ldots}{(1-\lambda z)^s (r - \varrho z)(s - \sigma z) \times \ldots}$ kommen, welche sich nach §. 85. noch in zwey Theile zerlegen läßt, so daß

$$\frac{\mathfrak{Z}'''\ldots}{(1 - \lambda z)^s (r - rz)(s - \sigma z) \times \ldots} = \frac{Z^{v}\ldots}{(1-\lambda z)^s} + \frac{\mathfrak{Z}''''\ldots}{(r - \varrho z)(s - \sigma z) \times \ldots}$$ ist.

Darum kann gewiß

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{(a - \alpha z)^n} + \frac{Z'}{(b - \beta z)^p} + \frac{Z''}{(c - \gamma z)^q} + \ldots + \frac{Z'''\ldots}{(1 - \lambda z)^s} + \frac{\mathfrak{Z}''''\ldots}{(r - \varrho z)(s - \sigma z) \times \ldots}$$

seyn. Weil man nun, wenn der letztere Bruch t einfache und von einander verschiedene Factoren im Nenner enthält, denselben nach §. 92. in t Partialbrüche auflösen kann, die Anzahl der Partialbrüche aus den übrigen Brüchen aber $= n + p + q + \ldots + s$ seyn muß; so ist die ganze Anzahl aller mit verschieden großen Nennern versehene Partialbrüche, welche man auf diesem Wege für $\frac{M}{N}$ erhält, $= n + p + q + \ldots + s + t$, und folglich wieder so groß, als die Anzahl der einfachen Factoren des Nenners N.

§. 97.

Das, was in den letzteren §. §. über die Zerlegung solcher ächter gebrochener Functionen $\frac{M}{N}$, in welchen die Nenner N entweder aus lauter gleichen, oder theils aus gleichen und theils aus verschiedenen einfachen Factoren bestehen, gesagt worden ist, reicht völlig zu, um alle Functionen dieser Art in ihre Partialbrüche aufzulösen; der Weg aber, auf welchem dieses den gegebenen Lehren gemäß geschehen muß, ist nicht der bequemste. Man kann zu den Nennern der Partialbrüche solcher Functionen $\frac{M}{N}$, von welchen hier gesprochen wird, die Zähler auf eine viel bequemere Art finden, welches in dem folgenden §. gezeigt werden soll.

§. 98.

"Es bedeute $\frac{M}{N}$ eine ächte gebrochene Function von z, in welcher der Nenner N "$= (a - \alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}$ ist, der Factor $\mathfrak{P}$ aber alle in §. 96. angegebenen Bedeutungen "hat. Man soll eine Methode aufsuchen, nach welcher zu einem jeden Nenner der ver"schiedenen Partialbrüche, in welche $\frac{M}{N}$ nach §. 96. auflösbar ist, der zugehörige Zähler "auf eine leichte Art berechnet werden kann."

I) Es sey $\mathfrak{P} = 1$ und also $N = (a - \alpha z)^n$.

1) Nach §. 97. kann eine jede ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{(a-\alpha z)^n} = \frac{A}{(a-\alpha z)^n} + \frac{B}{(a-\alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a-\alpha z)^{n-2}} + \frac{D}{(a-\alpha z)^{n-3}} + \ldots$$
$$+ \frac{P}{(a-\alpha z)^{n-(r-1)}} + \frac{Q}{(a-\alpha z)^{n-r}} + \ldots + \frac{S}{(a-\alpha z)^3} + \frac{T}{(a-\alpha z)^2} + \frac{U}{a-\alpha z}$$

gesetzt werden, in welcher P der rte und Q der $(r+1)$te Zähler ist. Da die Gültigkeit dieser Gleichung erwiesen ist, so muß auch alles, was sich gesetzmäßig daraus folgern läßt, von den Functionen $\frac{M}{(a-\alpha z)^n}$ gelten.

Wenn wir aber in der angeführten Gleichung alle Glieder unter den gemeinschaftlichen Nenner $(a - \alpha z)^n$ bringen, hernach die Nenner weglassen, und blos die Gleichung zwischen den Zählern behalten; so erhalten wir:

$$M = A + B(a-\alpha z) + C(a-\alpha z)^2 + D(a-\alpha z)^3 + \ldots + P(a-\alpha z)^{r-1}$$
$$+ Q(a-\alpha z)^r + \ldots + S(a-\alpha z)^{n-3} + T(a-\alpha z)^{n-2} + U(a-\alpha z)^{n-1},$$

aus welcher ferner die nachstehende Gleichung folgt:

$$(\text{♉})\ M - A - B(a-\alpha z) - C(a-\alpha z)^2 - D(a-\alpha z)^3 - \ldots - P(a-\alpha z)^{r-1}$$
$$- Q(a-\alpha z)^r - \ldots - S(a-\alpha z)^{n-3} - T(a-\alpha z)^{n-2} = U(a-\alpha z)^{n-1}$$

2) Letztere Gleichung muß nothwendig bey allen ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{(a-\alpha z)^n}$ Statt haben, denn sie ist durch richtige Schlüsse aus einer für diese Functionen gültigen Gleichung gefolgert worden. Darum aber müssen bey allen Functionen $\frac{M}{(a-\alpha z)^n}$ auch die Sätze Statt haben, welche Bedingungen der Möglichkeit der letztern

Glei-

Gleichung sind. Diese wollen wir jetzt aufsuchen. Die Seite rechter Hand in der erwähnten Gleichung ist durch $a - \alpha z$ theilbar, folglich muß es auch die Seite linker Hand seyn; denn wäre dieß nicht der Fall, so wäre die Gleichung, deren Möglichkeit ausgemacht ist, unmöglich. Nun sind in der Seite linker Hand alle der Differenz $M - A$ nachfolgenden Glieder für sich durch $a - \alpha z$ theilbar, es muß demnach aus bekannten Gründen auch die Differenz $M - A$ durch $a - \alpha z$ theilbar seyn. Man muß also wegen der für die gebrochenen Functionen $\frac{M}{(a - \alpha z)^n}$ gültigen und in Nro. 1. angegebenen Gleichung annehmen, daß $M - A$ durch $a - \alpha z$ theilbar, d. h., daß $a - \alpha z$ ein einfacher Factor der Function $M - A$ sey. Wenn aber $a - \alpha z$ ein Factor von $M - A$ ist, so muß $M - A$ für den Werth von $z = \frac{a}{\alpha}$, für welchen $a - \alpha z = 0$ wird, den Werth $= 0$ erhalten. Man stelle sich demnach vor, es sey in der Function $M - A$ überall statt z der Werth $\frac{a}{\alpha}$ gesetzt; so hat man eine Gleichung $M - A = 0$, aus welcher $M = A$ folgt.

"Der Werth des Zählers A, welcher zu dem Nenner $(a - \alpha z)^n$ gehört, wird "demnach erhalten, wenn man den Zähler M der Function nimmt und darin statt z überall "den Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzt."

3) Weil nun $a - \alpha z$ ein Factor von $M - A$ ist, so muß auch der Quotient $\frac{M - A}{a - \alpha z}$ eine ganze Function $= \mathfrak{A}$ geben, und es muß also

$$M - A = \mathfrak{A}\,(a - \alpha z) \text{ seyn.}$$

Diese Function $\mathfrak{A}$ aber ist allemal bestimmbar, weil man A nach Nro. 2. zu bestimmen weiß. Man suche also $\mathfrak{A}$ und setze statt $M - A$ den Werth $\mathfrak{A}\,(a - \alpha z)$ in die Gleichung ($\mathfrak{b}$) in Nro. 1. Hierdurch erhält man eine auf beyden Seiten durch $a - \alpha z$ dividirbare Gleichung, die, wenn man wirklich mit $a - \alpha z$ dividirt, so aussieht:

$$\mathfrak{A} - B - C(a - \alpha z) - D(a - \alpha z)^2 - \ldots - P(a - \alpha z)^{r-2} - Q(a - \alpha z)^{r-1} - \ldots$$
$$- S(a - \alpha z)^{n-4} - T(a - \alpha z)^{n-3} = U(a - \alpha z)^{n-2}. \qquad (\mathfrak{c})$$

Diese Gleichung ist aus einer gültigen Gleichung gefolgert, sie muß daher für alle Functionen $\frac{M}{(a - \alpha z)^n}$ gültig seyn. Sie wäre aber unmöglich, wenn nicht die linke Seite derselben, und folglich die Differenz $\mathfrak{A} - B$ durch $a - \alpha z$ theilbar wäre, wodurch die rechte Seite theilbar ist.

Man muß also annehmen, es sey $a - \alpha z$ ein Factor von der Function $\mathfrak{A} - B$. Da nun $a - \alpha z$ für $z = \frac{a}{\alpha}$ den Werth $= 0$ erhält, so wird auch die Function $\mathfrak{A} - B$, von welcher $a - \alpha z$ ein Factor ist, für $z = \frac{a}{\alpha}$ den Werth $= 0$ erhalten müssen. Man stelle sich demnach vor, es sey überall in der Function $\mathfrak{A} - B$ statt z der Werth $\frac{a}{\alpha}$ geschrieben, hierdurch erhält man eine Gleichung $\mathfrak{A} - B = 0$, aus welcher $\mathfrak{A} = B$ folgt.

"Der zweyte zu dem Nenner $(a - \alpha z)^{n-1}$ gehörige Zähler B wird also gefunden, "wenn man die vorher berechnete Function $\mathfrak{A}$ nimmt und in derselben überall statt z den "Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzt."

4) Weil $a = \alpha z$ ein Factor von $\mathfrak{A} - B$ ist, so muß der Quotient

$\frac{\mathfrak{A} - B}{a - \alpha z}$ eine ganze Function $= \mathfrak{B}$ geben, es muß also

$$\mathfrak{A} - B = \mathfrak{B}\,(a - \alpha z) \text{ seyn.}$$

Man berechne $\mathfrak{B}$ und setze statt $\mathfrak{A} - B$ den Werth $\mathfrak{B}\,(a - \alpha z)$ in die Gleichung (C). Hierdurch erhält man eine auf beyden Seiten durch $a - \alpha z$ dividirbare Gleichung, welche, wenn man wirklich mit $a - \alpha z$ auf beyden Seiten dividirt, so aussieht:

$$\mathfrak{B} - C - D\,(a - \alpha z) - E\,(a - \alpha z)^2 - \ldots - P\,(a - \alpha z)^{r-3} - Q\,(a - \alpha z)^{r-2} - \ldots$$
$$- S\,(a - \alpha z)^{n-5} - T\,(a - \alpha z)^{n-4} = U\,(a - \alpha z)^{n-3}$$

Diese Gleichung ist wiederum aus einer Gleichung, deren Gültigkeit keinem Zweifel unterworfen ist, richtig abgeleitet, sie muß also von allen Functionen $\frac{M}{(a - \alpha z)^n}$ gelten. Dieses könnte sie aber nicht, wenn nicht die Seite linker Hand und also auch $\mathfrak{B} - C$ durch $a - \alpha z$ theilbar wäre, denn die Seite rechter Hand ist durch $a - \alpha z$ theilbar. Da man also annehmen muß, daß $a - \alpha z$ ein Factor von $\mathfrak{B} - C$ sey; so muß $\mathfrak{B} - C = 0$ werden für $z = \frac{a}{\alpha}$. Hieraus folgt aber, daß für $z = \frac{a}{\alpha}$ auch $\mathfrak{B} = C$ sey.

"Der dritte Zähler, welcher dem Nenner $(a - \alpha z)^{n-2}$ zugehört, wird gefunden, "wenn man die vorher berechnete Function $\mathfrak{B}$ nimmt und in derselben statt z überall den "Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzt."

5) Die

5) Die Gleichungen, aus welchen wir durch die bisherigen Schlüsse die drey ersten Zähler A, B, C gefunden haben, waren diese:

$$M - A - B(a-\alpha z) - C(a-\alpha z)^2 - D(a-\alpha z)^3 - E(a-\alpha z)^4 - \ldots - P(a-\alpha z)^{r-1}$$
$$- Q(a-\alpha z)^r - \ldots - S(a-\alpha z)^{n-3} - T(a-\alpha z)^{n-2} = U(a-\alpha z)^{n-1};$$

$$\mathfrak{A} - B - C(a-\alpha z) - D(a-\alpha z)^2 - E(a-\alpha z)^3 - \ldots - P(a-\alpha z)^{r-2} - Q(a-\alpha z)^{r-1} - \ldots$$
$$- S(a-\alpha z)^{n-4} - T(a-\alpha z)^{n-3} = U(a-\alpha z)^{n-2};$$

$$\mathfrak{B} - C - D(a-\alpha z) - E(a-\alpha z)^2 - \ldots - P(a-\alpha z)^{r-3} - Q(a-\alpha z)^{r-2} - \ldots$$
$$- S(a-\alpha z)^{n-5} - T(a-\alpha z)^{n-4} = U(a-\alpha z)^{n-3}.$$

An diesen Gleichungen bemerken wir ein ihnen gemeinschaftliches Gesetz: a) Eine jede derselben fängt mit einer Größe an, welche keiner von den angenommenen Zählern A, B, C rc., sondern eine gewisse Function von z ist; b) das zweyte Glied in jeder Gleichung ist derjenige Zähler, dessen Werth aus der Gleichung abgeleitet werden kann; c) auf den Zähler, der jedesmal in einer der Gleichungen das zweyte Glied ausmacht, folgen allemal der Ordnung nach alle übrigen Zähler, und diese sind mit den von Grad zu Grad auf einander folgenden Potenzen von $a - \alpha z$ multiplicirt; d) das letzte Glied in der linken Seite einer jeden Gleichung ist jedesmal ein Product aus dem $(n-1)$ten Zähler T in eine Potenz von $a - \alpha z$, deren Exponent der Unterschied zwischen n und einer gewissen Zahl ist, die allemal eine Einheit mehr enthält, als die Zahl, welche andeutet, der wievielste Zähler von den n angenommenen Zählern A, B, C ... U als zweytes Glied in der Gleichung steht; e) die Seite rechter Hand enthält ein einziges Glied, und dieses ist ein Product aus dem nten Zähler U in eine Potenz von $a - \alpha z$, deren Exponent der Unterschied zwischen n und einer Zahl ist, die eben so viele Einheiten in sich begreift, als die Zahl, welche zählt, der wievielste unter den n angenommenen Zählern A, B, C ... U das zweyte Glied der Gleichung bildet.

Wäre dieses Gesetz allgemein, so müßte die Gleichung, aus der sich der rte Zähler P (Nro. 1.) ableiten ließe, so aussehen:

$$\text{(h)} \quad \mathfrak{O} - P - Q(a-\alpha z) - R(a-\alpha z)^2 - \ldots - S(a-\alpha z)^{n-(r+2)}$$
$$- T(a-\alpha z)^{n-(r+1)} = U(a-\alpha z)^{n-r}$$

6) Wir wollen einmal annehmen, es sey diese Gleichung für den rten Zähler P wirklich richtig und untersuchen, was aus dieser Hypothese folgt.

Mit der Annahme der Richtigkeit dieser Gleichung, in der die Seite rechter Hand ganz gewiß durch $a - \alpha z$ dividirbar ist, wird auch zugleich angenommen, daß die Seite linker

linker Hand, und folglich auch 𝔔 — P durch a — αz dividirbar, d. h., daß a — αz ein Factor von 𝔔 — P sey und also 𝔔 — P für $z = \frac{a}{\alpha}$ den Werth = o erhalte. Stellt man sich nun vor, es werde wirklich in der Function 𝔔 — P überall statt z der Werth $\frac{a}{\alpha}$ gesetzt; so erhält man die Gleichung 𝔔 — P = o, woraus 𝔔 = P folgt. Wenn man aber annehmen muß, es sey a — αz ein Factor von 𝔔 — P; so muß man auch zugeben, daß der Quotient $\frac{\mathfrak{Q} - P}{a - \alpha z}$ eine ganze Function = 𝔓 geben, daß man also 𝔔 — P = 𝔓 (a — αz) setzen könne. Ueberdieß muß man zulassen, diesen Werth statt 𝔔 — P in die angenommene Gleichung (h) in Nro. 5. zu setzen, wodurch alsdann die Gleichung

$$\mathfrak{P}(a - \alpha z) - Q(a - \alpha z) - R(a - \alpha z)^2 - \ldots - S(a - \alpha z)^{n-(r+2)} - T(a - \alpha z)^{n-(r+1)} = U(a - \alpha z)^{n-r}$$

entsteht, die, wenn man auf beyden Seiten mit a — αz dividirt, so aussieht:

$$\mathfrak{P} - Q - R(a - \alpha z) - \ldots - S(a - \alpha z)^{n-(r+3)} - T(a - \alpha z)^{n-(r+2)} = U(a - \alpha z)^{n-(r+1)}$$

Diese Gleichung folgt durch richtige Schlüsse aus der Gleichung (h) in Nro. 5. und muß angenommen werden, sobald die Gleichung (h) angenommen wird. Sie ist ganz demselben Gesetze unterworfen, welchem die Gleichung (h) unterworfen ist, und aus ihr läßt sich der (r + 1)te Zähler 𝔔 ganz auf dieselbe Weise ableiten, auf welche aus der Gleichung (h) der rte Zähler P abgeleitet wurde. Die Folge aus der Annahme der Gleichung (h) ist also diese:

"Das Gesetz der Gleichungen, aus welchen sich die Zähler ableiten lassen, und die "Regel ihrer Ableitung ist **allgemein**, so bald irgend ein rter Zähler aufgewiesen werden "kann, von welchem dieses Gesetz und diese Regel wirklich gültig ist. Da nun der **dritte** "Zähler C ein solcher Zähler ist, bey welchem das Gesetz seiner Gleichung und die Regel "seiner Ableitung aus derselben keinem Zweifel unterworfen ist; so muß das Verfahren, "dessen wir uns bey der Bestimmung der Werthe A, B, C bedienten, von allen übrigen "Zählern, welche in der linken Seite der Gleichung (±) in Nro. 1. vorkommen, gül- "tig seyn."

7) Die

7) Die Bestimmung des nten Zählers U, welcher auf der rechten Seite der Gleichungen vorkommt, ist folgende: Es muß nehmlich für den (n — 1)ten Zähler T dem angegebenen Gleichungsgesetze gemäß die Gleichung diese seyn:

$$\mathfrak{S} - T = U (a - \alpha z)^{n-(n-1)} \text{ d. h.}$$
$$\mathfrak{S} - T = U (a - \alpha z).$$

Wegen dieser Gleichung aber muß sich $\mathfrak{S} - T$ durch $a - \alpha z$ theilen lassen, d. h., es muß $\mathfrak{S} - T$ die Größe $a - \alpha z$ als Factor enthalten. Hieraus folgt nun wieder, daß $\mathfrak{S} - T$ für $z = \frac{a}{\alpha}$ den Werth $= 0$ erhalten, daß ferner bey diesem Werthe von z $\mathfrak{S} = T$ seyn, und daß endlich der Quotient $\frac{\mathfrak{S} - T}{a - \alpha z}$ eine ganze Function $= \mathfrak{U}$ geben muß. Sucht man nun $\mathfrak{U}$ wirklich und setzt statt $\mathfrak{S} - T$ den Werth $\mathfrak{U} (a - \alpha z)$ in die vorige Gleichung, so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{U} (a - \alpha z) = U (a - \alpha z),$$
aus welcher $\mathfrak{U} = U$ folgt.

"Es ist also der nte Zähler U, welcher zu dem Nenner $a - \alpha z$ gehört, allemal "der Function $\mathfrak{U}$ gleich, welche man suchet, nachdem der (n — 1)te Zähler T bestimmt "worden ist."

II) Es sey jetzt $N = (a - \alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}$ bedeute irgend eine der in §. 96. angeführten Functionen von z.

1) Der Beschaffenheit der verschiedenen Functionen gemäß, welche $\mathfrak{P}$ anzeigen soll, kann nach §. 85. die Function

$$\frac{M}{(a - \alpha z^n \cdot \mathfrak{P}} = \frac{Z}{(a - \alpha z)^n} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

gesetzt werden und es muß also, wenn man $\frac{Z}{(a - \alpha z)^n}$ durch seine Partialbrüche ausdrückt, bey allen Functionen $\frac{M}{(a - \alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}}$ folgende Gleichung Statt haben:

$$\frac{M}{(a - \alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}} = \frac{A}{(a - \alpha z)^n} + \frac{B}{(a - \alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a - \alpha z)^{n-2}} + \frac{D}{(a - \alpha z)^{n-3}} + \ldots$$
$$+ \frac{T}{(a - \alpha z)^2} + \frac{U}{a - \alpha z} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}.$$

Aus dieser erhält man aber, wenn man allen Gliedern den gemeinschaftlichen Nenner $(a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}$ giebt, hernach aber blos die Gleichung zwischen den Zählern beybehält und in dieser alle Glieder, das letzte ausgenommen, auf die linke Seite schaft, die nachstehende Gleichung:

$$M - A\mathfrak{P} - B\mathfrak{P}(a - \alpha z) - C\,\mathfrak{P}(a - \alpha z)^2 - D\mathfrak{P}(a - \alpha z)^3 - \dots$$
$$- T\mathfrak{P}(a - \alpha z)^{n-2} - U\mathfrak{P}(a - \alpha z)^{n-1} = \mathfrak{Z}(a - \alpha z)^n. \qquad (\odot)$$

Diese letzte Gleichung ist aus einer Gleichung gefolgert, welche wirklich bey allen Functionen $\frac{M}{(a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}}$ Statt hat, demnach muß auch sie bey allen diesen Functionen Statt haben. Die Seite rechter Hand aber in der erwähnten Gleichung ist durch $a - \alpha z$ theilbar; man ist also, da man die Gleichung nothwendig gelten lassen muß, anzunehmen genöthigt, daß auch die Seite linker Hand und folglich die Differenz $M - A\mathfrak{P}$ durch $a - \alpha z$ theilbar, d. h., daß $a - \alpha z$ ein Factor von $M - A\mathfrak{P}$ sey. Da nun dieses ist, so muß $M - A\mathfrak{P}$ für $z = \frac{a}{\alpha}$, wofür $a - \alpha z = 0$ wird, den Werth $= 0$ erhalten; man bekommt also, wenn man sich vorstellt, es sey überall in $M - A\mathfrak{P}$ statt z der Werth $\frac{a}{\alpha}$ gesetzt worden, eine Gleichung $M - A\mathfrak{P} = 0$, aus welcher $\frac{M}{\mathfrak{P}} = A$ folgt.

„Der dem Nenner $(a - \alpha z)^n$ zugehörige Zähler A wird gefunden, wenn man den der „Function $\frac{M}{N}$ zugehörigen Zähler M durch $\mathfrak{P}$ dividirt und in dem Quotienten $\frac{M}{\mathfrak{P}}$ überall „statt z den Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzt."

2) Wenn man annehmen muß, daß $M - A\mathfrak{P}$ durch $a - \alpha z$ theilbar sey (Nro. 1.); so muß auch angenommen werden, daß der Quotient $\frac{M - A\mathfrak{P}}{a - \alpha z}$ eine ganze Function $= \mathfrak{X}$ gebe, daß mithin $M - A\mathfrak{P} = \mathfrak{X}(a - \alpha z)$ sey. Man setze diesen Werth von $M - A\mathfrak{P}$ in die Gleichung in Nro. 1. und dividire alsdann auf beyden Seiten mit dem in allen Gliedern stehenden Factor $a - \alpha z$; hierdurch erhält man folgende Gleichnng:

$$\mathfrak{X} - B . \mathfrak{P} - C\mathfrak{P}(a - \alpha z) - D\mathfrak{P}(a - \alpha z)^2 - \dots - T\mathfrak{P}(a - \alpha z)^{n-3}$$
$$- U\mathfrak{P}(a - \alpha z)^{n-2} = \mathfrak{Z}(a - \alpha z)^{n-1}$$

Diese muß abermals nothwendig als gültig angenommen werden, denn sie ist aus der Gleichung in Nro. 1. durch richtige Schlüsse gefolgert worden. Darum muß man aber auch wieder annehmen, daß die Seite linker Hand durch $a - \alpha z$, und folglich auch, daß

daß die Differenz $\mathfrak{A} - B\,\mathfrak{P}$ durch diese Größe theilbar sey, denn es ist ja die Seite rechter Hand durch eben diese Größe theilbar. Die Function $\mathfrak{A} - B\,\mathfrak{P}$ enthält also die Größe $a - \alpha z$ als Factor und wird $= 0$, wenn man in derselben überall statt z den Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzt, wodurch der Factor $a - \alpha z$ den Werth $= 0$ erhält.

Thut man dieses wirklich, so erhält man eine Gleichung $\mathfrak{A} - B\,\mathfrak{P} = 0$, aus welcher $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} = B$ folgt.

"Es wird demnach der zweyte Zähler B, welcher dem Nenner $(a - \alpha z)^{n-1}$ zugehört, "gefunden, wenn man den vorher berechneten Werth der Function $\mathfrak{A}$ durch die Function "$\mathfrak{P}$ dividirt und dann überall in dem Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}}$ statt z den Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzt."

3) Ist $a - \alpha z$ ein Factor von $\mathfrak{A} - B\,\mathfrak{P}$, so ist auch gewiß der Quotient $\frac{\mathfrak{A} - B\,\mathfrak{P}}{a - \alpha z}$ eine ganze Function $= \mathfrak{B}$. Berechnet man nun $\mathfrak{B}$ und setzt statt $\mathfrak{A} - B.\mathfrak{P}$ den Werth $\mathfrak{B}\,(a - \alpha z)$ in die Gleichung in Nro. 2.; so erhält man eine Gleichung, in welcher alle Glieder den Factor $a - \alpha z$ enthalten und die, wenn man überall diesen Factor wegläßt, so aussieht.

$$\mathfrak{B} - C\,\mathfrak{P} - D\,\mathfrak{P}\,(a - \alpha z) - E\,\mathfrak{P}\,(a - \alpha z)^2 - \ldots - T\,\mathfrak{P}\,(a - \alpha z)^{n-4} - U.\mathfrak{P}\,(a - \alpha z)^{n-3} = \mathfrak{Z}\,(a - \alpha z)^{n-2}$$

Aus dieser Gleichung, deren Gültigkeit man zugestehen muß, folgt wiederum, wenn man die vorige Schlußart gebraucht, daß $a - \alpha z$ ein Factor von $\mathfrak{B} - C\,\mathfrak{P}$ seyn und daß also für $z = \frac{a}{\alpha}$ die Differenz $\mathfrak{B} - C\,\mathfrak{P} = 0$ werden muß. Aus der Gleichung $\mathfrak{B} - C\,\mathfrak{P} = 0$ erhält man aber $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}} = C$.

"Der dem Nenner $(a - \alpha z)^{n-2}$ zugehörige Zähler C wird also erhalten, wenn "man die vorher berechnete Function $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{P}$ dividirt, hernach aber überall statt z den "Werth $\frac{a}{\alpha}$ setzt."

4) Die Gleichungen, aus welchen die drey Zähler A, B, C abgeleitet worden sind, waren diese:

M —



$$M - A\mathfrak{P} - B\mathfrak{P}(a-\alpha z) - C\mathfrak{P}(a-\alpha z)^2 - D\mathfrak{P}(a-\alpha z)^3 - E\mathfrak{P}(a-\alpha z)^4 - \ldots - T\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-2} - U\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-1} = \mathfrak{Z}(a-\alpha z)^n;$$

$$\mathfrak{A} - B\mathfrak{P} - C\mathfrak{P}(a-\alpha z) - D\mathfrak{P}(a-\alpha z)^2 - E\mathfrak{P}(a-\alpha z)^3 - \ldots - T\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-3} - U\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-2} = \mathfrak{Z}(a-\alpha z)^{n-1};$$

$$\mathfrak{B} - C - D\mathfrak{P}(a-\alpha z) - E\mathfrak{P}(a-\alpha z)^2 - \ldots - T\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-4} - U\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-3} = \mathfrak{Z}(a-\alpha z)^{n-2}.$$

An ihnen bemerken wir ein ihnen gemeinschaftliches Gesetz, welches leicht in die Augen fällt, daher die Beschreibung desselben überflüssig ist.

Wäre dieß Gesetz allgemein gültig, so müßte, wenn man den rten Zähler P, den $(r+1)$ten Q, den $(r+2)$ten R, die bey der Berechnung des $(r-1)$ten Zählers erhaltene Function aber $\mathfrak{O}$ nennt, die Gleichung für den rten Zähler P so aussehen:

$$\mathfrak{O} - P\mathfrak{P} - Q\mathfrak{P}(a-\alpha z) - R\mathfrak{P}(a-\alpha z)^2 - \ldots - T\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-(r+1)} - U\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-r} = \mathfrak{Z}(a-\alpha z)^{n-(r-1)}.$$

Wir wollen setzen, es sey das Gesetz allgemein gültig und mithin diese Gleichung richtig. Hiermit ist zugleich festgesetzt, daß die ganze linke Seite der angenommenen Gleichung und also auch die Differenz $\mathfrak{O} - P\mathfrak{P}$ durch $a - \alpha z$ theilbar, d. h., daß $a - \alpha z$ ein Factor von $\mathfrak{O} - P\mathfrak{P}$ sey. Es folgt demnach wieder, daß der rte Zähler $P = \frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{P}}$ seyn muß, und zwar für $z = \frac{a}{\alpha}$, daß ferner der Quotient $\frac{\mathfrak{O} - P\mathfrak{P}}{a - \alpha z}$ eine ganze Function $= \mathfrak{P}'$ ist, und daß man statt $\mathfrak{O} - P\mathfrak{P}$ in die angenommene Gleichung den Werth $\mathfrak{P}'(a - \alpha z)$ setzen kann. Thut man nun dieses, so erhält man eine Gleichung, in der alle Glieder den Factor $a - \alpha z$ enthalten und die, wenn man diesen Factor überall wegläßt, so aussieht:

$$\mathfrak{P}' - Q\mathfrak{P} - R\mathfrak{P}(a-\alpha z) - \ldots - T\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-(r+2)} - U\mathfrak{P}(a-\alpha z)^{n-(r+1)} = \mathfrak{Z}(a-\alpha z)^{n-r}$$

Man sieht, daß dieses eine Gleichung für den $(r+1)$ten Zähler Q ist, welche ganz dieselbe Form hat, wie die für den rten Zähler P angenommene Gleichung, und daß also aus dieser Gleichung für Q der Werth von Q durch dieselben Schlüsse gefunden werden kann, durch welche der Werth von P aus der Gleichung für P abgeleitet wurde. Daraus folgt aber, daß das Gesetz der Gleichungen, aus welchen man die Zähler ableiten kann, und das Gesetz der Ableitung derselben für einen jeden $(r+1)$ten Zähler gelten muß, wenn es für irgend einen Zähler gültig ist. Nun ist es aber für den Zähler C erwiesen, also muß es allgemein gültig seyn.

5) Es lassen sich also alle den Zählern A, B, C nachfolgenden Zähler auf dieselbe Art bestimmen, auf welche die Zähler B und C bestimmt worden sind, und die Gleichung für den nten Zähler U muß ganz gewiß diese seyn:

$$\mathfrak{T} - U\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}(a - \alpha z)^{n-(n-1)} \text{ d. h.}$$
$$\mathfrak{T} - U\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}(a - \alpha z).$$

Da nun $\mathfrak{T} - U\mathfrak{P}$ durch $a - \alpha z$ theilbar seyn und folglich die Größe $a - \alpha z$ als Factor enthalten muß; so folgt wiederum, wenn man sich vorstellt, es sey in $\mathfrak{T} - U\mathfrak{P}$ überall statt z der Werth $\frac{a}{\alpha}$ gesetzt, daß $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{P}} = U$ und ferner, daß $\frac{\mathfrak{T} - U\mathfrak{P}}{a - \alpha z}$ eine ganze Function $= \mathfrak{U}$ sey. Setzt man jetzt in die vorige Gleichung statt $\mathfrak{T} - U\mathfrak{P}$ den Werth $\mathfrak{U}(a - \alpha z)$, so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{U}(a - \alpha z) = \mathfrak{Z}(a - \alpha z), \text{ woraus } \mathfrak{U} = \mathfrak{Z} \text{ folgt.}$$

"Daraus sieht man, daß der dem Nenner $\mathfrak{P}$ zugehörige Zähler $\mathfrak{Z}$ die Function $\mathfrak{U}$ ist, "welche man allemal berechnen kann, wenn man den nten Zähler U berechnet hat."

6) Man kann auch den Zähler $\mathfrak{Z}$ auf folgende Art bestimmen: Man setzt alle Werthe, welche man für die Zähler A, B, C ... U gefunden hat, in die in Nro. 1. aufgestellte Gleichung

$$\frac{M}{(a - \alpha z)^n \cdot \mathfrak{P}} = \frac{A}{(a - \alpha z)^n} + \frac{B}{(a - \alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a - \alpha z)^{n-2}} + \ldots + \frac{T}{(a - a\alpha)^2} + \frac{U}{a - \alpha z} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}},$$

dann enthält diese Gleichung nur eine einzige unbekannte Größe $\mathfrak{Z}$ und man bekommt, wenn man dieselbe aus ihr ableitet, die nachstehende Gleichung:

$$\frac{M - [A + B(a - \alpha z) + C(a - \alpha z)^2 + \ldots + T(a - \alpha z)^{n-2} + U(a - \alpha z)^{n-1}]}{(a - \alpha z)^n} = \mathfrak{Z}$$

7) Jetzt sey

a) $\mathfrak{P}$ eine Function vom ersten Grade, also $= r - \varrho z$. In diesem Falle kann mit dem letzten Bruche $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ weiter keine Zerlegung mehr vorgenommen werden, und es ist also die Zerlegung der Function $\frac{M}{N}$ geendigt, sobald der letzte Zähler $\mathfrak{Z}$ berechnet ist. Es sey ferner

b) $\mathfrak{P}$ ein Product aus mehreren verschieden großen einfachen Factoren, z. E. $= (r - \varrho z) \times (s - \sigma z) (t - \tau z) \times \ldots$ Dann kann die Function $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ auch noch zerlegt werden und zwar nach §. 92. in eben so viele einfache Partialbrüche, als der Nenner $\mathfrak{P}$ einfache Factoren enthält. Man findet für den Nenner $r - \varrho z$ den Zähler A', wenn man $(s - \sigma z) (t - \tau z) \times \ldots = \mathfrak{P}'$ in den Zähler $\mathfrak{Z}$ dividirt, und in dem Quotienten $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}'}$ statt z den Werth $\frac{r}{\varrho}$ setzt: ferner findet man für den Nenner $s - \sigma z$ den Zähler B', wenn man $(r - \varrho z) (t - \tau z) \times \ldots = \mathfrak{P}''$ nimmt, wiederum in den Zähler $\mathfrak{Z}$ dividirt, und in dem Quotienten $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}''}$ statt z den Werth $\frac{s}{\sigma}$ setzt u. s. w. Also muß man bey der Zerlegung des letzten Partialbruches $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ den Zähler wissen, der allemal nach Nro. 5. oder Nro. 6. leicht gefunden werden kann. Man kann aber auch dieselbe Zerlegung mit dem letzten Bruche vornehmen, ohne daß man nöthig hat, den Zähler $\mathfrak{Z}$ vorher zu suchen. Wir wollen dieß bey der Bestimmung des dem Nenner $r - \varrho z$ zugehörigen Zählers A' zeigen, denn was hier gilt, das muß auch bey der Bestimmung aller übrigen Zähler der einfachen Partialbrüche des Bruches $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ gelten.

Es ist der dem Nenner $r - \varrho z$ zugehörige Zähler $A' = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}'}$ und zwar für $z = \frac{r}{\varrho}$, $\mathfrak{P}'$ aber ist $= (s - \sigma z) (t - \tau z) \times \ldots$. Setzt man in diesen Ausdruck für A' die Formel von $\mathfrak{Z}$, welche in Nro. 6. angegeben wurde, und drückt in der Formel von $\mathfrak{Z}$ die Größe $\mathfrak{P}$ durch $(r - \varrho z)\, \mathfrak{P}'$ aus; so erhält man für A' den Ausdruck

$$\frac{M - [A - B(a - \alpha z) - C(a - \alpha z)^2 - \ldots - T(a - \alpha z)^{n-2} - U(a - \alpha z)^{n-1}] . \mathfrak{P}'(r - \varrho z)}{(a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}'}.$$

Da nun dieser für den Werth $z = \frac{r}{\varrho}$ gelten soll, so muß ganz gewiß der im Zähler von M subtrahirte Theil für $z = \frac{r}{\varrho}$ den Werth $= 0$ erhalten, weil für diesen Werth von z der Factor $r - \varrho z = 0$ wird. Es ist also

$$A' = \frac{M}{(a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}'} = \frac{\frac{M}{(a - \alpha z)^n}}{\mathfrak{P}'},$$

für

für $z = \frac{r}{\varrho}$. "Daraus sieht man, daß man statt Z die Größe $\frac{M}{(a - \alpha z)^n}$ gebrauchen "kann."

Es sey ferner auch

c) $\mathfrak{P}$ ein Product aus mehreren Potenzen verschiedener einfacher Factoren, z. E. $= (b - \alpha z)^p . (c - \gamma z)^q . (d - \delta z)^n \times \ldots \times (l - \lambda z)^s$. In diesem Falle ist die Zerlegung der Function $\frac{M}{(a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}}$ diese:

Nach §. 96. Nro. 4. ist

$$\frac{M}{(a - \alpha z)^n . (b - \beta z)^p . (c - \gamma z)^q \times \ldots \times (l - \lambda z)^s}$$

$$= \frac{Z}{(a - \alpha z)^n} + \frac{Z''}{(b - \beta z)^p} + \frac{Z'''}{(c - \gamma z)^q} + \ldots + \frac{Z'''\cdots}{(l - \lambda z)^s}.$$

Drückt man aber die einzelnen Partialbrüche aus, in welche die Brüche

$$\frac{Z}{(a - \alpha z)^n}, \frac{Z''}{(b - \beta z)^p}, \frac{Z'''}{(c - \gamma z)^q} \text{ etc.}$$

nach §. 95. zerlegt werden können; so erhält man die Gleichung

(h) $$\frac{M}{(a - \alpha z)^n . (b - \beta z)^p . (c - \gamma z)^q \times \ldots \times (l - \lambda z)^s}$$

$$= \frac{A}{(a - \alpha z)^n} + \frac{B}{(a - \alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a - \alpha z)^{n-2}} + \ldots + \frac{U}{a - \alpha z}$$

$$+ \frac{A'}{(b - \beta z)^p} + \frac{B'}{(b - \beta z)^{p-1}} + \frac{C'}{(b - \beta z)^{p-2}} + \ldots + \frac{U'}{b - \beta z}$$

$$+ \frac{A''}{(c - \gamma z)^q} + \frac{B''}{(c - \gamma z)^{q-1}} + \frac{C''}{(c - \gamma z)^{q-2}} + \ldots + \frac{U''}{c - \gamma z}$$

$$+ \text{— — — — — — — — — —}$$

$$+ \text{— — — — — — — — — —}$$

$$+ \frac{A'''\cdots}{(l - \lambda z)^s} + \frac{B'''\cdots}{(l - \lambda z)^{s-1}} + \frac{C'''\cdots}{(l - \lambda z)^{s-2}} + \ldots + \frac{U'''\cdots}{l - \lambda z}$$

Man kann demnach alle Partialbrüche der vorgegebenen Function $\frac{M}{(a - \alpha z)^n . \mathfrak{P}}$ angeben, wenn man die Zähler A, B, C ... U; A', B', C' ... U'; A'', B'', C'' ... U''; etc. A'''..., B'''..., C'''... ... U'''... anzugeben weiß. Setzt man aber

 M

$$\frac{M}{(a-\alpha z)^n.\mathfrak{P}} = \frac{A}{(a-\alpha z)^n} + \frac{B}{(a-\alpha z)^{n-1}} + \frac{C}{(a-\alpha z)^{n-2}} + \ldots + \frac{U}{a-\alpha z} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}},$$

wo $\mathfrak{P} = (b-\beta z)^p.(c-\gamma z)^q.(d-\delta z)^r \times \ldots \times (1-\lambda z)^s$ ist, und ferner

$$\frac{M}{(b-\beta z)^p.\mathfrak{P}'} = \frac{A'}{(b-\beta z)^p} + \frac{B'}{(b-\beta z)^{p-1}} + \frac{C'}{(b-\beta z)^{p-2}} + \ldots + \frac{U'}{b-\beta z} + \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'},$$

wo $\mathfrak{P}' = (a-\alpha z)^n.(c-\gamma z)^q.(d-\delta z)^r \times \ldots \times (1-\lambda z)^s$ ist, hernach

$$\frac{M}{(c-\gamma z)^q\,\mathfrak{P}''} = \frac{A''}{(c-\gamma z)^q} + \frac{B''}{(c-\gamma z)^{q-1}} + \frac{C''}{(c-\gamma z)^{q-2}} + \ldots + \frac{U''}{c-\gamma z} + \frac{\mathfrak{Z}''}{\mathfrak{P}''},$$

worinnen $\mathfrak{P}''$ den Werth $= (a-\alpha z)^n.(b-\beta z)^p.(d-\delta z)^r \times \ldots \times (1-\lambda z)^s$ hat

u. s. w., und endlich

$$\frac{M}{(1-\lambda z)^s\,\mathfrak{P}'''\cdots} = \frac{A'''\cdots}{(1-\lambda z)^s} + \frac{B'''\cdots}{(1-\lambda z)^{s-1}} + \frac{C'''\cdots}{(1-\lambda z)^{s-2}} + \ldots + \frac{U'''\cdots}{1-\lambda z} + \frac{\mathfrak{Z}'''\cdots}{\mathfrak{P}'''\cdots},$$

worinnen $\mathfrak{P}'''\cdots = (a-\alpha z)^n.(b-\beta z)^p.(c-\gamma z)^q \times \ldots$ ist;

so kann man ja aus diesen Gleichungen alle vorhin erwähnten Zähler nach Nro. 1. 2. 3. 4. bestimmen. Man thue dieß also und setze die erhaltenen Werthe in die Gleichung (h), dann hat man alle Partialbrüche, in welche sich die vorgegebene Function ihrer Natur nach zerlegen läßt.

Wenn endlich

d) $\mathfrak{P} = (b-\beta z)^p.(c-\gamma z)^q \times \ldots \times (1-\lambda z)^s \times (r-\varrho z)$ oder $= (b-\beta z)^p.(c-\gamma z)^q \times \ldots \times (1-\lambda z)^s \times (r-\varrho z)(s-\sigma z) \times \ldots$ ist, so läßt sich die Zerlegung ebenfalls leicht vornehmen.

Man setze, die in dem hier angegebenen Factor $\mathfrak{P}$ stehende Größe $r-\varrho z$ oder $(r-\varrho z)(s-\sigma z) \times \ldots$ heiße V. Nach §. 96. Nro. 5. und 6. läßt sich gewiß, wenn der Nenner

$N = (a-\alpha z)^n.(b-\beta z)^p.(c-\gamma z)^q \times \ldots \times (1-\lambda z)^s \times V$ ist, die Function

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{(a-\alpha z)^n} + \frac{Z'}{(b-\beta z)^p} + \frac{Z''}{(c-\gamma z)^q} + \ldots + \frac{Z'''\cdots}{(1-\lambda z)^s} + \frac{\mathfrak{Z}''''\cdots}{V}$$

setzen. Drückt man nun einen jeden der hier stehenden Partialbrüche bis auf den Bruch $\frac{\mathfrak{Z}''''\cdots}{V}$ wiederum durch seine eigenen Partialbrüche aus, so erhält man eine Gleichung, welche sich von der Gleichung (h) in Nro. c. blos dadurch unterscheidet, daß N noch den

Factor

Factor V und daher die rechte Seite nach den Bruch $\frac{Z''''\cdots}{V}$ enthält. Daß sich nun die in derselben stehenden Zähler A, B, C ... U; A', B', C' ... U'; A'', B'', C'' ... U''; rc. A''''···, B''''···, C''''··· ... U''''··· eben so bestimmen lassen müssen, wie die in Nro. c., dieses erhellt aus Nro. II) 1 bis 6. Man muß hier nur die Werthe von P, P', P'' rc. gehörig nehmen, welche sich von denen in Nro. c. blos dadurch unterscheiden, daß sie noch den Factor V enthalten; hier ist z. E. $P' = (a - \alpha z)^n . (c - \gamma z)^q . (d - \delta z)^r \times \ldots \times (l - \lambda z)^s . V$. Man bestimme also alle die hier genannten Zähler, welche den Brüchen zugehören, deren Nenner Potenzen sind, auf die in Nro. c. gezeigte Art, und setze die dafür erhaltenen Werthe in die vorhin erwähnte Gleichung. Dadurch erhält man dann eine Gleichung für den dem Nenner V zugehörigen Zähler Z''''···, woraus Z''''··· auf folgende Art gefunden wird:

Man bringe alle die Brüche auf der rechten Seite der Gleichung, deren Nenner Potenzen sind, unter einerley Benennung, dann wird ihr gemeinschaftlicher Nenner $= (a - \alpha z)^n \times (b - \beta z)^p . (c - \gamma z)^q \times \ldots \times (l - \lambda z)^s$ und die Gleichung verwandelt sich, wenn man die Summe der Zähler der Brüche, die man unter einerley Nenner gebracht hat, S nennt, in die Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{S}{(a - \alpha z)^n . (b - \beta z)^p . (c - \gamma z)^q \times \ldots \times (l - \lambda z)^s} + \frac{Z''''\cdots}{V}$$

oder, wenn der zu S gehörige Nenner kurz P genannt wird, in diese Gleichung:

$$\frac{M}{N} = \frac{S}{P} + \frac{Z''''\cdots}{V}.$$

Daraus folgt aber, weil $N = P . V$ ist, die Gleichung

$$M = S . V + P . Z''''\cdots$$

und also $$\frac{M - S . V}{P} = Z''''\cdots$$

Ist nun Z''''··· gefunden, so kann man den Bruch $\frac{Z''''\cdots}{V}$, wenn er, weil V nicht blos $= r - \varrho z$, sondern $= (r - \varrho z)(s - \sigma z)(t - \tau z) \times \ldots$ ist, noch einer Zerlegung bedarf, diese Zerlegung leicht nach §. 92. vornehmen. Wollte man z. E. zu dem Factor $r - \varrho z$ des Nenners $V = (r - \varrho z)(s - \sigma z)(t - \tau z) \times \ldots$ den Zähler, der hier mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden soll, finden; so müßte man

$\frac{Z''''\cdots}{(s - \sigma z)(t - \tau z) \times \ldots}$ für $z = \frac{r}{\varrho}$ berechnen (§. 92.)

Man

Man kann sich aber auch hier die in manchen Fällen sehr mühsame Bestimmung des Zählers $Z''''\ldots$ ersparen, und doch die Zähler $a, b, c \ldots$ der Partialbrüche, welche aus dem Bruche $\frac{Z''''\ldots}{V}$ fließen, bestimmen. Es ist nehmlich

$$a = \frac{Z''''\ldots}{(s - \sigma z)(t - \tau z) \times \ldots},$$

für $z = \frac{r}{\varrho}$. Hierein setze man den vorhin angegebenen Werth von $Z''''\ldots$; dann ist

$$a = \frac{M - SV}{P} : (s - \sigma z)(t - \tau z) \times \ldots,$$

für $z = \frac{r}{\varrho}$. Nun ist aber $S.V = S.(r - \varrho z)(s - \sigma z)(t - \tau z) \times \ldots$ und diese Größe wird für $z = \frac{r}{\varrho}$ gewiß $= 0$. Also ist für $z = \frac{r}{\varrho}$,

$$a = \frac{M}{P.(s - \sigma z)(t - \tau z) \times \ldots}.$$

Man kann also statt $Z''''\ldots$ den Werth $\frac{M}{P}$ nehmen. Was von der Bestimmung des Zählers a gesagt worden ist, das gilt auch von der Bestimmung der Zähler b, c rc. Es ist demnach der dem Nenner $s - \sigma z$ zugehörige Zähler $b = \frac{M}{P(r - \varrho z)(t - \tau z) \times \ldots}$, für $z = \frac{s}{\sigma}$; ferner ist der Zähler, welcher dem Nenner $t - \tau z$ zugehört, oder

$$c = \frac{M}{P(r - \varrho z)(s - \sigma z) \times \ldots}, \text{ für } z = \frac{t}{\tau},$$

u. s. w.

§. 99.

I) "Man soll die gebrochene Function $\frac{M}{N} = \frac{z - 1}{(2 + z)^3}$ in die ihr zugehörigen Partialbrüche zerlegen."

Man setze nach §. 98. Nro. I)

$$\frac{z^2 - 1}{(2 + z)^3} = \frac{A}{(2 + z)^3} + \frac{B}{(2 + z)^2} + \frac{C}{2 + z}$$

und

und suche nach der daselbst gegebenen Regel die Zähler A, B, C. Es ist aber hier $M = z^2 - 1$, $a - \alpha z = 2 + z$, $a = 2$, $-\alpha = 1$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{2}{-1} = -2$; es muß demnach seyn:

$$A = M = z^2 - 1 = 3, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = -2,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A}{a - \alpha z} = \frac{z^2 - 1 - 3}{2 + z} = z - 2;$$

$$B = \mathfrak{A} = z - 2 = -4, \text{ für } z = -2,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B}{a - \alpha z} = \frac{z - 2 + 4}{2 + z} = 1; \; C = \mathfrak{B} = 1.$$

Demnach ist $\frac{z^2 - 1}{(2+z)^3} = \frac{3}{(2+z)^3} + \frac{-4}{(2+z)^2} + \frac{1}{2+z}$

II) "Es soll die gebrochene Function $\frac{M}{N} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$ in ihre Partialbrüche zerlegt "werden."

Man setze hier wiederum nach §. 98. Nro. I) die Function

$$\frac{1+z}{(1-z)^3} = \frac{A}{(1-z)^3} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-z}$$

und bestimme auf dieselbe Art, wie vorhin die Zähler A, B, C, .

Es ist hier $M = 1 + z$, $a - \alpha z = 1 - z$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$ und also

$$A = M = 1 + z = 2, \text{ für } z = 1,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A}{a - \alpha z} = \frac{1 + z - 2}{1 - z} = -1;$$

$$B = \mathfrak{A} = -1,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B}{a - \alpha z} = \frac{-1 + 1}{1 - z} = 0;$$

$$C = \mathfrak{B} = 0$$

Folglich ist nun $\frac{1+z}{(1-z)^3} = \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^2}$

III) "Man

III) "Man soll die Partialbrüche der gebrochenen Function $\frac{M}{N} = \frac{1 + 3z - z^2}{(1+z)^2 . (3-z)}$
"angeben."

Man setze $\frac{1 + 3z - z^2}{(1+z)^2 . (3-z)} = \frac{A}{(1+z)^2} + \frac{B}{1+z} + \frac{\mathfrak{Z}}{3-z}$ und bestimme hier die Zähler A, B, $\mathfrak{Z}$ nach §. 98. Nro. II). Es ist hier $M = 1 + 3z - z^2$, $\mathfrak{P} = 3 - z$, $a - \alpha z = 1 + z$, $a = 1$, $-\alpha = 1$, $\frac{a}{\alpha} = -1$. Daher muß nun seyn:

$$A = \frac{M}{\mathfrak{P}} = \frac{1 + 3z - z^2}{3 - z} = -\frac{3}{4}, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = -1,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{1 + 3z - z^2 + \frac{3}{4}(3 - z)}{1 + z} = \frac{13}{4} - z,$$

$$B = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} = \frac{\frac{13}{4} - z}{3 - z} = \frac{17}{16}, \text{ für } z = -1,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{\frac{13}{4} - z - \frac{17}{16}(3 - z)}{1 + z} = \frac{1}{16} = \mathfrak{Z}.$$

Es ist also $\frac{1 + 3z - z^2}{3 - z} = \frac{-\frac{3}{4}}{(1+z)^2} + \frac{\frac{17}{16}}{1+z} + \frac{\frac{1}{16}}{3-z}$

IV) "Man soll die gebrochene Function $\frac{M}{N} = \frac{z^5}{(1-z)^2 . (2+z)(1+z)}$ in ihre Partialbrüche auflösen."

Man setze hier

$$\frac{z^5}{(1-z)^2 . (2+z)(1+z)} = \frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z} + \frac{A'}{2+z} + \frac{B'}{1+z}$$

und bestimme die Zähler A, B, A′, B′ nach §. 98. Nro. II. 7. b. Hier ist nun $M = z^5$, $\mathfrak{P} = (2+z)(1+z) = 2 + 3z + z^2$, $a - \alpha z = 1 - z$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$. Man erhält demnach:

$$A = \frac{M}{\mathfrak{P}} = \frac{z^5}{2 + 3z + z^2} = \frac{1}{6}, \text{ für } z = 1,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{z^5 - \frac{1}{6}(2 + 3z + z^2)}{1 - z} = -\frac{1}{3} - \frac{5}{6}z - z^2;$$

B =

$$B = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} = \frac{-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}z-z^2}{2+3z+z^2} = -\frac{13}{36}, \text{ für } z = 1.$$

Ferner sind die zu der Bestimmung der Zähler A′ und B′ gehörigen Größen folgende:

$\frac{M}{(a-\alpha z)^n} = \frac{z^5}{(1-z)^2}$, $r - \varrho z = 2 + z$, $r = 2$, $-\varrho = 1$, $\frac{r}{\varrho} = \frac{2}{-1} = -2$,
$s - \sigma z = 1 + z$, $s = 1$, $-\sigma = 1$, $\frac{s}{\sigma} = \frac{1}{-1} = -1$.

Dafür erhält man:

$$A' = \frac{M}{(a-\alpha z)^n.(s-\sigma z)} = \frac{z^5}{(1-z)^2.(1+z)} = \frac{8}{9}, \text{ für } z = \frac{r}{\varrho} = -2;$$

$$B' = \frac{M}{(a-\alpha z)^n.(r-\varrho z)} = \frac{z^5}{(1-z)^2.(2+z)} = -\frac{1}{4}, \text{ für } z = \frac{s}{\sigma} = -1.$$

Es ist also die Function

$$\frac{z^5}{(1-z)^2.(2+z)\,(1+z)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}}{(1-z)^2} - \frac{\frac{13}{36}}{1-z} + \frac{\frac{8}{9}}{2+z} - \frac{\frac{1}{4}}{1+z}$$

V) "Es sollen die Partialbrüche der nachstehenden Function angegeben werden."

$$\frac{M}{N} = \frac{1+z^5}{z^3.(1-z)^2.(1+z)^2}$$

Man setze nach §. 98. Nro. II) 7, c. die Function

$$\frac{1+z^5}{z^3.(1-z)^2.(1+z)^2} = \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{A'}{(1-z)^2} + \frac{B'}{1-z}$$
$$+ \frac{A''}{(1+z)^2} + \frac{B''}{1+z}$$

und bestimme nach den daselbst gegebenen Regeln die Zähler.

Für die Bestimmung der Zähler A, B, C ist hier

$$a - \alpha z = z, \quad a = 0, \quad -\alpha = 1, \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$\mathfrak{P}$ aber ist $= (1-z)^2.(1+z)^2 = (1-2z+z^2).(1+2z+z^2)$
$= 1 - 2z^2 + z^4$. Es muß also seyn:

$$A = \frac{M}{\mathfrak{P}} = \frac{1 + z^3}{1 - 2z^2 + z^4} = \frac{1}{1} = 1, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{1 + z^3 - (1 - 2z^2 + z^4)}{z} = 2z + z^2 - z^3;$$

$$B = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} = \frac{2z + z^2 - z^3}{1 - 2z^2 + z^4} = \frac{0}{1} = 0, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{2z + z^2 - z^3 - 0.(1 - 2z^2 + z^4)}{z} = 2 + z - z^2$$

$$C = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}} = \frac{2 + z - z^2}{1 - 2z^2 + z^4} = \frac{2}{1} = 2, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0.$$

Für die Bestimmung der Zähler A', B' ferner ist

$b - \beta z = 1 - z$ und also $b = 1$, $\beta = 1$, $\frac{b}{\beta} = \frac{1}{1} = 1$;

die Größe $\mathfrak{P}'$ aber ist hier $= z^3.(1 + z)^2 = z^3.(1 + 2z + z^2)$
$= z^3 + 2z^4 + z^5$. Man erhält demnach:

$$A' = \frac{M}{\mathfrak{P}'} = \frac{1 + z^3}{z^3 + 2z^4 + z^5} = \frac{1}{2}, \text{ für } z = \frac{b}{\beta} = 1,$$

$$\mathfrak{A}' = \frac{M - A'\mathfrak{P}'}{b - \beta z} = \frac{1 + z^3 - \frac{1}{2}(z^3 + 2z^4 + z^5)}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \frac{3}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^4;$$

$$B' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{P}'} = \frac{1 + z + z^2 + \frac{3}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^4}{z^3 + 2z^4 + z^5} = \frac{5}{4}, \text{ für } z = \frac{b}{\beta} = 1.$$

Für die Bestimmung der Z[illegible] A'', B'' endlich ist

$c - \gamma z = 1 + z$ und also c [illegible] $= 1$, $\frac{c}{\gamma} = \frac{1}{-1} = -1$;

die Größe $\mathfrak{P}''$ aber muß hier $= z^3.(1 -$ [illegible] $(1 - 2z + z^2)$
$= z^3 - 2z^4 + z^5$ seyn. Es ist also

$$A'' = \frac{M}{\mathfrak{P}''} = \frac{1 + z^3}{z^3 - 2z^4 + z^5} = \frac{0}{-4} = 0, \text{ für } z = \frac{c}{\gamma} = -1,$$

$$\mathfrak{A}'' = \frac{M - A''.\mathfrak{P}''}{c - \gamma z} = \frac{1 + z^3 - 0.(z^3 - 2z^4 + z^5)}{1 + z} = 1 - z + z^2;$$

$$B'' = \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{P}''} = \frac{1 - z + z^2}{z^3 - 2z^4 + z^5} = -\frac{3}{4}, \text{ für } z = \frac{c}{\gamma} = -1.$$

Wenn

Wenn man nun die für die Zähler A, B, C, A', B', A'', B'' gefundenen Werthe in die für die vorgegebene Function vorher aufgestellten Partialbrüche setzt; so erhält man:

$$\frac{1+z^5}{z^3.(1-z)^2.(1+z)^2} = \frac{1}{z^3} + \frac{0}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{5}{4}}{1-z} + \frac{0}{(1+z)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{1+z}$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{5}{4}}{1-z} - \frac{\frac{3}{4}}{1+z}.$$

VI) "Es sollen die Partialbrüche der gebrochenen Function $\frac{M}{N} = \frac{1}{z^3.(1-z)^2.(1+z)}$ "bestimmt werden."

Man setze nach §. 98. Nro. II) 7, d. die Function

$$\frac{1}{z^3.(1-z)^2.(1+z)} = \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{A'}{(1-z)^2} + \frac{B'}{1-z} + \frac{a}{1+z},$$

und bestimme nun die Zähler nach den daselbst gegebenen Regeln.

Für die Bestimmung der Zähler A, B, C ist hier

$M = 1$, $a - \alpha z = z$, $a = 0$, $-\alpha = 1$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{0}{-1} = 0$,

$\mathfrak{P} = (1-z)^2.(1+z)$. Es ist demnach:

$$A = \frac{M}{\mathfrak{P}} = \frac{1}{(1-z)^2.(1+z)} = 1, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{1-(1-z)^2.(1+z)}{z} = 1 + z - z^2;$$

$$B = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} = \frac{1+z-z^2}{(1-z)^2.(1+z)} = 1, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{1+z-z^2-(1-z)^2.(1+z)}{z} = 2 - z^2;$$

$$C = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}} = \frac{2-z^2}{(1-z)^2.(1+z)} = 2, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0.$$

Für die Bestimmung der Zähler A', B' aber hat man:

$b - \beta z = 1 - z$, $b = 1$, $\beta = 1$, $\frac{b}{\beta} = \frac{1}{1} = 1$,

$\mathfrak{P}' = z^3(1+z) = z^3 + z^4$. Es muß daher seyn:

 A' =

$$A' = \frac{M}{\mathfrak{P}'} = \frac{1}{z^3 + z^4} = \frac{1}{2}, \text{ für } z = \frac{b}{\beta} = 1,$$

$$\mathfrak{A}' = \frac{M - A'\mathfrak{P}'}{b - \beta z} = \frac{1 - \frac{1}{2}.(z^3 + z^4)}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \frac{1}{2} z^3;$$

$$B' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{P}'} = \frac{1 + z + z^2 + \frac{1}{2} z^3}{z^3 + z^4} = \frac{7}{4}, \text{ für } z = \frac{b}{\beta} = 1.$$

Für die Bestimmung des Zählers a ist hier $r - \varrho z = 1 + z$, $r = 1$

$$-\varrho = 1, \; \frac{r}{\varrho} = \frac{1}{-1} = -1, \; \mathfrak{P}'' = z^3.(1 - z)^2.$$

Man erhält also:

$$a = \frac{M}{\mathfrak{P}''} = \frac{1}{z^3.(1 - z)^2} = -\frac{1}{4}, \text{ für } z = \frac{r}{\varrho} = -1.$$

Demnach ist nun die vorgegebene Function

$$\frac{1}{z^3.(1 - z)^2.(1 + z)} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{(1 - z)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{1 - z} - \frac{\frac{1}{4}}{1 + z}.$$

§. 100.

Obgleich die bisher gegebenen Vorschriften blos auf **ächte** gebrochene Functionen eingeschränkt worden sind, so können doch auch von nun an alle **unächten** gebrochenen Functionen in die ihnen zugehörigen Partialbrüche aufgelöst werden. Es läßt sich nehmlich nach §. 81. eine jede **unächte** gebrochene Function in eine **ganze** und in eine **ächte gebrochene** Function zerlegen. Hat man also eine solche Function in Partialbrüche aufzulösen, so darf man nur erst die in ihr enthaltene ganze Function von ihr absondern, und dann die Bestimmung der Partialbrüche der dabey erhaltenen ächten gebrochenen Function vornehmen. Inzwischen wird man auch allemal die bisher gegebenen Vorschriften unmittelbar auf die unächte gebrochene Function selbst anwenden dürfen, und man wird hierbey dieselben Partialbrüche erhalten, die man erhält, wenn man vorher die ganze Function von der unächten gebrochenen Function trennt und dann erst zu der dabey erhaltenen ächten gebrochenen Function die Partialbrüche aufsucht. Daß dieses so seyn muß, dieß kann man leicht einsehen, wenn man die bisher aufgestellten Lehren für die Voraussetzung betrachtet, daß $\frac{M}{N}$ eine **unächte** gebrochene Function sey, daher hier der Beweis für die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung füglich übergangen werden kann.

§. 101.

§. 101.

Die Auflösung der zusammengesetzteren gebrochenen Functionen in einfachere Theilfunction kann in den Fällen, in welchen man sich derselben bey analytischen Untersuchungen gewöhnlich zu bedienen pflegt, nur alsdann den gehörigen Nutzen gewähren, wenn die Theilfunctionen, die man sucht, reelle Größen werden. Da nun bey gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$, deren Nenner N imaginäre Factoren enthalten, die Partialbrüche, welche aus diesen Factoren entspringen, nothwendig imaginäre Größen werden müssen; so entsteht die Frage, wie man sich zu verhalten hat, im Falle es nöthig ist, dergleichen Functionen in Partialbrüche zu zerlegen, welche reelle Größen sind. Es lassen sich, wie Euler gelehrt hat, bey solchen Functionen statt der aus den imaginären einfachen Factoren von N entspringenden imaginären Partialbrüche, allemal reelle angeben, welche die dreytheiligen Factoren von N zu ihren Nenner haben. Man kann also bey der Zerlegung der gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$, deren Nenner N imaginäre einfache Factoren enthalten, jedesmal die daher rührenden imaginären Partialbrüche vermeiden und statt derselben reelle angeben, wenn man die Zähler der Partialbrüche, welche aus den dreytheiligen Factoren von N entspringen, zu finden weis. Wie dieses nach der verschiedenen Beschaffenheit der Nenner N geschehen könne, dieß soll jetzt gelehrt werden.

§. 102.

"In der nachstehenden ächten gebrochenen Function

$$\frac{M}{N} = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Tz^{n-1} + Uz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \ldots + \mathfrak{T}z^{n-1} + \mathfrak{U}z^n}$$

"enthalte der Nenner N lauter imaginäre einfache Factoren, und zwar so, daß alle die "daraus entspringenden dreytheiligen Factoren von einander verschieden sind, und daß "also von einem jeden dreytheiligen Factor von N keine höhere, als die erste Potenz in N "vorkommt. Es soll gezeigt werden, daß sich eine solche Function in so viele reelle "Partialbrüche auflösen läßt, welche die dreytheiligen Factoren von N zu ihren Nennern "haben, als N dreytheilige Factoren enthält, und wie sich ferner die Zähler dieser Partial"brüche bestimmen lassen."

1) Es sey $p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2z^2$ einer der dreytheiligen Factoren von N, und die Größen p, q und φ seyen bekannt. Das Product aus den übrigen Factoren von N, welches, wenn es nicht bekannt wäre, durch die Division des Factors $p^2 - 2pqz$

$\varkappa$ Cos $\varphi + q^2 z^2$ in den Nenner N erhalten werden könnte und, wie leicht einzusehen ist, $= \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots + \tau z^{n-3} + \omega z^{n-2}$ seyn müßte, heiße 𝔓.

Weil nun die einfachen Factoren von N alle **verschieden** groß seyn sollen, und darum auch die beyden Factoren $p^2 - 2pqz$ Cos $\varphi + q^2 z^2$ und 𝔓 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können; so giebt es nach §. 83. Nro. 7. gewiß für die hier vorgegebene Function $\frac{M}{N}$ zwey Partialbrüche, welche die Factoren $p^2 - 2pqz$ Cos $\varphi + q^2 z^2$ und 𝔓 zu ihren Nennern haben, und deren Zähler, die wir hier einstweilen durch Z und 𝔃 bezeichnen wollen, **reelle** und **bestimmbare** Größen sind. Es ist also gewiß für die hier vorgegebene Function $\frac{M}{N}$ die Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{p^2 - 2pqz \text{ Cos } \varphi + q^2 . z^2} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

möglich. Aus dem Bisherigen erhellet schon, daß sich für eine jede gebrochene Function $\frac{M}{N}$, welche die angegebenen Eigenschaften hat, wenigstens **ein** reeller Partialbruch angeben lassen muß, welcher einen dreytheiligen Factor von N zum Nenner hat. Aber es ist auch leicht einzusehen, daß die bisherigen Schlüsse ganz auf dieselbe Art auf den Bruch $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ angewendet werden können, weil auch die einfachen Factoren von 𝔓 alle **verschieden** groß sind, so bald N aus lauter **verschieden** großen einfachen Factoren besteht. Man kann also, wenn ferner einer der dreytheiligen Factoren von 𝔓, durch $p'^2 - 2p'q'z$ Cos $\varphi' + q'^2 . z^2$, das Product aus den übrigen Factoren aber durch 𝔓′ bezeichnet wird, wiederum

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{Z'}{p'^2 - 2p'q'z \text{ Cos } \varphi' + q'^2 . z^2} + \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'}$$

setzen und Z′ und 𝔃′ nach §. 83. bestimmen. Alsdann erhält man

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{p^2 - 2pqz \text{ Cos } \varphi + q^2 z^2} + \frac{Z'}{p'^2 - 2p'q'z \text{ Cos } \varphi' + q'^2 z^2} + \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'}$$

und mithin für $\frac{M}{N}$ **zwey** reelle Partialbrüche, welche dreytheilige Factoren von N zu ihren Nennern haben. So kann man nun weiter fortfahren und jedesmal den letzten Bruch, hier z. E. $\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'}$, nach §. 83. in zwey reelle Partialbrüche auflösen, von denen jedesmal der eine ein Bruch ist, welcher einen dreytheiligen Factor von N zum Nenner hat, bis man

endlich

endlich auf einen Bruch kommt, dessen Nenner ein Product aus zwey dreytheiligen Factoren von N ist, und der sich, weil N lauter **verschieden** große dreytheilige Factoren enthalten soll, gewiß auch noch in zwey reelle Partialbrüche zerlegen läßt, deren Nenner dreytheilige Factoren von N sind.

Hiermit ist es nun erwiesen, daß sich eine jede ächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$ von der angegebenen Beschaffenheit in lauter reelle Partialbrüche auflösen lassen muß, welche die dreytheiligen Factoren von N zu ihren Nennern haben, und zugleich ist auch das Verfahren angegeben, nach welchem sich die Zähler dieser Partialbrüche bestimmen lassen, denn es ist eben das, welches in §. 83. gezeigt worden ist. Es kann aber, wie **Euler** lehrt, ein jeder Zähler der hier erwähnten Brüche noch auf eine andere und für die Ausübung öfters bequemere Art bestimmt werden, welches wir jetzt zeigen wollen.

2) Aus der in Nro. 1. angegebenen Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{p^2 - 2\,p\,q\,z\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

ergiebt sich, wenn wir beyde Brüche in der rechten Seite derselben unter den gemeinschaftlichen Nenner $(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2).\,\mathfrak{P} = N$ bringen, die Gleichung

$$M = Z\,\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}\,(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2),$$

aus welcher ferner folgende fließt:

$$\frac{M - Z\,\mathfrak{P}}{p^2 - 2\,p\,q\,z\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2} = \mathfrak{Z}.$$

Diese Gleichung muß Statt haben, denn sie ist aus einer Gleichung, deren nothwendige Gültigkeit erwiesen ist, richtig gefolgert worden; daher müssen auch alle Bedingungen ihrer Möglichkeit zugegeben werden. Nun ist eine solche Bedingung die, daß $M - Z\mathfrak{P}$ durch $p^2 - 2\,p\,q\,z\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2$ theilbar sey, denn $\mathfrak{Z}$ bedeutet ja eine **ganze** Function. Also muß man annehmen, es sey $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2$ ein Factor von $M - Z\,\mathfrak{P}$. Da aber $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2$ für

$$z = \frac{p}{q}.(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi.\sqrt{-1})$$

den Werth $= 0$ erhalten muß, so muß auch für eben diese Werthe von z die Größe $M - Z\,\mathfrak{P} = 0$ werden. Hier haben wir nun eine Gleichung, aus welcher sich Z finden läßt.

3) Wir können nehmlich in der vorigen Gleichung $Z = a + bz$ setzen, denn dieser Form ist der Zähler Z gewiß unterworfen, er mag eine constante Größe, oder eine **ganze** Fun-

Function von z seyn. Ist nehmlich Z eine ganze Function von z, so kann dieselbe, da sie der Zähler eines **ächten** Bruches seyn soll, dessen Nenner nur eine ganze Function vom **zweyten** Grade ist, nur eine ganze Function vom **ersten** Grade seyn, und es muß sich also Z durch $a + bz$, als der allgemeinen Form aller ganzen Functionen vom ersten Grade, darstellen lassen: ist aber Z eine constante Größe, so kann auch für diesen Fall $Z = a + bz$ gesetzt werden, denn für $b = o$ ist $a + bz = a$.

Setzen wir nun wirklich in der Gleichung $M - Z\mathfrak{P} = o$ für Z den Ausdruck $a + bz$, drücken aber auch M und P entwickelt aus; so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Uz^n - (a + bz)(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \omega^{n-2}) = o,$$

welche aber, wie wir wissen, nur für die Werthe $z = \frac{p}{q}.(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi.\sqrt{-1})$ gültig ist. Setzen wir ferner auch diese Werthe von z in die Gleichung, bezeichnen aber hierbey um der Kürze willen $\frac{p}{q}$ durch r; so wird aus ihr diese:

$$\left.\begin{aligned} &A + Br(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}) + Cr^2.(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})^2 + Dr^3(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})^3 + \ldots] \\ &- a[\alpha + \beta r(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}) + \gamma r^2.(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})^2 + \delta r^3.(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})^3 + \ldots] \\ &- b[\alpha r(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}) + \beta r^2.(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})^2 + \gamma r^3.(\mathrm{Cos}\varphi \pm \mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})^3 + \ldots] \end{aligned}\right\} = o$$

4) Die vorige Gleichung enthält wegen der verschiedenen Zeichen (+) und (−) zwey Gleichungen, und aus diesen kann man die beyden unbekannten Größen a und b finden, welche bestimmt werden müssen, wenn man Z wissen will. Wir wollen sie jetzt suchen. Bekanntlich ist für $n = 1, = 2, = 3$ u. s. w.

$$(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi.\sqrt{-1})^n = \mathrm{Cos}\,n\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,n\,\varphi.\sqrt{-1}.\ (\S.\ 70.\ \text{Nro. } 3.).$$

Wenden wir nun diesen Satz auf die vorige Gleichung an, und schaffen die beyden auf der linken Seite derselben stehenden subtractiven Glieder auf die rechte Seite; so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &A + Br.\mathrm{Cos}\,\varphi + Cr^2.\mathrm{Cos}\,2\,\varphi + Dr^3.\mathrm{Cos}\,3\,\varphi + \ldots \\ &\pm [Br.\mathrm{Sin}\,\varphi + Cr^2.\mathrm{Sin}\,2\,\varphi + Dr^3.\mathrm{Sin}\,3\,\varphi + \ldots].\sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$= \left\{\begin{aligned} &a[\alpha + \beta r.\mathrm{Cos}\,\varphi + \gamma r^2.\mathrm{Cos}\,2\,\varphi + \delta r^3.\mathrm{Cos}\,3\,\varphi + \ldots] \\ &\pm a[\beta r.\mathrm{Sin}\,\varphi + \gamma r^2.\mathrm{Sin}\,2\,\varphi + \delta r^3.\mathrm{Sin}\,3\,\varphi + \ldots].\sqrt{-1} \\ &+ b[\alpha r.\mathrm{Cos}\,\varphi + \beta r^2.\mathrm{Cos}\,2\,\varphi + \gamma r^3.\mathrm{Cos}\,3\,\varphi + \ldots] \\ &\pm b[\alpha r.\mathrm{Sin}\,\varphi + \beta r^2.\mathrm{Sin}\,2\,\varphi + \gamma r^3.\mathrm{Sin}\,3\,\varphi + \ldots].\sqrt{-1}, \end{aligned}\right.$$

welche, wenn wir zum leichteren Gebrauche derselben

A +

$$A + Br.\mathrm{Cos}\,\varphi + Cr^2.\mathrm{Cos}\,2\varphi + Dr^3.\mathrm{Cos}\,3\varphi + \ldots = \mathfrak{F},$$
$$Br.\mathrm{Sin}\,\varphi + Cr^2.\mathrm{Sin}\,2\varphi + Dr^3.\mathrm{Sin}\,3\varphi + \ldots = \mathfrak{f},$$

$$\alpha + \beta r.\mathrm{Cos}\,\varphi + \gamma r^2.\mathrm{Cos}\,2\varphi + \delta r^3.\mathrm{Cos}\,3\varphi + \ldots = \mathfrak{G},$$
$$\beta r.\mathrm{Sin}\,\varphi + \gamma r^2.\mathrm{Sin}\,2\varphi + \delta r^3.\mathrm{Sin}\,3\varphi + \ldots = \mathfrak{g},$$
$$\alpha r.\mathrm{Cos}\,\varphi + \beta r^2.\mathrm{Cos}\,2\varphi + \gamma r^3.\mathrm{Cos}\,3\varphi + \ldots = \mathfrak{H},$$
$$\alpha r.\mathrm{Sin}\,\varphi + \beta r^2.\mathrm{Sin}\,2\varphi + \gamma r^3.\mathrm{Sin}\,3\varphi + \ldots = \mathfrak{h}$$

setzen, einfacher so aussieht:

$$\mathfrak{F} \pm \mathfrak{f}.\sqrt{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{G} \pm \mathfrak{a}\mathfrak{g}.\sqrt{-1} + \mathfrak{b}\mathfrak{H} \pm \mathfrak{b}\mathfrak{h}.\sqrt{-1}.$$

Diese enthält aber die beyden Gleichungen:

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{f}.\sqrt{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{G} + \mathfrak{a}\mathfrak{g}.\sqrt{-1} + \mathfrak{b}\mathfrak{H} + \mathfrak{b}\mathfrak{h}.\sqrt{-1},$$
$$\mathfrak{F} - \mathfrak{f}.\sqrt{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{G} - \mathfrak{a}\mathfrak{g}.\sqrt{-1} + \mathfrak{b}\mathfrak{H} - \mathfrak{b}\mathfrak{h}.\sqrt{-1},$$

aus welchen sich, wenn man beyde addirt und alsdann mit 2 dividirt, die Gleichung

$$\text{I)}\quad \mathfrak{F} = \mathfrak{a}\mathfrak{G} + \mathfrak{b}\mathfrak{H}$$

und, wenn man die zweyte von der ersten subtrahirt und hernach mit $2\sqrt{-1}$ dividirt, die Gleichung

$$\text{II)}\quad \mathfrak{f} = \mathfrak{a}\mathfrak{g} + \mathfrak{b}\mathfrak{h}$$

ergiebt. Aus den beyden Gleichungen I) und II) nun erhält man durch die Auflösung derselben:

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{h} - \mathfrak{f}\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}\mathfrak{h} - \mathfrak{g}\mathfrak{H}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f}}{\mathfrak{H}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{h}}.$$

5) Das Verfahren also, nach welchem die beyden Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt werden können, ist folgendes:

a) Man nehme den Zähler M der zu zerlegenden Function $\frac{M}{N}$, und setze in demselben $z = r.\mathrm{Cos}\,\varphi$, $z^2 = r^2.\mathrm{Cos}\,2\varphi$, $z^3 = r^3.\mathrm{Cos}\,3\varphi$ ꝛc. kurz, man setze $z^n = r^n.\mathrm{Cos}\,n\varphi$; hierdurch erhält man die Größe $\mathfrak{F}$.

b) Hierauf nehme man eben diesen Zähler M, lasse in ihm das absolute Glied A weg, wenn ein solches vorhanden ist, in den übrigen Gliedern aber setze man $z = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, $z^2 = r^2.\mathrm{Sin}\,2\varphi$, $z^3 = r^3.\mathrm{Sin}\,3\varphi$ ꝛc. oder allgemein $z^n = r^n.\mathrm{Sin}\,n\varphi$, wodurch man die Größe $\mathfrak{f}$ erhält.

c) Ferner nehme man den Factor $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \omega z^{n-2}$ des Nenners N der Function $\frac{M}{N}$, und setze in demselben $z = r \,\mathrm{Cos}\,\varphi$, $z^2 = r^2 \times \mathrm{Cos}\, 2\varphi$, $z^3 = r^3 \,\mathrm{Cos}\, 3\varphi$ rc., woraus sich die Größe G ergiebt.

d) Von eben diesem Factor lasse man das absolute Glied α weg, wenn ein solches vorhanden ist, und setze $z = r . \mathrm{Sin}\,\varphi$, $z^2 = r^2 . \mathrm{Sin}\, 2\varphi$, $z^3 = r^3 . \mathrm{Sin}\, 3\varphi$ rc.; hierdurch erhält man die Größe g.

e) Aus dem in Nro. c. genannten Factor bestimme man endlich auch nach den in Nro. 4. angegebenen Formeln die Größen H und h.

f) Hat man auf diese Art die Größen F, G, H, f, g, h gehörig bestimmt; so setze man sie in die beyden für a und b vorhin angegebenen Gleichungen.

6) Aus den so bestimmten Größen a und b ergiebt sich der Zähler $Z = a + bz$ des Partialbruchs

$$\frac{Z}{p^2 - 2 p q z . \mathrm{Cos}\,\varphi + q^2 . z^2}.$$

Wenn nun der Werth des dem dreytheiligen Factor $p^2 - 2 p q z . \mathrm{Cos}\,\varphi + q^2 . z^2$ entsprechenden Zählers Z gefunden ist, so nehme man denselben und setze ihn in die in Nro. 2. angegebene Gleichung

$$\mathfrak{Z} = \frac{M - Z \mathfrak{P}}{p^2 - 2 p . q z \,\mathrm{Cos}\, z + q^2 . z^2}$$

an die Stelle von Z, wodurch man den Werth von $\mathfrak{Z}$ erhält. Aus dem Zähler $\mathfrak{Z}$ und dem Factor $\mathfrak{P}$ ergiebt sich alsdann der Bruch $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$, welcher der zweyte Partialbruch von $\frac{M}{N}$ ist.

7) Man nehme nun den Nenner $\mathfrak{P}$ dieses Bruches, wenn er nicht selbst schon ein dreytheiliger Factor ist, und suche von ihm einen dreytheiligen Factor $p'^2 - 2 p' q' z \times \mathrm{Cos}\, z + q'^2 z^2$, welcher auch ein zweyter dreytheiliger Factor von N ist, alsdann aber bestimme man auch das Product aus den übrigen Factoren von $\mathfrak{P}$, welches hier $\mathfrak{P}'$ heissen soll. Hierauf setze man

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}} = \frac{Z'}{p'^2 - 2 p' q' z . \mathrm{Cos}\,\varphi + q'^2 . z^2} + \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'},$$

und suche auf dieselbe Art den Zähler Z', nach welcher Z gesucht worden ist. So gelangt man zu einem zweyten reellen Partialbruche der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$. Ist Z' gefunden, so setze man dessen Werth in die Gleichung

$\mathfrak{Z}' =$

$$\mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{Z} - Z'\mathfrak{P}'}{p'^2 - 2\,p\,q\,z\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q'^2.z^2},$$

welche nach der Gleichung gebildet ist, aus welcher in Nro. 6) $\mathfrak{Z}$ bestimmt wurde; dadurch ergiebt sich dann auch der Werth von $\mathfrak{Z}'$, und folglich der Bruch $\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'}$.

8) Mit dem Bruche $\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'}$ kann man abermals so verfahren, wie man vorhin mit $\frac{M}{N}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ verfuhr, wenn nicht schon $\mathfrak{P}'$ ein dreytheiliger Factor von N ist, und so kann man, wie sich leicht einsehen läßt, überhaupt so lange fortfahren, bis man zuletzt auf einen Bruch $\frac{\mathfrak{Z}'''\cdots}{\mathfrak{P}'''\cdots}$ kommt, dessen Nenner ein dreytheiliger Factor von N ist, und folglich alle reellen Partialbrüche für $\frac{M}{N}$ gefunden hat, welche die dreytheiligen Factoren von N zu ihren Nennern haben.

§. 103.

Es soll hier das **Eulersche** im vorigen §. gelehrte Verfahren, nach welchem man eine gebrochene Function $\frac{M}{N}$ in reelle Partialbrüche auflösen kann, deren Nenner dreytheilige Factoren von N sind, auf eine bestimmte Function angewendet werden.

"Es sey also

$$\frac{M}{N} = \frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)}$$

"die in solche Partialbrüche zu zerlegende Function."

1) Wir wollen hier zuerst den Zähler des Partialbruchs suchen, welcher den dreytheiligen Factor $1 - z + z^2$ zum Nenner haben soll.

Wird der eben genannte Factor mit dem allgemeinen im vorigen §. gebrauchten Factor $p^2 - 2\,p\,q\,z\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ verglichen, so findet man, daß hier $p^2 = 1$, $q^2 = 1$, $2\,p\,q.\mathrm{Cos}\,\varphi = 1$ ist. Daraus folgt: $p = 1$, $q = 1$, $\frac{p}{q} = 1$, $2\,p\,q.\mathrm{Cos}\,\varphi$ oder $1 = 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, $\frac{1}{2} = \mathrm{Cos}\,\varphi$, also $\varphi = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$.

Vergleicht man ferner den zweyten Factor von N, welcher hier $= (1 + z\sqrt{2} + z^2) \times (1 - z\sqrt{2} + z^2) = 1 + z^4$ ist, mit dem zweyten Factor von N im vorigen §., wel-



welcher $= \mathfrak{P} = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \omega z^{n-2}$ war; so erhält man $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0,\ \varepsilon = 1,\ \zeta = 0$ ꝛc.

Wird endlich der Zähler z^2 der hier vorgegebenen Function mit dem Zähler $M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Uz^n$ im vorigen §. verglichen, so findet man, daß hier $A = 0,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0$ ꝛc. ist.

Hieraus ergeben sich nun, wenn man nach §. 102. Nro. 5. die Größen $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ gehörig berechnet, folgende Werthe:

$$\mathfrak{F} = \text{Cos}\,\frac{2\pi}{3} = \text{Cos}\,120^\circ = \text{Cos}(90^\circ + 30^\circ) = -\text{Cos}(90^\circ - 30^\circ) = -\text{Sin}\,30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\mathfrak{f} = \text{Sin}\,\frac{2\pi}{3} = \text{Sin}\,120^\circ = \sqrt{[1 - (\text{Cos}\,120^\circ)^2]} = \sqrt{[1 - (-\tfrac{1}{2})^2]} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathfrak{G} = 1 + \text{Cos}\,\frac{4\pi}{3} = 1 + \text{Cos}(180^\circ + 60^\circ) = 1 + \text{Cos}(180^\circ - 60^\circ) = 1 + \text{Cos}\,120^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\mathfrak{g} = \text{Sin}\,\frac{4\pi}{3} = \text{Sin}(180^\circ + 60^\circ) = -\text{Sin}(180^\circ - 60^\circ) = -\text{Sin}\,120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathfrak{H} = \text{Cos}\,\frac{\pi}{3} + \text{Cos}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} + \text{Cos}(360^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} + \text{Cos}\,60^\circ = \frac{1}{2} + \text{Sin}\,30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

$$\mathfrak{h} = \text{Sin}\,\frac{\pi}{3} + \text{Sin}\,\frac{5\pi}{3} = \text{Sin}\,60^\circ + \text{Sin}(360^\circ - 60^\circ) = \text{Sin}\,60^\circ - \text{Sin}\,60^\circ = 0.$$

Für diese Werthe von $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ erhält man nach den in Nro. 4. des vorigen §. angegebenen Formeln für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ folgende Werthe dieser Größen:

$$\mathfrak{a} = \frac{-\frac{1}{2} \times 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 0 - \frac{-\sqrt{3}}{2} \times 1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -1;$$

$$\mathfrak{b} = \frac{-\frac{1}{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times 0} = \frac{0}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.$$

Also

Also ist der gesuchte Zähler Z oder $a + b z = -1 + 0.z = -1$, und mithin der Partialbruch $= \frac{-1}{1 - z + z^2}$.

Setzt man ferner die Werthe von M, Z, 𝔓, $p^2 - 2 p q z \operatorname{Cos} \varphi + q^2.z^2$, welche hier Statt finden, in die Gleichung

$$\mathfrak{Z} = \frac{M - Z \mathfrak{P}}{p^2 - 2 p q z \operatorname{Cos} \varphi + p^2.z^2}$$ (§. 102. Nro. 2.);

so erhält man $\mathfrak{Z} = \frac{z^2 - (-1) \times (1 + z^4)}{2 - z + z^2} = 1 + z + z^2$, und dieses ist der Zähler des zweyten Partialbruchs $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$, welcher der hier vorgegebenen gebrochenen Function zugehört. Man hat also jetzt:

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)} = \frac{-1}{1 - z + z^2}$$
$$+ \frac{1 + z + z^2}{(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)}.$$

2) Der Nenner des letzten in der vorigen Gleichung stehenden Partialbruchs ist noch ein Product aus zwey dreytheiligen Factoren, es kann daher auch dieser Partialbruch $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ noch fernerhin zerlegt werden. Der eine dreytheilige Factor des Nenners 𝔓 aber heißt $1 + z\sqrt{2} + z^2$, und zu diesem wollen wir jetzt den Zähler Z′ suchen, der zwente dreytheilige Factor von 𝔓, nehmlich $1 - z\sqrt{2} + z^2$ ist hier das, was im vorigen §. 𝔓′ hieß.

3) Vergleicht man nun den dreytheiligen Factor $1 + z\sqrt{2} + z^2$ mit dem allgemeinen im vorigen §. Nro. 7. gebrauchten dreytheiligen Factor $p'^2 - 2 p' q' z \operatorname{Cos} \varphi + q'^2.z^2$, so erhält man: $p'^2 = 1$, $q'^2 = 1$, $-2 p' q' \operatorname{Cos} \varphi = \sqrt{2}$, oder $p' q' \, 2 \operatorname{Cos} \varphi = -\sqrt{2} = -1 \times 1 \times \sqrt{2}$, woraus $p' = -1$, $q' = 1$, r oder $\frac{p'}{q'} = -1$, $2 \operatorname{Cos} \varphi = \sqrt{2}$, $\operatorname{Cos} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und also $\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ folgt.

Vergleicht man ferner den andern Factor des Nenners 𝔓, den Factor $\mathfrak{P}' = 1 - z\sqrt{2} + z^2$ nehmlich, mit dem Factor $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots + \omega z^{n-2}$ (§. 102. Nro. 1.); so erhält man $\alpha = 1$, $\beta = -\sqrt{2}$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$ ꝛc.

Wird endlich der Zähler $\mathfrak{Z} = 1 + z + z^2$ des Bruchs $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ mit dem im vorigen §. allgemein ausgedrückten Zähler $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Uz^n$ verglichen, so ergiebt sich $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 0$ rc.

Hieraus lassen sich nun die Werthe von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ nach §. 102. Nro. 5. bestimmen, wie hier folgt. Es wird

$$\mathfrak{F} = 1 - \operatorname{Cos}\frac{\pi}{4} + \operatorname{Cos}\frac{2\pi}{4} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} + 0 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathfrak{f} = -\operatorname{Sin}\frac{\pi}{4} + \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{4} = -\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathfrak{G} = 1 + \sqrt{2}\,.\operatorname{Cos}\frac{\pi}{4} + \operatorname{Cos}\frac{2\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{1}{2}} + 0 = 2,$$

$$\mathfrak{g} = \sqrt{2}\,.\operatorname{Sin}\frac{\pi}{4} + \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{4} = \sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 = 2,$$

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{Cos}\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\,.\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{4} - \operatorname{Cos}\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{\frac{1}{2}} - 0 + \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\mathfrak{h} = -\operatorname{Sin}\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\,.\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{4} - \operatorname{Sin}\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}.$$

Gebraucht man diese Werthe in den Gleichungen für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (§. 102. Nro. 4.), so erhält man:

$$\mathfrak{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \times -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \times 0}{2 \times -\sqrt{2} - 2 \times 0} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \times 2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{0 \times 2 - 2 \times -\sqrt{2}} = \frac{0}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Es ist also Z' oder $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + 0 \times 2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$, und folglich der gesuchte Partialbruch

$$= \frac{(\sqrt{2}-1) : 2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2}.$$

4) Jetzt

4) Jetzt nehme man die hier Statt findenden Werthe von $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Z}$ und $p'^2 - 2p'q'z \times \text{Cos}\,\varphi + q'^2.z^2$, und setze sie in die Gleichung

$$\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}'.\mathfrak{P}'}{p'^2 - 2p'q'z\ \text{Cos}\,\varphi + q'^2.z^2}$$ (§. 102. Nro. 7.);

hierdurch erhält man den Zähler

$$\mathfrak{B}' = \frac{1 + z + z^2 - [(\sqrt{2} - 1) : 2\sqrt{2}]\,[1 - z\sqrt{2} + z^2]}{1 + z\sqrt{2} + z^2} = (\sqrt{2} + 1) : 2\sqrt{2}$$

des zweyten Partialbruchs, welcher dem Bruche $\frac{1 + z + z^2}{1 + z^4}$ zugehört, und der nun $\frac{(\sqrt{2} + 1) : 2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}$ heißt. Der Nenner dieses Bruches ist selbst ein dreytheiliger Factor, und es hat also hier die Zerlegung ein Ende.

5) Demnach ist nun

$$\frac{1 + z + z^2}{1 + z^4} = \frac{(\sqrt{2} - 1) : 2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2} + \frac{(\sqrt{2} + 1) : 2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}$$ und folglich, weil

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)} = \frac{-1}{1 - z + z^2} + \frac{1 + z + z^2}{1 + z^4}$$ war,

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)}$$

$$= \frac{-1}{1 - z + z^2} + \frac{(\sqrt{2} - 1) : 2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2} + \frac{(\sqrt{2} + 1) : 2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}.$$

§. 104.

Dem in §. 102. angegebenen Verfahren für die Berechnung der Werthe der Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ soll hier noch ein Zusatz beygefügt werden, in welchem gezeigt wird, wie man die Berechnung der zur Bestimmung der Werthe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nöthigen Größen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$ ersparen, und also hierdurch die Berechnung für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ etwas abkürzen kann.

1) Es war in §. 102. Nro. 4.

$$\mathfrak{G} = \alpha + \beta r.\,\text{Cos}\,\varphi + \gamma r^2.\,\text{Cos}\,2\varphi + \delta r^3.\,\text{Cos}\,3\varphi + \varepsilon r^4.\,\text{Cos}\,4\varphi + \ldots;$$

$$\mathfrak{g} = \beta r.\,\text{Sin}\,\varphi + \gamma r^2.\,\text{Sin}\,2\varphi + \delta r^3.\,\text{Sin}\,3\varphi + \varepsilon r^4.\,\text{Sin}\,4\varphi + \ldots$$

$$\mathfrak{H} = \alpha r.\,\text{Cos}\,\varphi + \beta r^2.\,\text{Cos}\,2\varphi + \gamma r^3.\,\text{Cos}\,3\varphi + \delta r^4.\,\text{Cos}\,4\varphi + \varepsilon r^5.\,\text{Cos}\,5\varphi + \ldots$$

$$\mathfrak{h} = \alpha r.\,\text{Sin}\,\varphi + \beta r^2.\,\text{Sin}\,2\varphi + \gamma r^3.\,\text{Sin}\,3\varphi + \delta r^4.\,\text{Sin}\,4\varphi + \varepsilon r^5.\,\text{Sin}\,5\varphi + \ldots$$

2) Mul-

2) Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\varphi$, die zweyte aber mit $\sin\varphi$, so erhält man die Gleichungen

$$\mathfrak{G}\cos\varphi = \alpha\cos\varphi + \beta r.\cos\varphi^2 + \gamma r^2.\cos 2\varphi.\cos\varphi + \delta r^3.\cos 3\varphi.\cos\varphi + \varepsilon r^4.\cos 4\varphi.\cos\varphi + \ldots,$$

$$\mathfrak{g}\sin\varphi = \beta r.\sin\varphi^2 + \gamma r^2.\sin 2\varphi.\sin\varphi + \delta r^3.\sin 3\varphi.\sin\varphi + \varepsilon r^4.\sin 4\varphi.\sin\varphi + \ldots,$$

aus welchen, wenn man die letztere von der ersteren abzieht, die Gleichung

$$\mathfrak{G}.\cos\varphi - \mathfrak{g}\sin\varphi$$

$$= \alpha.\cos\varphi + \beta r.(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) + \gamma r^2.(\cos 2\varphi.\cos\varphi - \sin 2\varphi.\sin\varphi) \delta r^3.(\cos 3\varphi.\cos\varphi - \sin 3\varphi.\sin\varphi) + \varepsilon r^4.(\cos 4\varphi.\cos\varphi - \sin 4\varphi.\sin\varphi) + \ldots$$

folgt, für die man ferner aus bekannten Gründen auch

$$\mathfrak{G}.\cos\varphi - \mathfrak{h}.\sin\varphi = \alpha.\cos\varphi + \beta r.\cos 2\varphi + \gamma r^2.\cos 3\varphi + \delta r^3.\cos 4\varphi + \varepsilon r^4.\cos 4\varphi + \ldots$$

setzen kann. Wird nun diese Gleichung mit der dritten Gleichung in Nro. 1. verglichen, so findet man, daß die rechte Seite derselben, wenn man sie mit r multiplicirt, vollkommen mit der rechten Seite der dritten Gleichung in Nro. 1. übereinstimmt, und daß also auch die Größe $\mathfrak{H}$ aus der Gleichung

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{G}.\cos\varphi - \mathfrak{g}.\sin\varphi)\, r$$

gefunden werden kann.

3) Multiplicirt man ferner die erste Gleichung in Nro. 1. mit $\sin\varphi$, und die zweyte mit $\cos\varphi$; so erhält man die beyden Gleichungen

$$\mathfrak{G}.\sin\varphi = \alpha.\sin\varphi + \beta r.\cos\varphi.\sin\varphi + \gamma r^2.\cos 2\varphi.\sin\varphi + \delta r^3.\cos 3\varphi.\sin\varphi + \varepsilon r^4 \cos 4\varphi.\sin\varphi + \ldots$$

$$\mathfrak{g}.\cos\varphi = \beta r.\sin\varphi.\cos\varphi + \gamma r^2.\sin 2\varphi.\cos\varphi + \delta r^3.\sin 3\varphi.\cos\varphi + \varepsilon r^4.\sin 4\varphi.\cos\varphi + \ldots,$$

aus welchen sich durch Addition die Gleichung

$$\mathfrak{G}.\sin\varphi + \mathfrak{g}.\cos\varphi$$

$$= \alpha\sin\varphi + \beta r.2\cos\varphi.\sin\varphi + \gamma r^2.(\cos 2\varphi.\sin\varphi + \sin 2\varphi.\cos\varphi) + \delta r^3.(\cos 3\varphi.\sin\varphi + \sin 3\varphi.\cos\varphi) + \varepsilon r^4.(\cos 4\varphi.\sin\varphi + \sin 4\varphi.\cos 4) + \ldots$$

ergiebt, für die man auch aus bekannten Gründen

$$\mathfrak{G} . \text{Sin}\,\varphi + \mathfrak{g} . \text{Cos}\,\varphi = \alpha . \text{Sin}\,\varphi + \beta\, r . \text{Sin}\,2\varphi + \gamma\, r^2 . \text{Sin}\,3\varphi + \delta\, r^3 . \text{Sin}\,4\varphi + \varepsilon\, r^4 . \text{Sin}\,5\varphi + \ldots$$

setzen kann. Wird diese letzte Gleichung mit der vierten der in Nro. 1. stehenden Gleichungen verglichen, so ergiebt sich

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{G} . \text{Sin}\,\varphi + \mathfrak{g} . \text{Cos}\,\varphi).$$

4) Es lassen sich also die beyden Größen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$ vermittelst der beyden Gleichungen

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{G} . \text{Cos}\,\varphi - \mathfrak{g} . \text{Sin}\,\varphi) . r,$$

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{G} . \text{Sin}\,\varphi + \mathfrak{g} . \text{Cos}\,\varphi) . r,$$

durch die Größen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ ausdrücken. Setzt man nun ferner an die Stelle von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$ in den beyden Gleichungen

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{h} - \mathfrak{f}\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}\mathfrak{h} - \mathfrak{g}\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f}}{\mathfrak{H}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{h}} \text{ (§. 102. Nro. 4.)},$$

die für die beyden Größen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$ gefundenen Ausdrücke; so erhält man nachstehende Ausdrücke für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

$$\text{I)}\ \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{F}\, r\, (\mathfrak{G} . \text{Sin}\,\varphi + \mathfrak{g} . \text{Cos}\,\varphi) - \mathfrak{f}\, r\, (\mathfrak{G} . \text{Cos}\,\varphi - \mathfrak{g} . \text{Sin}\,\varphi)}{\mathfrak{G}\, r\, (\mathfrak{G} . \text{Sin}\,\varphi + \mathfrak{g} . \text{Cos}\,\varphi) - \mathfrak{g}\, r\, (\mathfrak{G} . \text{Cos}\,\varphi - \mathfrak{g} . \text{Sin}\,\varphi)}$$

$$= \frac{(\mathfrak{F}\mathfrak{G} + \mathfrak{f}\mathfrak{g}) . \text{Sin}\,\varphi + (\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}\mathfrak{G}) . \text{Cos}\,\varphi}{(\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2) . \text{Sin}\,\varphi}$$

$$= \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{G} + \mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2} + \frac{(\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f}) . \text{Cos}\,\varphi}{(\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2) . \text{Sin}\,\varphi};$$

$$\text{II)}\ \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f}}{r\,\mathfrak{g}\, (\mathfrak{G} . \text{Cos}\,\varphi - \mathfrak{g} . \text{Sin}\,\varphi) - r\,\mathfrak{G}\, (\mathfrak{G} . \text{Sin}\,\varphi + \mathfrak{g} . \text{Cos}\,\varphi)}.$$

$$= \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f}}{-r\, (\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{G}^2) . \text{Sin}\,\varphi} = \frac{-(\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f})}{(\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2)\, r . \text{Sin}\,\varphi}$$

5) Werden beyde Ausdrücke von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in den Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} . z}{p^2 - 2\,p\,q\,z . \text{Cos}\,\varphi + q^2 . z^2}$$

gesetzt, so erhält man:

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{G} + \mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2} + \dfrac{(\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f}) . \text{Cos}\,\varphi}{(\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2) . \text{Sin}\,\varphi} - \dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\mathfrak{f}}{(\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2)\, r . \text{Sin}\,\varphi} \times z}{p^2 - 2\,p\,q\,z . \text{Cos}\,\varphi + q^2 . z^2}$$

oder

$$\frac{(\mathfrak{F}\,\mathfrak{G} + \mathfrak{f}\,\mathfrak{g})\,r.\,\mathrm{Sin}\,\varphi + (\mathfrak{F}\,\mathfrak{g} - \mathfrak{G}\,\mathfrak{f})\,(r.\,\mathrm{Cos}\,\varphi - z)}{(p^2 - 2\,p\,q\,z.\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2)\,(\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{g}^2)\,r.\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\ (h),$$

und dieses ist der **allgemeine** Ausdruck für die reellen Partialbrüche, welche aus den dreytheiligen Factoren der Nenner N solcher ächten gebrochenen Functionen $\frac{M}{N}$ entspringen, in denen die einfachen imaginären Factoren von N alle **verschieden** groß sind.

6) Die Regeln also, nach welchen sich ein jeder dieser Partialbrüche bestimmen läßt, sind folgende:

a) "Man setze, nachdem man Cos φ, Sin φ und $r = \frac{p}{q}$ bestimmt hat, in dem "Zähler M der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$, und in dem Factor $\mathfrak{P}$ des Nenners N, (wel"cher, den dreytheiligen Factor ausgenommen, zu welchem der Zähler gesucht werden "soll, alle Factoren von N enthält)

$$z^n = r^n.\,\mathrm{Cos}\,n\,\varphi,$$

"dann erhält man aus M die Größe $\mathfrak{F}$, und aus $\mathfrak{P}$ aber die Größe $\mathfrak{G}$.

b) "Nun nehme man abermals die beyden Functionen M und $\mathfrak{P}$ vor, und setze in ihnen überall

$$z^n = r^n.\,\mathrm{Sin}\,\varphi;$$

"dadurch erhält man aus M die Größe $\mathfrak{f}$, aus $\mathfrak{P}$ die Größe $\mathfrak{g}$.

c) "Diese nach Nro. a) und b) berechneten Größen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ nehme man als"dann, und setze sie in den Ausdrucke (h) in Nro. 5.; auf diese Art ergiebt sich "dann der dem dreytheiligen Factor $p^2 - 2\,p\,q\,z.\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.\,z^2$, aus welchem "man die Werthe von Cos φ, Sin φ und $r = \frac{p}{q}$ bestimmt hat, entsprechende "reelle Partialbruch der Function $\frac{M}{N}$.

7) Bey der in §. 103. vorgenommenen Zerlegung der Function

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)}$$

z. E.

z. E. war für den Factor $1 - z + z^2$, $p = 1$, $q = 1$, $r = \frac{p}{q} = 1$, $\operatorname{Cos}\varphi = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathfrak{F} = \frac{-1}{2}$, $\mathfrak{G} = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{f} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathfrak{g} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; hierfür nun ist nach der Formel (h) in Nro. 5. der Partialbruch

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-1}{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right)}{(1 - z + z^2)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right)}{(1 - z + z^2)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1 - z + z^2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{1 - z + z^2}.$$

Ferner war für den Factor $1 + z\sqrt{2} + z^2$, $p = -1$, $q = 1$, $r = \frac{p}{q} = -1$, $\operatorname{Cos}\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Sin}\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{F} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{f} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{G} = 2$, $\mathfrak{g} = 2$; hierfür ist nach der Formel (h) in Nro. 5. der Partialbruch

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\times 2 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\times 2\right)\times -1\times\sqrt{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\times 2 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\times 2\right)\left(-1\times\sqrt{\frac{1}{2}} - z\right)}{(1 + z\sqrt{2} + z^2)(2^2 + 2^2)\times -1\times\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{4(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}\times -\sqrt{\frac{1}{2}}}{(1 + z\sqrt{2} + z^2)\times -8\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{(\sqrt{2} - 1) : 2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2}$$

Auf ähnliche Art wird für den Factor $1 - z\sqrt{2} + z^2$ der dritte Partialbruch, welcher $= \frac{(\sqrt{2} + 1) : 2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}$ ist, erhalten.

§. 105.

"Nun sey auch $\frac{M}{N}$ eine **ächte** gebrochene Function von z, deren Nenner ausser "den **verschieden großen** und **imaginären** einfachen Factoren auch noch **reelle** ein-

 fache

"fache Factoren enthält, die Anzahl und Beschaffenheit dieser letzteren Factoren aber sey "beliebig. Es soll gezeigt werden, wie sich eine solche Function in lauter reelle Partial-"brüche zerlegen läßt."

1) Eine jede gebrochene Function läßt sich nach den vorhergehenden Lehren ganz gewiß in so viele Partialbrüche auflösen, als wie viel der Gradexponent des Nenners N Einheiten enthält. Man nehme nun diese Zerlegung mit $\frac{M}{N}$ wirklich vor, und zwar fange man dieselbe mit der Bestimmung derjenigen Partialbrüche an, welche aus den reellen Factoren von N entspringen, und setze sie nur so lange fort, bis man alle diese Partialbrüche, welche hier mit $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, $\frac{m'''}{n'''}$ rc. bezeichnet werden sollen, erhalten hat. Hierauf nehme man das Product aus den imaginären Factoren von N, welches hier $\mathfrak{N}$ heißen soll, und denke sich dazu einen Zähler $\mathfrak{M}$, welcher der Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \frac{m'''}{n'''} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$$

ein Genüge leistet.

2) Den erwähnten Zähler $\mathfrak{M}$ suche man aus dieser Gleichung, in der ausser $\mathfrak{M}$ alle Größen als bekannt zu betrachten sind. Der Weg, auf welchem man den Werth desselben finden kann, ist folgender:

Man bringe alle Partialbrüche, welche sich für die reellen Factoren von N ergeben haben, unter einen gemeinschaftlichen Nenner n, welcher dem Producte aus den reellen Factoren von N gleich ist, dann summire man diese Brüche. Heißt nun die Summe derselben $\frac{m}{n}$, so hat man die Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{m}{n} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}},$$

und aus dieser folgt ferner, wenn man auch $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ unter einerley Benennung bringt,

$$\frac{M}{N} = \frac{m\,.\,\mathfrak{N} + \mathfrak{M}\,.\,n}{n\,.\,\mathfrak{N}}$$

oder, weil $N = n\,.\,\mathfrak{N}$ ist, $M = m\,.\,\mathfrak{N} + \mathfrak{M}\,.\,n$. Demnach ist nun

$$\frac{M - m\mathfrak{N}}{n} = \mathfrak{M}.$$

3) Hat

3) Hat man auf die bisher erwähnte Art den Zähler $\mathfrak{M}$ bestimmt, so nehme man den Bruch $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ vor, und zerlege ihn noch besonders nach §. 104. in die Partialbrüche, welche die doppelten Factoren von $\mathfrak{N}$ zu ihren Nennern haben.

Nach dem bisherigen Verfahren erhält man alle die reellen und einfachsten Partialbrüche, welche für eine solche Function $\frac{M}{N}$, von welcher hier die Rede war, angegeben werden können.

§. 106.

Es folgt hier die Anwendung dessen, was im vorigen §. gelehrt worden ist.

"Die Function

$$\frac{M}{N} = \frac{1 + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}z^2 - \frac{9}{3}z^3 + 4z^4 - 2z^5 - 2z^6 + z^7 + z^8}{z^3(1-z)^2(1+z)\left(\frac{4+3\sqrt{-1}}{5} - z\right)\left(\frac{4-3\sqrt{-1}}{5} - z\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{-2}{3}} - z\sqrt{3}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{-2}{3}} - z\sqrt{3}\right)}$$

"deren Nenner aus verschieden großen imaginären und überdieß auch noch aus reellen einfachen Factoren besteht, sey in die ihr zukommenden einfachsten reellen Partialbrüche zu zerlegen."

1) Sucht man das Product $\mathfrak{N}$ aus den imaginären Factoren des Nenners N, so erhält man $\mathfrak{N} = (1 - \frac{8}{3}z + z^2)(1 + 2z + 3z^2) = 1 + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}z^2 - \frac{14}{3}z^3 + 3z^4$. Setzt man nun, wie es hier wegen der Beschaffenheit der reellen einfachen Factoren von N geschehen muß, nach §. 98. Nro. II) 7, d. die Function oder

$$\frac{1 + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}z^2 - \frac{9}{3}z^3 + 4z^4 - 2z^5 - 2z^6 + z^7 + z^8}{z^3.(1-z)^2.(1+z)(1 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{3}z^2 - \frac{14}{3}z^3 + 3z^4)}$$

$$= \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{A'}{(1-z)^2} + \frac{B'}{1-z} + \frac{\mathfrak{a}}{1+z} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}},$$

und sucht zuerst die Zähler A, B, C, A', B', $\mathfrak{a}$; so entsteht folgende Rechnung:

2) Für die Bestimmung der Zähler A, B, C ist der einfache Factor $a - \alpha z$, der hier in Betrachtung gezogen werden muß, $= z$, und es ist also hier $a = 0$, $-\alpha = 1$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{0}{-1} = 0$; der andere hier nöthige Factor $\mathfrak{P}$ aber ist

$= (1 -$

$$= (1 - z)^2 . (1 + z)(1 + \tfrac{2}{5}z + \tfrac{4}{5}z^2 - \tfrac{14}{5}z^3 + 3z^4)$$
$$= 1 - \tfrac{3}{5}z - \tfrac{3}{5}z^2 + 4z^3 + \tfrac{27}{5}z^4 + \tfrac{8}{5}z^5 - \tfrac{29}{5}z^6 + 3z^7.$$

Für diese Werthe von $\frac{a}{\alpha}$ und $\mathfrak{P}$ nun erhält man:

$$A = \frac{M}{\mathfrak{P}} = \frac{1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{9}{5}z^3 + \ldots}{1 - \frac{3}{5}z - \frac{3}{5}z^2 - 4z^3 + \ldots} = \frac{1}{1} = 1, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{z + \frac{7}{5}z^2 + \frac{7}{5}z^3 - \frac{7}{5}z^4 + \frac{13}{5}z^5 + \frac{19}{5}z^6 - 2z^7 + z^8}{z};$$

$$= 1 + \tfrac{7}{5}z + \tfrac{7}{5}z^2 - \tfrac{7}{5}z^3 + \tfrac{13}{5}z^4 + \tfrac{19}{5}z^5 - 2z^6 + z^7$$

$$B = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} = \frac{1 + \frac{7}{5}z + \frac{7}{5}z^2 - \frac{7}{5}z^3 + \ldots}{1 - \frac{3}{5}z - \frac{3}{5}z^2 - 4z^3 + \ldots} = \frac{1}{1} = 1, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{2z + 2z^2 + \frac{13}{5}z^3 - \frac{34}{5}z^4 + 2z^5 + \frac{39}{5}z^6 - 5z^7 + z^8}{z}$$

$$= 2 + 2z + \tfrac{13}{5}z^2 - \tfrac{34}{5}z^3 + 2z^4 + \tfrac{39}{5}z^5 - 5z^6 + z^7;$$

$$C = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}} = \frac{2 + 2z + \frac{13}{5}z^2 - \frac{34}{5}z^3 + \ldots}{1 - \frac{3}{5}z - \frac{3}{5}z^2 - 4z^3 + \ldots} = \frac{2}{1} = 2, \text{ für } z = \frac{a}{\alpha} = 0.$$

3) Für die Bestimmung der Zähler A' und B' ist der einfache Factor $b - \beta z$ von N, welcher hier in Betrachtung kommt, $= 1 - z$, folglich ist $b = 1$, $\beta = 1$, $\frac{b}{\beta} = \frac{1}{1} = 1$; das hier nöthige Product $\mathfrak{P}'$ aber ist

$$= z^3(1 + z)(1 + \tfrac{2}{5}z + \tfrac{4}{5}z^2 - \tfrac{14}{5}z^3 + 3z^4)$$
$$= z^3 + \tfrac{7}{5}z^4 + \tfrac{6}{5}z^5 - 2z^6 + \tfrac{1}{5}z^7 + 3z^8.$$

Demnach muß nun seyn:

$$A' = \frac{M}{\mathfrak{P}'} = \frac{1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{9}{5}z^3 + 4z^4 - 2z^5 - 2z^6 + z^7 + z^8}{z^3 + \frac{7}{5}z^4 + \frac{6}{5}z^5 - 2z^6 + \frac{1}{5}z^7 + 3z^8}; \text{ für } z = \frac{b}{\beta} = 1,$$

$$\text{also} = \frac{1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{9}{5} + 4 - 2 - 2 + 1 + 1}{1 + \frac{7}{5} + \frac{6}{5} - 2 + \frac{1}{5} + 3} = \frac{12}{5} : \frac{24}{5} = \frac{1}{2};$$

$$\mathfrak{A} = \frac{M - A'\mathfrak{P}'}{b - \beta z} = \frac{1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{23}{10}z^3 + \frac{33}{10}z^4 - \frac{26}{10}z^5 - z^6 + \frac{9}{10}z^7 - \frac{1}{2}z^8}{1 - z}$$

$$= 1 + \tfrac{7}{5}z + \tfrac{11}{5}z^2 - \tfrac{1}{10}z^3 + \tfrac{32}{10}z^4 + \tfrac{6}{10}z^5 - \tfrac{4}{10}z^6 + \tfrac{1}{2}z^7;$$

$B' =$

$$B' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{P}'} = \frac{1 + \frac{7}{5}z + \frac{11}{5}z^2 - \frac{1}{10}z^3 + \frac{32}{10}z^4 + \frac{6}{10}z^5 - \frac{4}{10}z^6 + \frac{1}{2}z^7}{z^3 + \frac{7}{5}z^4 + \frac{6}{5}z^5 - 2z^6 + \frac{1}{5}z^7 + 3z^8}; \text{ für } z = \frac{b}{\beta} = 1,$$

also $$= \frac{1 + \frac{7}{5} + \frac{11}{5} - \frac{1}{10} + \frac{32}{10} + \frac{6}{10} - \frac{4}{10} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{7}{5} + \frac{6}{5} - 2 + \frac{1}{5} + 3} = \frac{42}{5} : \frac{24}{5} = \frac{7}{4}.$$

4) Für die Bestimmung des Zählers a endlich ist der einfache Factor $c - \gamma z$, welchen man hier braucht, $= 1 + z$, und also $c = 1$, $-\gamma = 1$, $\frac{c}{\gamma} = \frac{1}{-1} = -1$, der Factor $\mathfrak{P}''$ aber heißt hier

$$z^3.(1-z)^2.(1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{14}{5}z^3 + 3z^4)$$
$$= z^3 - \frac{8}{5}z^4 + z^5 - \frac{20}{5}z^6 + \frac{47}{5}z^7 - \frac{44}{5}z^8 + 3z^9$$

Also ist $$a = \frac{M}{\mathfrak{P}''} = \frac{1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{9}{5}z^3 + 4z^4 - 2z^5 - 2z^6 + z^7 + z^8}{z^3 - \frac{8}{5}z^4 + z^5 - \frac{20}{5}z^6 + \frac{47}{5}z^7 - \frac{44}{5}z^8 + 3z^9},$$

für $z = \frac{c}{\gamma} = -1$, welches $a = \frac{36}{5} : \frac{-144}{5} = -\frac{36}{144} = -\frac{1}{4}$ giebt.

5) Setzt man jetzt die gefundenen Werthe der Zähler A, B ꝛc. in die in Nro. 1. aufgestellte Gleichung, so sieht dieselbe so aus:

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{1-z} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+z} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}.$$

Bringt man ferner alle Brüche, welche aus den reellen Factoren von N entsprungen sind, unter den gemeinschaftlichen Nenner $z^3.(1-z)^2.(1+z)$ und sucht dieser Brüche ihre Summe, so erhält man den Bruch $\frac{1}{z^3.(1-z)^2.(1+z)}$. Man kann also jetzt statt der vorigen Gleichung auch folgende setzen:

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{z^3.(1-z)^2.(1+z)} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}},$$

aus welcher ferner $\frac{M}{N} = \frac{1.\mathfrak{N} + \mathfrak{M}z^3.(z-1)^2.(z+1)}{z^3.(1-z)^2.(1+z)\,\mathfrak{N}}$, und mithin, weil $N = z^3.(1-z)^2.(1+z)\,\mathfrak{N}$ ist, die Gleichung

$$M = \mathfrak{N} + \mathfrak{M}z^3.(1-z)^2.(1+z)$$

folgt, welche $\frac{M - \mathfrak{N}}{z^3.(1-z)^2.(1+z)} = \mathfrak{M}$ giebt. Es ist also hier, wenn man jetzt die

Werthe

Werthe von M und $\mathfrak{N}$ substituirt, der Zähler

$$\mathfrak{M} = \frac{1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{2}{5}z^3 + 4z^4 - 2z^5 - 2z^6 + z^7 + z^8 - (1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{14}{5}z^3 + 3z^4)}{z^3 . (1 - z)^2 . (1 + z)}$$

$$= \frac{z^3 + z^4 - 2z^5 - 2z^6 + z^7 + z^8}{z^3 - z^4 - z^5 + z^6} = 1 + 2z + z^2$$

6) Nun nehme man auch den Bruch $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{1 + 2z + z^2}{1 + \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 - \frac{14}{5}z^3 + 3z^4}$ und zerlege ihn, und zwar in die reellen Partialbrüche, welche die dreytheiligen Factoren von $\mathfrak{N}$, die hier $1 - \frac{8}{5}z + z^2$ und $1 + 2z + 3z^2$ heißen, zu ihren Nennern haben, nach §. 102. Man setze also

$$\frac{1 + 2z + z^2}{(1 - \frac{8}{5}z + z^2)(1 + 2z + 3z^2)} = \frac{a + bz}{1 - \frac{8}{5}z + z^2} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

und bestimme zuerst die Größen a und b.

7) Der dreytheilige Factor $1 - \frac{8}{5}z + z^2$, mit dem allgemeinen in §. 102. gebrauchten dreytheiligen Factor $p^2 - 2pqz . \mathrm{Cos}\,\varphi + q^2 . z^2$ verglichen, giebt $p^2 = 1$, $q^2 = 1$, $2pq\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{8}{5}$, woraus $p = 1$, $q = 1$, $2pq\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{8}{5}$, $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{4}{5}$ folgt.

Vergleicht man ferner den zweyten Factor von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ nehmlich, mit dem allgemeinen im §. 102. gebrauchten, welcher dort $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \omega z^{n-2}$ hieß, und der hier $= 1 + 2z + 3z^2$ ist; so erhält man: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ &c.

Wird endlich der Zähler $\mathfrak{M} = 1 + 2z + z^2$ mit dem allgemeinen in §. 102. gebrauchten Zähler $M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Uz^n$ verglichen, so erhält man: $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 0$ &c.

8) Jetzt ließen sich die Größen $\mathfrak{F}$, f, $\mathfrak{G}$, g, $\mathfrak{H}$, h nach den in §. 102. angegebenen Gleichungen bestimmen, wenn man hier $\mathrm{Cos}\,2\varphi$, $\mathrm{Cos}\,3\varphi$ &c. $\mathrm{Sin}\,\varphi$, $\mathrm{Sin}\,2\varphi$, $\mathrm{Sin}\,3\varphi$ &c. wüßte. Ob nun gleich hier φ nicht als ein aliquoter Theil von π bekannt ist, wie dieß in §. 103. der Fall war; so weiß man doch aus Nro. 7, daß $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{4}{5}$ ist, daraus aber kann man $\mathrm{Sin}\,\varphi$, $\mathrm{Cos}\,2\varphi$, $\mathrm{Sin}\,2\varphi$, $\mathrm{Cos}\,3\varphi$, $\mathrm{Sin}\,3\varphi$ &c. berechnen.

Weil

Weil nehmlich

$Cos\,\varphi = \frac{4}{5}$ ist, so muß nun auch $Sin\,\varphi = \sqrt{(1 - \frac{16}{25})} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$,

$Cos\,2\varphi = Cos\,\varphi^2 - Sin\,\varphi^2 = \frac{4^2}{5^2} - \frac{3^2}{5^2} = \frac{7}{25}$; $Sin\,2\varphi = 2\,Sin\,\varphi . Cos\,\varphi = 2 . \frac{3.4}{5.5} = \frac{24}{25}$,

$Cos\,3\varphi = Cos\,2\varphi . Cos\,\varphi - Sin\,2\varphi . Sin\,\varphi = \frac{-44}{125}$, $Sin\,3\varphi = Sin\,2\varphi . Cos\,\varphi + Cos\,2\varphi . Sin\,\varphi = \frac{117}{125}$,

u. s. w.

seyn. Also wird hier nach den in §. 102. gegebenen Gleichungen

$$\mathfrak{F} = 1 + 2 . \frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25},$$

$$\mathfrak{f} = \quad 2 . \frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25},$$

$$\mathfrak{G} = 1 + 2 . \frac{4}{5} + 3 . \frac{7}{25} = \frac{86}{25},$$

$$\mathfrak{g} = \quad 2 . \frac{3}{5} + 3 . \frac{24}{25} = \frac{102}{25},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{4}{5} + 2 . \frac{7}{25} - 3 . \frac{44}{125} = \frac{38}{125},$$

$$\mathfrak{h} = \frac{3}{5} + 2 . \frac{24}{25} + 3 . \frac{117}{125} = \frac{666}{125}.$$

9) Für die jetzt bestimmten Werthe von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{h}$ erhält man, wenn man sie in den beyden Gleichungen für a und b in §. 102. gebraucht,

$$a = \frac{\frac{72}{25} . \frac{666}{125} - \frac{54}{25} . \frac{38}{125}}{\frac{86}{25} . \frac{666}{125} - \frac{102}{25} . \frac{38}{125}} = \frac{47952 - 2052}{57276 - 3876}$$

$$= \frac{45900}{53400} = \frac{459}{534} = \frac{153}{178},$$

$$b = \frac{\frac{72}{25} . \frac{102}{25} - \frac{86}{25} . \frac{54}{25}}{\frac{38}{125} . \frac{102}{25} - \frac{86}{25} . \frac{666}{125}} = \frac{7344 - 4644}{(3876 - 57276) : 5}$$

$$= \frac{2700}{-10680} = \frac{-270}{1068} = -\frac{45}{178}.$$

Es ist demnach, wenn man diese Werthe von a und b in die in Nro. 6. aufgestellte Gleichung setzt,

$$\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)} = \frac{\frac{153}{178}-\frac{45}{178}z}{1-\frac{8}{5}z+z^2} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}.$$

10) Da hier der Nenner des Bruches $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$ selbst ein dreytheiliger Factor $= 1 + 2z + 3z^2$ ist, so hat die Zerlegung ein Ende und man hat nur noch $\mathfrak{Z}$ zu suchen. Es ist aber nach §. 102. Nro. 6.

$$\mathfrak{Z} = \frac{M - Z\mathfrak{P}}{p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2 . z^2},$$

woraus man, weil hier $M = 1 + 2z + z^2$, $Z = \frac{153}{178} - \frac{45}{178}z$, $\mathfrak{P} = 1 + 2z + 3z^2$, und endlich $p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2 . z^2 = 1 - \frac{8}{5}z + z^2$ ist, den Werth

$$\mathfrak{Z} = \frac{1+2z+z^2 - \frac{153-45.z}{178} \times (1+2z+3z^2)}{1-\frac{8}{5}z+z^2} = \frac{25+135.z}{178}$$

erhält. Also muß nun der Bruch $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, d. h. der Bruch

$$\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)} = \frac{153-45.z}{178.(1-\frac{8}{5}z+z^2)} + \frac{25-135.z}{178.(1+2z+3z^2)}$$

gesetzt werden.

11) Wenn man jetzt die beyden für $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ gefundenen reellen Partialbrüche in die Gleichung setzt, welche zu Anfang von Nro. 5. steht; so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1+\frac{2}{5}z+\frac{4}{5}z^2-\frac{2}{5}z^3+4z^4-2z^5-2z^6+z^7+z^8}{z^3.(1-z)^2.(1+z)(\frac{4+3\sqrt{-1}}{5}-z)(\frac{4-3\sqrt{-1}}{5}-z)(\frac{-1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{-2}{3}}-z\sqrt{3})(\frac{-1}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{-1}{3}}-z\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1+z)} + \frac{153-45.z}{178.(1-\frac{8}{5}z+z^2)}$$

$$+ \frac{25-135.z}{178.(1+2z+3z^2)},$$

und in dieser ist $\frac{M}{N}$ in den einfachsten reellen Partialbrüchen ausgedrückt, welche sich dafür finden lassen.

§. 107.

§. 107.

Wenn der Nenner N einer in ihre einfachsten reellen Partialbrüche aufzulösenden ächten gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ einen dreytheiligen Factor $p^2 - 2pqz.\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ in einer höheren, als der ersten Potenz enthält; so kann aus diesem Factor nach der jetzt gelehrten Methode kein Partialbruch gefunden werden. Man sieht dieses sogleich ein, wenn man auf das Princip zurückgeht, auf welches die erwähnte Methode gegründet ist, und welches der Satz war, daß

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{p^2 - 2pqz.\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

gesetzt werden könne (§. 102. Nro. 1.). Dieser Satz ist nur dann anwendbar, wenn die Nenner $p^2 - 2pqz.\mathrm{Cos}\,\varphi + p^2.z^2$ und $\mathfrak{P}$ als Factoren von N keinen gemeinschaftlichen Theiler haben (§. 85.), und kann also nicht gebraucht werden, wenn N eine höhere, als die erste Potenz des Factors $p^2 - 2pqz\ \mathrm{Cos}\,\varphi + p^2.z^2$ enthält, wenn folglich eben dieser Factor auch noch in dem Nenner $\mathfrak{P}$ vorkommt. Es lassen sich aber auch solche Functionen $\frac{M}{N}$, in welchen die Nenner N Potenzen dreytheiliger Factoren enthalten, in reelle Partialbrüche auflösen, welche aus diesen dreytheiligen Factoren entspringen. Dieses wird aus folgendem §. erhellen.

§. 108.

"In der nachstehenden ächten gebrochenen Function

$$\frac{M}{N} = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Tz^{n-1} + Uz^n}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots + \mathfrak{T}z^{n-1} + \mathfrak{U}z^n}$$

"enthalte der Nenner N ausser den übrigen Factoren, deren Product hier $\mathfrak{P}$ heißen soll, "auch die mte Potenz des dreytheiligen Factors $p^2 - 2pqz.\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ (wo "m eine ganze bejahte Zahl bedeutet) und $p^2 - 2pqz.\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ habe mit $\mathfrak{P}$ "gar keinen Factor gemein. Es soll gezeigt werden, daß sich ausser dem reellen Partial"bruche $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$, welcher aus dem Factor $p^2 - 2pqz.\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ entspringt, noch m "reelle Partialbrüche für $\frac{M}{N}$ angeben lassen, die aus dem Factor $(p^2 - 2pqz.\mathrm{Cos}\,\varphi$ "$+ q^2.z^2)$ entspringen und von der Art sind, daß sie Potenzen von $p^2 - 2pqz\mathrm{Cos}\,\varphi$ "$+ q^2.z^2$ zu ihren Nennern, constante Größen aber oder ganze und einfache Functionen "von z zu ihren Zählern haben."

1) Da

1) Da $N = (p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m.\mathfrak{P}$ seyn und $(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m$ keinen Factor mit $\mathfrak{P}$ gemein haben soll; so ist zunächst gewiß, daß sich $\frac{M}{N}$ in zwey Partialbrüche zerlegen läßt, so daß, wenn man die Zähler derselben, die entweder constante Größen, oder ganze Functionen von z seyn müssen, durch Z und $\mathfrak{Z}$ bezeichnet,

$$\frac{M}{N} = \frac{Z}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}$$

seyn muß (§. 85.).

2) Nun setze man, es sey der Partialbruch

$$\frac{Z}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m} =$$

$$\frac{a + bz}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m} + \frac{a' + b'z}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^{m-1}} + \frac{a'' + b''z}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^{m-2}}$$

$$+ \ldots + \frac{a'''\cdots + b'''\cdots.z}{p^2 - 2pq \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2},$$

worinnen die Größen a, b, a', b', a'', b'' ꝛc. unbekannte und noch zu bestimmende Größen bedeuten; für diesen Ausdruck des erwähnten Partialbruchs verwandelt sich die Gleichung in Nro. 1. in folgende:

$$\frac{M}{N} = \frac{a + bz}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m} + \frac{a' + b'z}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^{m-1}}$$

$$+ \frac{a'' + b''.z}{(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.^2)^{m-2}} + \ldots$$

$$+ \frac{a'''\cdots + b'''\cdots.z}{p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}}.$$

Wenn man nun alle Brüche in der rechten Seite dieser Gleichung unter den gemeinschaftlichen Nenner $(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m.\mathfrak{P} = N$ bringt, und die Gleichung zwischen M und der Summe der Zähler der hierbey erhaltenen Brüche beybehält; so ergiebt sich die nachstehende Gleichung:

$$M = (a+bz)\mathfrak{P} + (a'+b'z)(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)\mathfrak{P} + (a''+b''.z)(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^2.\mathfrak{P}$$

$$+ \ldots + (a'''\cdots + b'''\cdots.z)(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^{m-1}.\mathfrak{P} + \mathfrak{Z}.(p^2 - 2pqz \operatorname{Cos}\varphi + q^2.z^2)^m,$$

aus welcher ferner



$$M-(a+bz)\mathfrak{P}-(a'+b'z)(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)\mathfrak{P}-(a''+b''.z)(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^2.\mathfrak{P}$$
$$-\ldots-(a'''\cdots+b'''\cdots.z)(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^{m-1}.\mathfrak{P}=\mathfrak{Z}(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^m \quad (\mathfrak{h})$$

und auch

$$\frac{M-(a+bz)\mathfrak{P}-(a'+b'z)(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)\mathfrak{P}+(a''+b''.z)(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^2.\mathfrak{P} - \ldots - (a'''\cdots+b'''\cdots.z)(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^{m-1}.\mathfrak{P}}{(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^m}$$

$=\mathfrak{Z}$ (δ) folgt. Vermittelst der beyden letzten Gleichungen aber kann man zur Bestimmung der Werthe a, b, a', b', a'', b'' ꝛc. gelangen.

3) Es ist gewiß, daß $\mathfrak{Z}$ eine constante Größe, oder eine ganze Function von z bedeutet (Nro. 1.), und darum muß man annehmen, der Dividendus des in der Gleichung (δ) stehenden Quotienten sey durch den Divisor $(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^m$, und also auch durch den Factor $p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2$ theilbar. Weil nun im Dividendus ein jedes von den der Differenz $M-(a+bz).\mathfrak{P}$ nachfolgenden Gliedern für sich durch $p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2$ theilbar ist, so muß bey dieser Annahme der Theilbarkeit des Dividendus ferner auch angenommen werden, daß die Differenz $M-(a+bz)\mathfrak{P}$ durch $p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2$ theilbar sey, daß mithin $M-(a+bz)\mathfrak{P}$ die Größe $p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2$ als Factor enthalte und für dieselben Werthe von z, für welche $p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2$ den Werth $=0$ erhält, $=0$ werde. Nun wird aber $p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2=0$, wenn man darin $z=\frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi\pm\mathrm{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})$ setzt; es muß also, für $z=\frac{p}{q}\times(\mathrm{Cos}\,\varphi\pm\mathrm{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})$ die Gleichung

$$M-(a+bz)\mathfrak{P}=0$$

Statt haben, aus welcher, wenn man den Zähler M und den Factor $\mathfrak{P}$ entwickelt darstellt, und die Werthe von z gehörig substituirt, dieselbe Gleichung wird, welche am Ende von Nro. 3. in §. 102. steht. Von nun an gelten also alle Schlüsse, vermittelst welcher in §. 102. und §. 104. aus der erwähnten Gleichung die Gleichungen für a und b abgeleitet worden sind, folglich auch die Regeln, nach welchen sich nach §. 104. die Größen a und b bestimmen lassen. Die Größen a und b werden also auf folgende Art erhalten:

"Man nehme aus dem Factor $(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi+q^2.z^2)^m$ die Werthe von "p, q, $\frac{p}{q}=r$, und $\mathrm{Cos}\,\varphi$, und bestimme aus $\mathrm{Cos}\,\varphi$ die Werthe von $\mathrm{Sin}\,\varphi$,

"Cos 2 φ, Sin 2 φ, Cos 3 φ, Sin 3 φ ꝛc.; hierauf setze man in dem Zähler M und "dem Factor $\mathfrak{P}$ statt z, z^2, z^3 ꝛc. die Werthe $r.\mathrm{Cos}\,\varphi$, $r^2.\mathrm{Cos}\,2\varphi$, $r^3.\mathrm{Cos}\,3\varphi$ ꝛc., "wodurch sich die beyden Größen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ ergeben; dann setze man auch in M und $\mathfrak{P}$ "statt z, z^2, z^3 ꝛc. die Werthe $r.\mathrm{Sin}\,\varphi$, $r^2.\mathrm{Sin}\,2\varphi$, $r^3.\mathrm{Sin}\,3\varphi$ ꝛc. wodurch man die "Werthe der Größen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ erhält; die so bestimmten Werthe von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ setze "man ferner mit den Werthen von Cos φ, Sin φ und r in die in §. 104. Nro. 4. stehen- "den Gleichungen für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$: so ergeben sich die Werthe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$."

4) Weil ferner $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ ein Factor von $M - (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}z)\mathfrak{P}$ seyn muß, und also der Quotient

$$\frac{M - (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}z)\mathfrak{P}}{p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2} \text{ eine ganze Function } = \mathfrak{A}$$

bedeutet, die sich jedesmal bestimmen läßt; so kann man statt der Größe $M - (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}z)\mathfrak{P}$ die Größe $\mathfrak{A}.(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)$ in der Gleichung (h) in Nro. 2. gebrauchen. Hierdurch erhält man alsdann eine in allen Gliedern durch $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ dividirbare Gleichung, die, wenn man die Division wirklich vornimmt, so aussieht:

$$\mathfrak{A} - (\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'z)\mathfrak{P} - (\mathfrak{a}''+\mathfrak{b}''z)(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)\mathfrak{P} - \ldots$$
$$-(\mathfrak{a}'''\cdots+\mathfrak{b}'''\cdots.z)(p^2-2pqz\mathrm{Cos}\varphi+q^2.z^2)^{m-2}\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}(p^2-2pqz\mathrm{Cos}\varphi+q^2.z^2)^{m-1}, \quad (\mathfrak{x})$$

und dieselbe Form hat, wie die Gleichung (h) in Nro. 2., vermittelst welcher sich die Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ finden ließen. Aus ihr sieht man wiederum, daß die Differenz $\mathfrak{A} - (\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'z)\mathfrak{P}$ durch $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ theilbar seyn, und daß mithin für die Werthe $z = \frac{q}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})$ die Gleichung

$$\mathfrak{A} - (\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'z)\mathfrak{P} = 0$$

Statt haben muß. Nimmt man nun die entwickelten Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$, und setzt darin statt z die Größe $\frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1})$; so ergiebt sich wiederum eine Gleichung, welche die Form der am Ende von Nro. 3. in §. 102. stehenden Gleichung hat, und vermittelst welcher man zu Gleichungen für $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ gelangen kann. Es lassen sich also, wie man sieht, die Größen $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ nach eben der Regel in Nro. 3. bestimmen, nach welchen die Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt wurden, und der einzige Unterschied, welcher bey der Bestimmung der Größen $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ Statt findet, besteht darinnen, daß man statt M die Function $\mathfrak{A}$ gebrauchen muß.

5) Weil

5) Weil ferner $\mathfrak{A} - (a' + b'z)\mathfrak{P}$ eine durch $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ theilbare Function ist, so muß auch wiederum der Quotient

$$\frac{\mathfrak{A} - (a' + b'z)\mathfrak{P}}{p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2} \text{ eine ganze Function } = \mathfrak{B}$$

geben, und es läßt sich demnach, wenn man diese Function $\mathfrak{B}$ wirklich berechnet, statt $\mathfrak{A} - (a' + b'z)\mathfrak{P}$ die Größe $\mathfrak{B}(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)$ in der Gleichung ($\mathfrak{k}$) gebrauchen, wodurch man eine Gleichung erhält, welche sich in allen Gliedern durch $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ dividiren läßt, und die, wenn man diese Division wirklich vornimmt, so aussieht:

$$\mathfrak{B} - (a'' + b''z)\mathfrak{P} - (a''' + b'''z)(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)\mathfrak{P} - \ldots$$
$$-(a'''^{\cdots} + b'''^{\cdots}.z)(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)^{m-3}.\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)^{m-2}, \quad (\mathfrak{l})$$

Diese hat abermals dieselbe Form, wie die Gleichung ($\mathfrak{h}$) in Nro. 2., aus welcher a und b bestimmt wurden, und ist ganz derselben Behandlung fähig. Aus ihr sieht man, daß die Größe $\mathfrak{B} - (a'' + b''z)\mathfrak{P}$ durch $p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2$ theilbar seyn, und daß also für $z = \frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})$ die Gleichung

$$\mathfrak{B} - (a'' + b''z)\mathfrak{P} = 0$$

Statt haben muß. Drückt man nun $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{P}$ in der letzten Gleichung entwickelt aus, und setzt in ihr statt z die Werthe $\frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi\sqrt{-1})$; so erhält man wieder eine der am Ende von Nro. 3. in §. 102. stehenden Gleichung ähnliche Gleichung, und es lassen sich also die Werthe von a'' und b'' eben so bestimmen, wie die Werthe der Größen a und b bestimmt werden müssen; der einzige Unterschied, welcher bey dieser Bestimmung Statt findet, besteht darinnen, daß man statt M die Function $\mathfrak{B}$ gebrauchen muß.

6) Es ist leicht einzusehen, daß sich auf die Art, wie die Größen a, b, a', b', a'', b'', bestimmt werden können, auch alle übrigen Größen a''', b''', a'''', b'''' 2c. bestimmen lassen müssen, und daß sich überhaupt eine allgemeine Regel für die Bestimmung der Werthe der Größen a, b, a', b' 2c. angeben läßt. Die Angabe dieser Regel und der Beweis für die Allgemeingültigkeit derselben kann hier übergangen werden. Nach derselben muß, wenn die nach geschehener Bestimmung des $(m-1)$ten. Paares der Größen a, b, a', b' 2c. berechnete ganze Function $\mathfrak{Q}$ genannt wird, die Gleichung, aus welcher sich das $m$te Paar der Größen a, b, a', b' 2c. finden läßt,

$$\mathfrak{Q} - (a'''^{\cdots} + b'''^{\cdots}.z)\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}.(p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)$$

heissen.

heissen. Hat man nun nach der Regel die Größen $a'''\cdots$ und $b'''\cdots$ bestimmt, so kann man auch vermittelst dieser Gleichung den Werth von $\mathfrak{Z}$ bestimmen, denn aus ihr folgt.

$$\frac{\mathfrak{Q} - (a'''\cdots + b'''\cdots . z)\,\mathfrak{P}}{p^2 - 2pqz\ \mathrm{Cos}\,\varphi + q^2 . z^2} = \mathfrak{Z}.$$

Da für alle die Größen a, b, a', b' ꝛc. jedesmal bestimmte und reelle Werthe gefunden werden müssen, so erhellt, daß der in Nro. 2. angegebene Ausdrück für den Partialbruch $\frac{Z}{(p^2 - 2pqz\ \mathrm{Cos}\,\varphi + q^2 . z^2)^m}$ allemal möglich ist. In dem folgenden §. soll das, was bisher gelehrt worden ist, auf eine bestimmte Function angewendet werden.

§. 109.

"Man soll für die nachstehende ächte gebrochene Function

$$\frac{M}{N} = \frac{z - z^5}{(1 + z^2)^4 \times (1 + z^4)},$$

"deren Nenner N die vierte Potenz des dreytheiligen Factors $1 + z^2$ enthält, und die "folglich dem hier folgenden Ausdrucke

$$\frac{a + bz}{(1+z^2)^4} + \frac{a' + b'z}{(1+z^2)^3} + \frac{a'' + b''}{(1+z^2)^2} + \frac{a''' + b'''.z}{1 + z^2} + \frac{\mathfrak{Z}}{1 + z^4} \qquad (k)$$

"gleichgesetzt werden kann, die Zähler dieser ihm zugehörigen Partialbrüche bestimmen."

1) Wenn man hier $(1 + z^2)^4$ mit $(p^2 - 2pqz\ \mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2)^m$ vergleicht; so findet man $p^2 = 1$, $2pq.\mathrm{Cos}\,\varphi = 0$, $q^2 = 0$. Also ist $p = 1$, $q = 1$, $\frac{p}{q}$ oder $r = 1$, $\mathrm{Cos}\,\varphi = 0$, $\varphi = 90°$, $\mathrm{Cos}\ 2\varphi = \mathrm{Cos}\ 180° = -1$, $\mathrm{Cos}\ 3\varphi = 270° = 0$, $\mathrm{Cos}\ 4\varphi = \mathrm{Cos}\ 360° = 1$ ꝛc. $\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Sin}\ 90° = 1$, $\mathrm{Sin}\ 2\varphi = \mathrm{Sin}\ 180° = 0$, $\mathrm{Sin}\ 3\varphi = \mathrm{Sin}\ 270° = -1$, $\mathrm{Sin}\ 4\varphi = \mathrm{Sin}\ 360° = 0$ ꝛc.

Wird ferner der Zähler $z - z^5$ mit dem in §. 102. allgemein ausgedrückten Zähler $M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ ꝛc. verglichen, so erhält man: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$ ꝛc.

Vergleicht man endlich den zweyten Factor von N, $\mathfrak{P} = 1 + z^4$ nehmlich, mit dem in §. 102. allgemein ausgedrückten Factor $\mathfrak{P} = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \ldots$, so erhält man: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$, $\zeta = 0$ ꝛc.

2) Für

2) Für die in Nro. 1. angegebenen Werthe ergeben sich nun, wenn man dieselben in den in §. 102. Nro. 4. stehenden Gleichungen gebraucht, die hier folgenden Werthe der Größen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$. Es ist

$$\mathfrak{F} = 0 + 1 \times 1 \times 0 + 0 \times 1^2 \times -1 + -1 \times 1^3 \times 0 = 0,$$
$$\mathfrak{f} = 1 \times 1 \times 1 + 0 \times 1^2 \times 0 + -1 \times 1^3 \times -1 = 2,$$
$$\mathfrak{G} = 1 + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 1^2 \times -1 + 0 \times 1^3 \times 0 + 1 \times 1^4 \times 1 = 2,$$
$$\mathfrak{g} = 0 \times 1 \times 1 + 0 \times 1^2 \times 0 + 0 \times 1^3 \times -1 + 1 \times 1^4 \times 0 = 0.$$

3) Werden diese Werthe der Größen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ mit den Werthen von r, $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ in den in §. 104. Nro. 4. stehenden Gleichungen I) und II) gebraucht; so erhält man:

$$\mathfrak{a} = \frac{0 \times 2 + 2 \times 0}{2^2 + 0^2} + \frac{(0 \times 0 - 2 . 2) \times 0}{(2^2 + 0^2) \times 1} = 0 + \frac{-4 . 0}{4} = 0,$$

$$\mathfrak{b} = \frac{-(0 \times 0 - 2 \times 2)}{(2^2 + 0^2) \times 1 \times 1} = \frac{4}{4} = 1.$$

4) Wird jetzt die Function $\mathfrak{X} = \frac{M - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} z)\mathfrak{P}}{p^2 - 2 p q z \cos \varphi + q^2 . z^2}$ (§. 108. Nro. 4.) berechnet, so erhält man:

$$\mathfrak{X} = \frac{z - z^5 - (0 + 1 \times z)(1 + z^4)}{1 + z^2} = \frac{z - z^5 - z - z^5}{1 + z^2} = \frac{-z^5 - z^5}{1 + z^2} = - z^5.$$

Diese Größe, mit $M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$ verglichen, giebt: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$ ꝛc., und nach §. 102. Nro. 4., ist also: $\mathfrak{F} = 0$, $\mathfrak{f} = 1$; die Größen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ aber behalten hier die vorigen Werthe. Demnach muß nach den Gleichungen I) und II) in §. 104. Nro. 4. seyn:

$$\mathfrak{a}' = \frac{0 \times 2 + 1 \times 0}{(2^2 + 0^2)} + \frac{(0 \times 0 - 2 \times 1) \times 0}{(2^2 + 0^2) \times 1} = 0 + 0 = 0$$

$$\mathfrak{b}' = \frac{-(0 \times 0 - 2 \times 1)}{(2^2 + 0^2) \times 1 \times 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5) Wird ferner die Function $\mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{X} - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' z)\mathfrak{P}}{p^2 - 2 p q z \cos \varphi + q^2 . z^2}$ (§. 108. Nr. 5.) berechnet, so erhält man:

$$\mathfrak{B} = \frac{-z^3 - (o + \frac{1}{2}z)(1 + z^4)}{1 + z^2} = \frac{-\frac{1}{2}z - z^5 - \frac{1}{2}z^6}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3$$

Diese Größe mit $M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$ verglichen, giebt: $A = o$, $B = \frac{1}{2}$, $C = o$, $D = -\frac{1}{2}$, $E = o$ ꝛc. Nach §. 102. Nro. 4., wird also $\mathfrak{F} = o$, $f = o$; die Größen $\mathfrak{G}$ und g aber behalten hier wiederum die vorigen Werthe. Demnach wird nach den Gleichungen I) und II) in §. 104. Nro. 4. seyn müssen:

$$a'' = \frac{o \times 2 + o \times o}{2^2 + o^2} + \frac{(o \times o - 2 \times o) \times o}{(2^2 + o^2) \times 1} = o + o = o,$$

$$b'' = \frac{-(o \times o - 2 \times o)}{(2^2 + o^2) \times 1 \times 1} = \frac{o}{4} = o.$$

6) Sucht man endlich die Function $\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B} - (a'' + b''z)\,\mathfrak{P}}{p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2}$ (§. 108.), so erhält man:

$$\mathfrak{C} = \frac{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3 - (o + o \times z)(1 + z^4)}{1 + z^2} = \frac{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z.$$

Wird nun diese Größe mit $M = A + Bz + Cz^2 + \ldots$ verglichen; so findet man: $A = o$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = o$ ꝛc.; es muß folglich nach §. 102. Nro. 4., die Größe $\mathfrak{F} = o$ und die Größe $f = -\frac{1}{2}$ seyn, die Werthe der Größen $\mathfrak{G}$ und g aber bleiben auch hier wiederum die vorigen. Demnach wird nach den Gleichungen I) und II) in §. 104. Nro. 4. seyn:

$$a''' = \frac{o \times 2 + -\frac{1}{2} \times o}{2^2 + o^2} + \frac{(o \times o - 2 \times -\frac{1}{2}) \times o}{(2^2 + o^2) \times 1} = o,$$

$$b''' = \frac{-(o \times o - 2 \times -\frac{1}{2})}{(2^2 + o^2) \times 1 \times 1} = \frac{-\frac{2}{2}}{4} = -\frac{1}{4}.$$

7) Nun bestimme man auch den Zähler $\mathfrak{Z}$. Nach §. 108. Nro. 6. ist der Zähler

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{C} - (a''' + b'''z)\,\mathfrak{P}}{p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos}\,\varphi + q^2.z^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}z - (o + -\frac{1}{4}z)(1 + z^4)}{1 + z^2} = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^3.$$

8) Setzt

8) Setzt man die bisher berechneten Werthe der Größen a, b, a', b', a'', b'', a''', b''', Z in den Ausdruck (k); so erhält man:

$$\frac{z - z^3}{(1+z^2)^4 \times (1+z^4)}$$
$$= \frac{z}{(1+z^2)^4} + \frac{z}{2(1+z^2)^3} - \frac{z}{4(1+z^2)} + \frac{z^3 - z}{4(1+z^4)}.$$

§. 110.

Noch ist zu bemerken, daß die in den beyden vorigen §. §. gelehrte Zerlegung auch alsdann Statt haben muß, wenn P kein Product aus mehreren einfachen Factoren von N bedeutet, sondern entweder = 1, oder ein einziger einfacher Factor von N ist. Dieses läßt sich ohne weitere Erläuterung leicht einsehen.

Im Falle P = 1 ist, so fällt $\frac{Z}{P}$ weg; ist aber P ein einfacher Factor von N, so ist $\frac{Z}{P}$ ein einfacher Partialbruch, mit welchem sich weiter keine Zerlegung mehr vornehmen läßt. Wenn P ein Product aus mehreren einfachen Factoren von N bedeutet, so muß man auch den Bruch $\frac{Z}{P}$ noch einer Zerlegung unterwerfen, sobald man alle für $\frac{M}{N}$ möglichen **reellen** Partialbrüche angeben will, diese Zerlegung aber kann jetzt mit $\frac{Z}{P}$ vorgenommen werden; es mag auch der Nenner P wie immer beschaffen seyn.

Wenn eine gebrochene Function $\frac{M}{N}$, deren Nenner N imaginäre Factoren enthält, zu den **unächten** gebrochenen Functionen gehört, so muß man, wenn man sie in die ihr zugehörigen **reellen** Partialbrüche auflösen will, zuerst die in ihr enthaltene **ganze** Function von ihr trennen, hernach aber die aus ihr entsprungene **ächte** gebrochene nach den bisherigen Lehren behandeln.

II) Die

II) Die irrationalen Functionen.

1) Von der Formation, deren die entwickelten irrationalen Functionen fähig sind.

---

§. 111.

Nach der über die irrationalen Functionen in §. 16. gegebenen Erklärung ist es nicht nöthig, daß ein **jedes** Glied einer irrationalen Function Z von z das Merkmal der Irrationalität enthalte; daher können in den **entwickelten** irrationalen Functionen, von welchen im Folgenden die Rede seyn soll, auch rationale Glieder vorkommen, und man kann sich jedesmal, wenn von dergleichen Functionen im Allgemeinen gesprochen wird, in ihnen **zwey** Theile vorstellen, einen **rationalen** nehmlich und einen **irrationalen**, von welchen der erste alle **rationalen** Glieder in sich begreift und entweder wirklich vorhanden oder auch = 0 seyn kann, der **zweyte** aber die **irrationalen** Glieder enthält und jedesmal als vorhanden gedacht werden muß, weil ohne ihn die Vorstellung einer irrationalen Function nicht Statt hat. Den ersten Theil setzen wir um der Kürze willen im Folgenden allemal auf die Seite und verstehen unter dem Ausdrucke, **irrationale** Function, jedesmal eigentlich blos den **irrationalen** Theil einer **irrationalen** Function.

§. 112.

"Es bedeute Z eine in irgend einer beliebigen Form vorgegebene **entwickelte** irra-"tionale Function von z. Eine solche Function Z muß entweder die Form der nachstehen-"den Function

$$az^{\frac{\mu}{\nu}} + bz^{\frac{\xi}{\omega}} + cz^{\frac{\pi}{\varrho}} + dz^{\frac{\sigma}{\tau}} + \ldots\ldots \qquad (h)$$

"schon haben, oder sie muß sich, wenn dieß der Fall nicht ist, auf diese Form zurückfüh-"ren lassen. Es bedeuten aber in der hier angegebenen Function (h) die Coefficienten "a, b, c . . . beliebige von z unabhängige Größen, die Exponenten $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\xi}{\omega}$, $\frac{\pi}{\varrho}$ . . . "beliebige von z unabhängige Brüche, und die Anzahl der Glieder der Function (h) soll "beliebig groß seyn."

1) Wollte man diesen Satz in seinem ganzen Umfange beweisen, so müßte man alle die möglichen verschiedenen speciellen Formen, in welchen **entwickelte** irrationale Functionen Z von z vorkommen können, nach einem gewissen Systeme aufzählen, und bey einer jeden

jeden dieser Formen besonders zeigen, daß die Behauptung des Lehrsatzes richtig sey. Dieses wäre nicht unmöglich, aber etwas weitläuftig, und darum wollen wir hier nur die **vornehmsten** Formen entwickelter irrationaler Functionen Z von z vornehmen und für sie den Beweis führen. Durch die Reductionen, welche wir hierbey zeigen müssen, wird man eine Anleitung erhalten, auch diejenigen Formen von Z, welche wir hier übergehen, ohne Anstoß auf die Form (k) zu reduciren und sich so den Beweis für die Behauptung des Lehrsatzes in jedem einzelnen Falle selbst zu führen.

2) Wir betrachten zunächst solche Formen von Z, bey welchen die absolut veränderliche Größe z den gebrochenen Potenzenexponenten **unmittelbar** unterworfen ist.

A) Es habe Z die Form $Az^{\frac{m}{n}}$, oder eine von den Formen der hier folgenden Functionen:

a) $Az^{\frac{m}{n}} \pm Bz^{\frac{o}{p}} \pm Cz^{\frac{q}{r}} \pm \ldots,$

b) $Az^{\frac{m}{n}} \times Bz^{\frac{o}{p}} \times Cz^{\frac{q}{r}} \times \ldots = ABC \times \ldots \times z^{\frac{mpr + noq + qnp + \ldots}{npr \times \ldots}},$

c) $Az^{\frac{m}{n}} : Bz^{\frac{o}{p}} = \frac{A}{B} \cdot z^{\frac{mp - no}{np}},$

d) $\left(Az^{\frac{m}{n}}\right)^r = A^r . z^{\frac{mr}{n}},$ e) $\sqrt[r]{Az^{\frac{m}{n}}} = A^{\frac{1}{r}} . z^{\frac{m}{nr}},$

welche durch die verschiedenen arithmetischen Operationen aus mehreren Functionen von der Form $Az^{\frac{m}{n}}$ entspringen.

Daß alle die hier angegebenen Formen von Z wirklich schon unter der Form (k) enthalten sind, dieß fällt hier sogleich in die Augen.

B) Es habe Z die Form einer der Functionen, welche durch die arithmetischen Operationen aus mehreren Functionen Z′ von der Form $Az^{\frac{m}{n}} \pm Bz^{\frac{o}{p}} \pm Cz^{\frac{q}{r}} \pm \ldots$ entspringen.

a) Durch die Addition und Subtraction mehrerer Functionen Z′ von der hier angegebenen Form entspringt keine Function Z, deren Form nicht unmittelbar unter der Form (k) enthalten wäre.

b) Durch

b) Durch die Multiplication der hier angegebenen Function Z′ mit mehreren Functionen von derselben Form entspringt eine Function Z, deren Form folgende ist:

$$\left(Az^{\frac{m}{n}} \pm Bz^{\frac{o}{p}} \pm \ldots\right)\left(A'z^{\frac{m'}{n'}} \pm B'z^{\frac{o'}{p'}} \pm \ldots\right)\left(A''z^{\frac{m''}{n''}} \pm B''z^{\frac{o''}{p''}} \pm \ldots\right)\ldots$$

Wenn man bey dieser Function Z der Ordnung nach die Glieder der Factoren in einander multiplicirt, so erhält man eine Reihe von Partialproducten, in welcher ein jedes Glied die Form des Products in Nro. A) b) hat. Weil nun die Form eines jeden dieser Producte mit der Form der Glieder der Function (h) übereinstimmt, so ist auch die hier betrachtete Function Z der Form (h) fähig.

c) Durch die Division der Function Z′ mit einer Function $\mathfrak{A}z^{\alpha}$, worin α eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl bedeuten kann, entspringt eine Function Z von der Form

$$\frac{Az^{\frac{m}{n}} \pm Bz^{\frac{o}{p}} \pm Cz^{\frac{q}{r}} \pm \ldots}{\mathfrak{A}z^{\alpha}}$$

Dividirt man nun ein jedes Glied des Dividendus wirklich mit dem erwähnten Divisor, so verwandelt sich die vorige Form von Z in folgende:

$$\frac{A}{\mathfrak{A}}z^{\frac{m}{n}-\alpha} \pm \frac{B}{\mathfrak{A}}z^{\frac{o}{p}-\alpha} \pm \frac{C}{\mathfrak{A}}z^{\frac{q}{r}-\alpha} \pm \ldots,$$

wofür man ferner

$$\frac{A}{\mathfrak{A}}z^{\frac{m-\alpha n}{n}} \pm \frac{B}{\mathfrak{A}}z^{\frac{o-\alpha p}{p}} \pm \frac{C}{\mathfrak{A}}z^{\frac{q-\alpha r}{r}} \pm \ldots$$

setzen kann, welcher Ausdruck die Form (h) hat.

d) Durch die Potenzenerhebung und Wurzelausziehung erhält man aus der Function Z′ eine Function Z von der Form

$$\left(Az^{\frac{m}{n}} \pm Bz^{\frac{o}{p}} \pm Cz^{\frac{q}{r}} \pm \ldots\right)^{\nu},$$

wo unter ν eine ganze und auch eine gebrochene Zahl verstanden werden soll.

Wenn man bey dieser Function Z alle gebrochenen Exponenten von z unter einerley Benennung bringt, und der Ordnung nach die dadurch erhaltenen Brüche $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ rc. nennt; so geht der vorige Ausdruck in folgenden über:

Az

$$\left(Az^{\frac{a}{k}} \pm Bz^{\frac{b}{k}} \pm Cz^{\frac{c}{k}} \pm \ldots\right)^{\nu}.$$

Setzt man nun ferner $z^{\frac{1}{k}} = y$, wodurch $z^{\frac{a}{k}} = y^a$, $z^{\frac{b}{k}} = y^b$ rc. wird; so erhält man:

$$(Ay^a \pm By^b \pm Cy^c \pm \ldots)^{\nu}.$$

Es kann aber der letztere Ausdruck nach §. 31. entwickelt und in eine nach Potenzen von y fortlaufende Reihe verwandelt werden. Nimmt man diese Entwickelung vor, und setzt hernach in die dadurch erhaltene Reihe statt y wiederum den Werth $= z^{\frac{1}{k}}$; so ergiebt sich für Z die Form (h).

C) Es habe ferner Z eine von den Formen der Functionen, welche aus mehreren Functionen Z′ von der Form

$$\left(Az^{\frac{m}{n}} \pm Bz^{\frac{o}{p}} \pm \ldots\right)\left(A'z^{\frac{m'}{n'}} \pm B'z^{\frac{o'}{p'}} \pm \ldots\right)\left(A''z^{\frac{m''}{n''}} \pm Bz^{\frac{o''}{p''}} \pm \ldots\right) \bowtie \ldots$$

durch die arithmetischen Operationen entspringen.

a) Durch die Addition und Subtraction mehrerer Functionen Z′ entspringt eine Function Z, in welcher ein jedes Glied nach Nro. B) b) auf die Form (h) zurückgeführt werden kann, und es ist also auch die Function Z der Form (h) fähig.

b) Durch die Multiplication mehrerer Functionen Z′ unter einander ergiebt sich eine Function Z, welche wieder die Form von Z′ hat, von der schon in Nro. B) b) gezeigt würde, daß sie der Form (h) fähig sey.

c) Durch die Division der Function Z′ mit einer Function $\mathfrak{A}z^{\alpha}$, in welcher α eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl seyn kann, entspringt eine Function Z, in welcher der Dividendus nach Nro. B) b) auf die Form (h) zurückgeführt werden kann und wodurch, wenn man dieß thut, Z die in Nro. B) c) angeführte Form erhält, von der erwiesen ist, daß sie sich auf die Form (h) bringen läßt.

d) Durch die Potenzenerhebung und Wurzelausziehung entspringt aus der Function Z′ eine Function Z von der Form

$$\left[\left(Az^{\frac{m}{n}} \pm Bz^{\frac{o}{p}} \pm \ldots\right) \bowtie \left(A'z^{\frac{m'}{n'}} \pm B'z^{\frac{o'}{p'}} \pm \ldots\right) \bowtie \ldots\right]^{\nu},$$

worin ν eine ganze oder gebrochene Zahl bedeuten soll.

Für

Für diese Function Z kann man auch folgenden Ausdruck:

$$\left(A z^{\frac{m}{n}} \pm B z^{\frac{o}{p}} \pm \ldots\right)^{\nu} \times \left(A' z^{\frac{m'}{n'}} \pm B' z^{\frac{o'}{p'}} \pm \ldots\right)^{\nu} \times \ldots$$

setzen. Da sich nun ein jeder Factor des letzten Ausdrucks nach Nro. B) d) auf die Form ($\mathfrak{h}$) reduciren läßt, so erhält man, wenn man diese Reduction wirklich vornimmt, für Z eine Form, die mit der Form Nro. B) b) einerley ist, von welcher dargethan wurde, daß sie auf die Form ($\mathfrak{h}$) gebracht werden könne.

D) Es habe Z die Form

$$\frac{\alpha + \beta z^{\frac{1}{k}} + \gamma z^{\frac{2}{k}} + \delta z^{\frac{3}{k}} + \varepsilon z^{\frac{4}{k}} + \ldots + \nu z^{\frac{r}{k}}}{1 + \mathfrak{a} z^{\frac{1}{k}} + \mathfrak{b} z^{\frac{2}{k}} + \mathfrak{c} z^{\frac{3}{k}} + \mathfrak{d} z^{\frac{4}{k}} + \ldots + \mathfrak{n} z^{\frac{r}{k}}}.$$

Durch die gewöhnlichen Regeln der Division muß sich diese Function in eine Reihe verwandeln lassen, welche die Form ($\mathfrak{h}$) hat. Es kann aber auch die Reduction vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten geschehen. Man setze nehmlich $z^{\frac{1}{k}} = y$, wodurch der vorige Ausdruck in folgenden:

$$\frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 + \ldots + \nu y^r}{1 + \mathfrak{a} y + \mathfrak{b} y^2 + \mathfrak{c} y^3 + \mathfrak{d} y^4 + \ldots + \mathfrak{n} z^r}$$

übergeht, diesen letzten Ausdruck aber setze man ferner nach §. 79., der Reihe

$$a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6 + hy^7 + \ldots \quad (\delta)$$

gleich; dann muß nach §. 79. Nro. 4. seyn:

$$\begin{aligned}
a &= \alpha, \\
b &= \beta - a.\mathfrak{a}, \\
c &= \gamma - b.\mathfrak{a} - a\mathfrak{b}, \\
d &= \delta - c.\mathfrak{a} - b\mathfrak{b} - a\mathfrak{c}, \\
e &= \varepsilon - d.\mathfrak{a} - c\mathfrak{b} - b\mathfrak{c} - a\mathfrak{d}, \\
f &= \zeta - e\mathfrak{a} - d\mathfrak{b} - c\mathfrak{c} - b\mathfrak{d} - a\mathfrak{e}, \\
g &= \eta - f\mathfrak{a} - e\mathfrak{b} - d\mathfrak{c} - c\mathfrak{d} - b\mathfrak{e} - a\mathfrak{f}, \\
h &= \vartheta - g\mathfrak{a} - f\mathfrak{b} - e\mathfrak{c} - d\mathfrak{d} - c\mathfrak{e} - b\mathfrak{f} - a\mathfrak{g},
\end{aligned}$$

u. s. w.

Sucht man nun aus diesen Coefficientengleichungen die von α, β, γ rc. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ rc. abhängigen Werthe der Coefficienten a, b, c rc., setzt sie in die Reihe

(δ)

(f) und nimmt dann in dem dadurch erhaltenen Ausdrucke statt y wiederum den Werth $z^{\frac{1}{k}}$ auf; so erhält man für Z einen Ausdruck, welcher die Form der Function (h) hat, in welcher der Exponent $\frac{\mu}{\nu}$ einen jeden Bruch, und also auch einen Bruch bedeuten kann, dessen Zähler $\mu = 0$ ist.

E) Es habe Z die Form

$$\frac{A + Bz^{\frac{o}{p}} + Cz^{\frac{q}{r}} + \ldots + Nz^{\frac{v}{w}}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\frac{o}{p}} + \mathfrak{C}z^{\frac{q}{r}} + \ldots + \mathfrak{N}z^{\frac{v}{w}}}.$$

Auch hier kann man durch Division eine Reihe erhalten, welche die Form (h) hat. Dividirt man aber im Divisor und Dividendus ein jedes Glied durch $\mathfrak{A}$, so geht der vorige Ausdruck von Z in folgenden über:

$$\frac{\frac{A}{\mathfrak{A}} + \frac{B}{\mathfrak{A}}z^{\frac{o}{p}} + \frac{C}{\mathfrak{A}}z^{\frac{q}{r}} + \ldots + \frac{N}{\mathfrak{A}}z^{\frac{v}{w}}}{1 + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{o}{p}} + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{q}{r}} + \ldots + \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{v}{w}}},$$

und dieser verwandelt sich ferner, wenn man alle Exponenten von z unter einerley Benennung bringt und die Exponenten im Zähler durch $\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \ldots \frac{n}{k}$, die im Nenner durch $\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \ldots \frac{n}{k}$ bezeichnet, in den nachstehenden:

$$\frac{\frac{A}{\mathfrak{A}} + \frac{B}{\mathfrak{A}}z^{\frac{a}{k}} + \frac{C}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b}{k}} + \ldots + Nz^{\frac{n}{k}}}{1 + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{a}{k}} + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b}{k}} + \ldots + \mathfrak{N}z^{\frac{n}{k}}},$$

woraus man sieht, daß die hier vorgegebene Function Z auch durch die Methode der unbestimmten Coefficienten in eine Function von der Form (h) umgeformt werden kann. Der letztere Ausdruck nehmlich, in welchem man die Glieder des Dividendus und auch die des Divisors so ordnen kann, daß die Potenzenexponenten der Größe nach von der linken gegen die rechte Hand wachsen, ist unter der Function

ction Z in Nro. D) enthalten, in welcher die Coefficienten mehrerer Glieder = o seyn können. Man darf also nur diesen Ausdruck nach Nro. D) in eine Reihe auflösen, und man erhält hierdurch für Z einen Ausdruck, welcher die Form (h) hat.

F) Es habe Z die Form

$$\frac{A z^{\frac{m}{n}} + B z^{\frac{o}{p}} + C z^{\frac{q}{r}} + \ldots + N z^{\frac{v}{w}}}{\mathfrak{A} z^{\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}} + \mathfrak{B} z^{\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}} + \mathfrak{C} z^{\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}} + \ldots + \mathfrak{N} z^{\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{w}}}}.$$

Hier kann man ebenfalls durch die Division für Z den Ausdruck erhalten, welcher die Form (h) hat, man kann aber auch durch die Beobachtung folgender Regeln zu demselben gelangen.

Man ordne alle Glieder des Dividendus und Divisors so, daß die Potenzenexponenten von der linken gegen die rechte Hand wachsen. Wir wollen hier setzen, es sey dieß schon geschehen und es sey also $\frac{m}{n} < \frac{o}{p}$, $\frac{o}{p} < \frac{q}{r}$ ꝛc. und auch $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} < \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$, $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}} < \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$ ꝛc.

Ferner bringe man alle Exponenten im Dividendus und Divisor unter einerley Benennung, wodurch, wenn man die hierbey erhaltenen Brüche $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k} \ldots \frac{n}{k}$ und $\frac{a'}{k}$, $\frac{b'}{k} \ldots \frac{n'}{k}$ nennt, der vorige Ausdruck in folgenden übergeht:

$$\frac{A z^{\frac{a}{k}} + B z^{\frac{b}{k}} + C z^{\frac{c}{k}} + \ldots + N z^{\frac{n}{k}}}{\mathfrak{A} z^{\frac{a'}{k}} + \mathfrak{B} z^{\frac{b'}{k}} + \mathfrak{C} z^{\frac{c'}{k}} + \ldots + \mathfrak{N} z^{\frac{n'}{k}}}.$$

Jetzt sehe man nach, ob $\frac{a}{k} > \frac{a'}{k}$ oder $< \frac{a'}{k}$ ist. Im Falle ersteres Statt findet, so dividire man alle Glieder im Dividendus und Divisor durch $\mathfrak{A} z^{\frac{a'}{k}}$; durch welche Operation der vorige Ausdruck in folgenden übergeht:

$$(\text{♁})\qquad \frac{\frac{A}{\mathfrak{A}}z^{\frac{a-a'}{k}}+\frac{B}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b-a'}{k}}+\ldots+\frac{N}{\mathfrak{A}}z^{\frac{n-a'}{k}}}{1+\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b'-a'}{k}}+\ldots+\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{n'-a'}{k}}},$$

worin alle Exponenten bejahte Brüche sind. Ist aber $\frac{a}{k} < \frac{a'}{k}$, so dividire man im vorletzten Ausdrucke alle Glieder durch $\mathfrak{A}z^{\frac{a}{k}}$, wodurch aus jenem Ausdrucke folgender wird:

$$(\text{♀})\qquad \frac{\frac{A}{\mathfrak{A}}+\frac{B}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b-a}{k}}+\ldots+\frac{N}{\mathfrak{A}}z^{\frac{n-a}{k}}}{z^{\frac{a'-a}{k}}+\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b'-a}{k}}+\ldots+\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{n'-a}{k}}}.$$

Den Ausdruck (♁), welcher die Form der Function in Nro. D) hat, löse man ferner vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten auf. Den Ausdruck (♀) aber nehme man, und trenne im Divisor den Factor $z^{\frac{a'-a}{k}}$, wodurch er folgende Gestalt erhält:

$$\frac{\frac{A}{\mathfrak{A}}+\frac{B}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b-a}{k}}+\ldots+\frac{N}{\mathfrak{A}}z^{\frac{n-a}{k}}}{\left(1+\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{b'-a'}{k}}+\ldots+\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}}z^{\frac{n'-a'}{k}}\right)z^{\frac{a'-a}{k}}}.$$

Hierauf lasse man den Factor $z^{\frac{a'-a}{k}}$ weg, und verwandele den übrig bleibenden Ausdruck nach Nro. D) in eine Reihe, in dieser aber dividire man, wenn man sie erhalten hat, ein jedes Glied durch $z^{\frac{a'-a}{k}}$.

G) Es habe die Function Z entweder die Form in Nro. E) oder die Form in Nro. F), unter den gebrochenen Potenzenexponenten aber seyen einige negativ.

Auch hier kann man wiederum die Function Z durch die gewöhnliche Division auf die Form (k) zurückführen, in welchen die gebrochenen Potenzenexponenten

bejahte oder verneinte Brüche bedeuten. Man kann aber auch eine solche Function Z auf folgende Art reduciren. Man multiplicire alle Glieder im Dividendus und Divisor mit einer solchen Potenz von z, wodurch die Potenzenexponenten bejahte Brüche werden, und zwar nehme man hier um der Kürze willen diejenige Potenz von z, die entsteht, wenn man aus der Function Z die Potenz heraussucht, deren verneinter Potenzenexponent der größte ist, und diesen bejaht nimmt. Hierdurch wird der Werth von Z nicht verändert, die Form aber wird einer der Formen in Nro. E) und Nro. F) vollkommen gleich, und es kann also auch alsdann Z nach Nro. E) und F) behandelt werden.

H) Es habe Z die Form

$$\frac{\left(Az^{\frac{m}{n}} + Bz^{\frac{o}{p}} + Cz^{\frac{q}{r}} + \dots + Nz^{\frac{v}{w}}\right)^{k}}{\left(\mathfrak{A}z^{\frac{m}{n}} + \mathfrak{B}z^{\frac{o}{p}} + \mathfrak{C}z^{\frac{q}{r}} + \dots + \mathfrak{N}z^{\frac{v}{w}}\right)^{\mathfrak{k}}},$$

worin die Exponenten k und $\mathfrak{k}$ ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahlen bedeuten können.

Hier läßt sich der Dividendus und auch der Divisor nach Nro. B) d) entwickeln, wodurch man, wenn dieses geschieht, eine Function erhält, welche eine der Formen in Nro. E), F), G) hat. Diese kann man aber auf die Form ($\mathfrak{h}$) reduciren, es ist also auch gewiß die hier vorgegebene Function Z der Form ($\mathfrak{h}$) fähig.

3) Nun sollen auch die vornehmsten Formen derjenigen entwickelten irrationalen Functionen betrachtet werden, in welchen die absolut veränderliche Größe z blos mittelbar gebrochenen Potenzenexponenten unterworfen ist.

A) Es habe Z die Form

$$\left(A + Bz + Cz^{2} + Dz^{3} + \dots + Nz^{r}\right)^{\frac{m}{n}},$$

oder die Form einer von denjenigen Functionen, welche aus dieser hier angegebenen Function entspringen.

a) Die Function $\left(A + Bz + Cz^{2} + Dz^{3} + \dots + Nz^{r}\right)^{\frac{m}{n}}$ läßt sich nach §. 31. Nro. 16. entwickeln und die Function, welche sich durch diese Entwickelung ergiebt, ist ganz gewiß eine Function von der Form ($\mathfrak{h}$).

b) Durch



b) Durch die Addition und Subtraction mehrerer Functionen von der Form

$$(A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{m}{n}}$$

erhält man eine Function Z, in der ein jedes Glied, nach Nro. a) entwickelt, eine Function von der Form (h) giebt; also ist diese Function Z der Form (h) fähig.

c) Durch die Multiplication mehrerer Functionen von der Form

$$(A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{m}{n}}$$

erhält man eine Function Z von der Form

$$(A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{m}{n}} \times (A' + B'z + C'z^2 + \ldots + N'z^r)^{\frac{m'}{n'}} \times \ldots$$

Da sich in dieser ein jeder Factor nach Nro. a) entwickeln läßt, und eine Function von der Form (h) giebt; so entspringt, wenn man diese Entwickelung vornimmt, eine Function, welche die Form in Nro. 2) B) b) hat. Da nun eine Function von einer solchen Form auf die Form (h) zurückgeführt werden kann, so sieht man, daß auch die hier betrachtete Function Z der Form (h) fähig ist.

d) Durch die Division der Function

$$(A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{m}{n}}$$

mit dem Divisor $\mathfrak{A} z^a$, worin a eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeuten kann, entsteht eine Function z von der Form

$$(A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{m}{n}} : \mathfrak{A} z^a$$

und diese enthält, wenn man den Dividendus nach Nro. a) entwickelt, die Form der Function in Nro. 2) B) c), von welcher gezeigt wurde, daß sie der Form (h) fähig sey. Also kann Z auf die Form (h) gebracht werden.

e) Durch die Potenzenerhebung und Wurzelausziehung entsteht aus der Function

$$(A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{m}{n}}$$

eine Function Z von derselben Form, denn es ist, es mag v eine ganze oder eine gebrochene Zahl seyn,

$$\left((A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{m}{n}}\right)^v = (A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r)^{\frac{mv}{n}},$$

und die Form dieses letzten Ausdruckes ist nach Nro. a) der Form (h) fähig.

B) Es

B) Es habe Z die Form

$$\left(\left(A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^r\right)^{\frac{m}{n}} \pm \left(A' + B'z + C'z^2 + \ldots + N'z^r\right)^{\frac{v}{s}} \pm \ldots\right)^{\mu},$$

worin μ eine ganze oder eine gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl bedeuten kann.

Hier läßt sich zuerst ein jedes Glied der in der Hauptklammer stehenden Größe nach Nro. a) entwickeln, und man erhält dabey für ein jedes Glied eine Function von der Form (k). Es muß folglich auch die algebraische Summe aller Functionen, welche auf diese Art aus den erwähnten Gliedern entspringen, eine Function seyn, welche die Form (k) hat. Daraus sieht man, daß die hier vorgegebene Function Z auf eine Function zurückgeführt werden kann, welche die Form der Function in Nro. 2. B) d) hat, von der erwiesen wurde, daß sie der Form (k) fähig sey. Also ist Z der Form (k) fähig.

§. 113.

Es sollen hier einige von den in dem vorigen §. gezeigten Reductionen auf bestimmte Functionen angewendet werden.

I) Die Function $(1 - z^{\frac{2}{3}})(z + z^{\frac{1}{2}})z^{\frac{2}{3}}$ giebt, wenn man sie nach §. 112. Nro. 2. B) b) auf die Form (k) zurückführt,

$$z^{\frac{7}{3}} - z^{\frac{81}{31}} + z^{\frac{9}{16}} - z^{\frac{47}{36}}.$$

II) Die Function $\dfrac{z^{\frac{2}{3}} - 8z^{-\frac{3}{5}} + 6z}{3z^{\frac{1}{2}}}$ giebt, wenn man sie nach §. 112. Nro. 2. B) c) in der Form (k) darstellt, folgendes:

$$\frac{1}{3}z^{\frac{1}{6}} - \frac{8}{3}z^{-\frac{11}{10}} + 2z^{\frac{1}{2}}.$$

III) Für die Reduction der Function

$$\left(3z^{\frac{1}{12}} + 12z^{\frac{1}{6}} + 5z^{\frac{1}{3}} + 9z^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

ist die Rechnung nach §. 112. Nro. 2. B) d) folgende:

Es

Es ist

$$\left(3z^{\frac{1}{12}}+12z^{\frac{1}{6}}+5z^{\frac{1}{3}}+9z^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(3z^{\frac{1}{12}}+12z^{\frac{2}{12}}+5z^{\frac{4}{12}}+9z^{\frac{6}{12}}+3z^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

oder auch, wenn man die Größe $z^{\frac{1}{12}}$ durch y ausdrückt,

$$=(3y+12y^2+5y^4+9y^6+3y^7)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left[\frac{3y\cdot(3y+12y^2+5y^4+9y^6+3y^7)}{3y}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$=3^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot\left(1+4y+\frac{5}{3}y^3+3y^5+y^6\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Nun entwickele man nach §. 31. Nro. 16. die Potenz $\left(1+4y+\frac{5}{3}y^3+3y^5+y^6\right)^{\frac{2}{3}}$. Weil hier $k=4$, $k'=0$, $k''=\frac{5}{3}$, $k'''=0$, $k^{v}=3$, $k^{VI}=1$, $k^{VII}=0$, $k^{VIII}=0$ ꝛc. ist; so muß nach den daselbst angegebenen Coefficientengleichungen seyn:

$$K'=\frac{2}{3}.4=\frac{8}{3}=\frac{8}{1.3},$$

$$K''=\frac{(\frac{2}{3}-1).4.\frac{8}{3}+2.\frac{2}{3}.0}{2}=\frac{-\frac{4}{3}.\frac{8}{3}}{2}=-\frac{32}{1.2.3^2},$$

$$K'''=\frac{(\frac{2}{3}-2).4.\frac{-32}{1.2.3^2}+(2.\frac{2}{3}-1).0.\frac{8}{3}+3.\frac{2}{3}.\frac{5}{3}}{3}$$

$$=\frac{\frac{16}{3}.\frac{32}{1.2.3^2}+\frac{10}{3}}{3}=\frac{692}{1.2.3.3^3},$$

$$K''''=\frac{(\frac{2}{3}-4)4.\frac{692}{1.2.3.3^3}+(2.\frac{2}{3}-2).0.\frac{-32}{1.2.3^2}+(3.\frac{2}{3}-1).\frac{5}{3}.\frac{8}{1.3}+4.\frac{2}{3}.0}{4}$$

$$=\frac{\frac{-28}{3}.\frac{692}{1.2.3.3^3}+\frac{5}{3}.\frac{8}{3}}{4}=\frac{-19256}{1.2.3.4.3^4}$$

$K^{v}=$

$$\mathfrak{K}^{v} = \frac{(\frac{2}{3} - 4).4.\frac{-19256}{1.2.3.4.3^4} + (2.\frac{2}{3} - 3).0.\frac{692}{1.2.3.2^3} + (3.\frac{2}{3} - 2).\frac{5}{3}.\frac{-32}{1.2.3^2}}{5}$$

$$+ \frac{(4.\frac{2}{3} - 1).0.\frac{8}{1.3} + 5.\frac{2}{3}.3}{5}$$

$$= \frac{\frac{40}{3}.\frac{19256}{1.2.3.4.3^4} + \frac{39}{3}}{5} = \frac{828560}{1.2.3.4.5.3^6}$$

u. s. w.

Folglich ist $(1 + 4y + \frac{5}{3}y^3 + 3y^5 + y^6)^{\frac{2}{3}}$

$$= 1 + \frac{8}{1.3}y - \frac{32}{1.2.3^2}y^2 + \frac{692}{1.2.3.3^3}y^3 - \frac{19256}{1.2.3.4.3^4}y^4$$

$$+ \frac{828560}{1.2.3.4.5.3^5}y^6 - \ldots$$

Setzt man wieder statt y die Größe $z^{\frac{1}{12}}$ und multiplicirt die dadurch erhaltene Reihe mit $3^{\frac{2}{3}}.y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}.(z^{\frac{1}{12}})^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}.z^{\frac{1}{18}}$; so erhält man für die Function

$$(3z^{\frac{1}{12}} + 12z^{\frac{1}{6}} + 5z^{\frac{1}{3}} + 9z^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{7}{12}})^{\frac{2}{3}}$$

den Ausdruck:

$$3^{\frac{2}{3}}.z^{\frac{1}{18}}(1 + \frac{8}{1.3}z^{\frac{1}{12}} - \frac{32}{1.2.3^2}z^{\frac{2}{12}} + \frac{692}{1.2.3.3^3}z^{\frac{3}{12}} - \frac{19256}{1.2.3.4.3^4}.z^{\frac{4}{12}} + \frac{828560}{1.2.3.4.5.3^5}z^{\frac{5}{12}} - \ldots)$$

$$= 3^{\frac{2}{3}}.z^{\frac{1}{18}} + \frac{8}{1}.3^{-\frac{1}{3}}.z^{\frac{1}{12}+\frac{1}{18}} - \frac{32}{1.2}.3^{-\frac{4}{3}}.z^{\frac{2}{12}+\frac{1}{18}} + \frac{693}{1.2.3}.3^{-\frac{7}{3}}.z^{\frac{3}{13}+\frac{1}{18}}$$

$$- \frac{19256}{1.2.3.4}.3.^{-\frac{10}{3}}.z^{\frac{4}{12}+\frac{1}{18}} + \ldots$$

Hier kann man noch, wenn man will, die Potenzenexponenten von z, welche Summen aus verschiedenartigen Brüchen sind, in einfache Brüche verwandeln, und hierdurch erhält dann der Ausdruck vollkommen die Form (h) in §. 112.

IV) Die

IV) Die Rechnung für die Reduction der Function $\frac{1-z}{1-z^{\frac{1}{2}}+2z^2}$ auf die Form (k) ist nach §. 112. Nro. 2. D) folgende:

Wenn man $z^{\frac{1}{2}} = y$ setzt, so verwandelt sich die hier vorgegebene Function in diese: $\frac{1-y^2}{1-y+2y^4}$. Vergleicht man nun diese Function mit der in §. 112. Nro. 2. D) angegebenen, und setzt $\frac{1-y^2}{1-y+2y^4} = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6 + \ldots$; so muß, weil hier $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, $\delta = 0$ rc. $\mathfrak{a} = -1$, $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{c} = 0$, $\mathfrak{d} = 2$, $\mathfrak{e} = 0$ rc. ist, nach den am angeführten Orte stehenden Coefficientengleichungen seyn:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 0,\ d = 0,\ e = -2,\ f = -4 \text{ rc.}$$

Also ist $\frac{1-y^2}{1-y+2y^4} = 1 + 1.y + 0.y^2 + 0.y^3 - 2y^4 - 4y^5 \pm \ldots$ oder, wenn man wiederum statt y den Werth $z^{\frac{1}{2}}$ setzt,

$$\frac{1-z}{1-z^{\frac{1}{2}}+2z^2} = 1 + z^{\frac{1}{2}} + 0.z^{\frac{2}{2}} + 0.z^{\frac{3}{2}} - 2z^{\frac{4}{2}} - 4z^{\frac{5}{2}} \pm \ldots$$

$$= 1 + z^{\frac{1}{2}} - 2z^{\frac{4}{2}} - 4z^{\frac{5}{2}} \pm \ldots$$

V) Eben so wird nach §. 112. Nro. 2. D) die Function $\frac{3+2z^{\frac{1}{3}}}{1-4z^{\frac{1}{2}}+z}$ auf die Form (k) reducirt. Es ist

$$\frac{3+2z^{\frac{1}{3}}}{1-4z^{\frac{1}{2}}+z} = \frac{3+2z^{\frac{2}{6}}}{1-4z^{\frac{3}{6}}+z^{\frac{6}{6}}},$$

und der letzte Ausdruck verwandelt sich, wenn man $z^{\frac{1}{6}} = y$ setzt, in folgenden:

$$\frac{3+2y^2}{1-4y^3+y^6}$$

Weil nun diese Function, mit der in §. 112. Nro. 2. D) stehenden Function verglichen, $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$, $\delta = 0$ ꝛc. $a = 0$, $b = 0$, $c = -4$, $d = 0$, $e = 0$, $f = 1$, $g = 0$ ꝛc. giebt; so muß, wenn man dieselbe dem nachstehenden Ausdrucke:

$$a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6 + \ldots$$

gleich setzt, nach den am angeführten Orte angegebenen Coefficientengleichungen $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 12$, $e = 0$, $f = 8$, $g = 45$ ꝛc. und mithin

$$\frac{3 + 2y^2}{1 - 4y^3 + y^6} = 3 + 0.y + 2y^2 + 12y^3 + 0.y^4 + 8y^5 + 45y^6 + \ldots$$

seyn. Demnach ist, wenn wiederum statt y der Werth $z^{\frac{1}{6}}$ gesetzt wird, die Function

$$\frac{3 + 2z^{\frac{1}{3}}}{1 - 4z^{\frac{1}{2}} + z} = 3 + 2z^{\frac{1}{3}} + 12z^{\frac{1}{2}} + 8z^{\frac{5}{6}} + 45z + \ldots$$

§. 114.

Da alle entwickelten irrationalen Functionen Z von z, welche die Form der Function

$$az^{\frac{\mu}{\nu}} + bz^{\frac{\xi}{\omega}} + cz^{\frac{\pi}{\rho}} + dz^{\frac{\sigma}{\tau}} + \ldots \qquad (k)$$

nicht schon haben, doch auf diese Form zurückgebracht werden können; so muß diese als eine **allgemeine** Form der entwickelten irrationalen Functionen betrachtet werden (§. 36.), und eben darum muß auch alles, was von der Function (k) erwiesen werden kann, von allen nur immer denkbaren entwickelten irrationalen Functionen Z von z gültig seyn (§. 38.).

§. 115.

Den bisherigen Lehren von der allgemeinen Form der entwickelten irrationalen Functionen Z von z wollen wir noch eine andere beyfügen, die ebenfalls eine Formation dieser Functionen zum Gegenstande hat.

Entwickelte irrationale Functionen Z von z können so beschaffen seyn, daß sich in der Reihe der rationalen Werthe der absolut veränderlichen Größe z Werthe z', z'', z''' ꝛc. finden, für welche die Werthe von Z, insoferne dieselben von z abhängen, **rational** werden müssen. Man nehme z. E. die Function $Z = \sqrt{(60 + 5z)}$, diese erhält für

$z =$

$z = -7$, $z = 8$, $z = 33$ rc. und überhaupt für alle diejenigen Werthe von z, für welche die Größe $60 + 5z$ ein vollkommenes Quadrat wird, **rationale** Werthe.

Wenn nun bey dergleichen irrationalen Functionen Z die Frage entsteht, welches alle die Werthe z', z'', z''' rc. der absolut veränderlichen Größe z sind, für welche die Werthe von Z **rational** werden müssen; so muß man dieselben anzugeben wissen. Dieses kann, wie wir zeigen werden, bey sehr vielen entwickelten irrationalen Functionen Z von z geschehen, indem man jedesmal für eine bestimmt vorgegebene Function Z dieser Art eine andere rationale Function X von x aufsucht, welche die Eigenschaft hat, daß, wenn man sie an die Stelle der absolut veränderlichen Größe z in die Function Z setzt, durch diese Substitution die in Z befindliche Irrationalität aufgehoben wird. Setzt man nehmlich, wenn man für eine gewisse Function Z eine solche Function X gefunden hat, dieselbe $= z$; so kann man aus derselben für einen jeden rationalen Werth von x einen bestimmten rationalen Werth $X = z$ finden, für welchen der Werth von Z ebenfalls **rational** seyn muß, und es ist also eine solche Function X alsdann eine vermittelnde Function, durch welche man alle rationalen Werthe z', z'', z''' rc. der absolut veränderlichen Größe z zu bestimmen im Stande ist, welchen **rationale** Werthe der irrationalen Function Z zugehören. Man kann eine solche Function X von x die **Hülfsfunction** von Z nennen.

Die Umänderung, welche man mit einer entwickelten irrationalen Function Z von z vornimmt, wenn man in ihr statt z die ihr zugehörende Hülfsfunction X von x setzt, und die darin besteht, daß man Z als eine **irrationale** Function von z in eine **rationale** Function von x umformt, nennt man die **Transformation durch Substitution.**

§. 116.

"Für eine jede entwickelte irrationale Function Z von z, welche die Form der hier "folgenden Function:

$$a z^{\frac{\mu}{\nu}} + b z^{\frac{\xi}{\omega}} + c z^{\frac{\pi}{\rho}} + d z^{\frac{\sigma}{\tau}} + \ldots \qquad (k),$$

"in der die Anzahl der Glieder **endlich groß** gedacht werden soll, entweder schon hat, "oder doch, wenn man sie auf diese Form reducirt, keine **unendlich große** Anzahl "von Gliedern erhält, ist eine **Hülfsfunction** angebbar; man kann sie also durch "Substitution transformiren und alle Werthe z', z'', z''' rc. der absolut veränderlichen "Größe z bestimmen, für welche die Werthe von Z **rational** seyn müssen.

1) Man

1) Man kann jedesmal die gebrochenen Potenzenexponenten in der Function Z, welche in der Form (k) dargestellt ist, unter einerley Benennung bringen, man erhält alsdann:

$$Z = a z^{\frac{\mu\omega\varsigma\tau \times \ldots}{\nu\omega\varsigma\tau \times \ldots}} + b z^{\frac{\xi\nu\varsigma\tau \times \ldots}{\omega\nu\varsigma\tau \times \ldots}} + c z^{\frac{\pi\nu\omega\tau \times \ldots}{\varsigma\nu\omega\tau \times \ldots}} + d z^{\frac{\sigma\nu\omega\varsigma \times \ldots}{\tau\nu\omega\varsigma \times \ldots}} + \ldots$$

In diesem Ausdrucke aber sind, weil nach der Voraussetzung die in der Form (k) dargestellte Function Z nur eine **endlich große** Anzahl von Gliedern enthalten soll, die Potenzenexponenten vollkommen bestimmte Brüche.

Setzt man nun in demselben $z^{\frac{1}{\nu\omega\varsigma\tau \times \ldots}} = x$, wo alsdann $z = x^{\nu\omega\varsigma\tau \times \ldots}$ seyn muß; so wird $z^{\frac{\mu\omega\varsigma\tau \times \ldots}{\nu\omega\varsigma\tau \times \ldots}} = x^{\mu\omega\varsigma\tau}$, $z^{\frac{\xi\nu\varsigma\tau \times \ldots}{\omega\nu\varsigma\tau \times \ldots}} = x^{\xi\nu\varsigma\tau \times \ldots}$ ꝛc., und also

$$Z = a x^{\mu\omega\varsigma\tau \times \ldots} + b x^{\xi\nu\varsigma\tau \times \ldots} + c x^{\pi\nu\omega\tau \times \ldots} + d x^{\sigma\nu\omega\varsigma \times \ldots} + \ldots;$$

in diesem Ausdrucke aber ist nun keine Irrationalität mehr vorhanden.

2) Also giebt es für die im Lehrsatze genannten Functionen Z jedesmal eine Hülfsfunction $X = x$, vermittelst welcher man für einen jeden Werth von x einen Werth von z, der $= X = x^{\nu\omega\varsigma\tau \times \ldots}$ ist, entdecken kann, für welchen Z rational werden muß.

§. 117.

"Auch unter den entwickelten irrationalen Functionen Z von z, die, wenn man sie "auf die Form (k) reduciren wollte, eine **unendlich große** Anzahl von Gliedern erhal- "ten würden, giebt es mehrere, für welche man eine Hülfsfunction X angeben kann, und "bey welchen also die Transformation durch Substitution und die Bestimmung derjenigen "Werthe z', z'', z''' ꝛc. der absolut veränderlichen Größe z möglich ist, denen rationale "Werthe von Z entsprechen."

1) Es sey $Z = (a + b z)^{\frac{m}{n}}$ gegeben. Hier sieht man leicht ein, daß diese Function gewiß für alle Werthe von z rationale Werthe erhalten muß, für welche $a + bz$ eine nte Potenz irgend einer Größe x wird. Man setze also $a + bz = x^n$, dann erhält man:

man: $bz = x^n - a$ und $z = \frac{x^n - a}{b}$. Hierfür wird $Z = \left(a + b.\frac{x^n - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$ $= \left(a + x^n - a\right)^{\frac{m}{n}} = x^m$. Es läßt sich also die Function $Z = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$ durch Substitution transformiren und die Hülfsfunctionen X, wodurch dieses geschehen kann, ist $= \frac{x^n - a}{b}$. Aus dieser erhält man für einen jeden Werth von x einen Werth X, für welchen, wenn man ihn statt z in Z gebraucht, die Function Z einen rationalen Werth $= x^m$ erhält.

2) Es sey $Z = \left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right)^{\frac{m}{n}}$. Diese Function wird gewiß für alle Werthe von z **rational** werden, für welche die Größe $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}$ eine nte Potenz irgend einer Größe x ist.

Man setze also die Function $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z} = x^n$, und suche nun die Größe z.

Man erhält: $a + bz = x^n.(\alpha + \beta z)$ und $\frac{a - \alpha x^n}{\beta x^n - b} = z$.

Weil nun für diesen Werth von z jedesmal die Größe $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z} = x^n$, und also die Function $Z = \left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(x^n\right)^{\frac{m}{n}} = x^m$, mithin rational werden muß; so erhellet, daß sie der Transformation durch Substitution fähig und daß die Function $\frac{a - \alpha x^n}{\beta x^n - b}$ diejenige Function X ist, durch welche diese Transformation geschehen kann und aus welcher sich für rationale Werthe von x alle die rationalen Werthe z′, z″, z‴ ꝛc. der absolut veränderlichen Größe z ableiten lassen, für welche die Function $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}$ rationale Werthe erhalten muß.

3) Es sey ferner $Z = [(a + bz)(\alpha + \beta z)]^{\frac{1}{2}}$. Hier kann man zwar keine rationale Function X angeben, durch welche, wenn man sie statt z in die Function Z setzte, die Irrationalität weggeschaft würde, denn der einzige Werth von z, für welchen Z hier **rational** werden kann, ist der, bey welchem der Factor $a + bz$ dem Factor

$\alpha + \beta z$ gleich, und also die Größe $(a + bz)(\alpha + \beta z)$ ein vollkommenes Quadrat wird, welcher Werth von z aus der Gleichung

$$a + bz = \alpha + \beta z$$

folgt und $= \frac{a - \alpha}{\beta - b}$ ist; aber eine rationale Function Z′ von x und z läßt sich angeben, für welche, wenn man sie der irrationalen Function Z gleich setzt, bey einem jeden Werthe von x ein rationaler Werth von z Statt hat, der dieser Gleichsetzung ein Genüge leistet, und diese Function Z′ ist $= (a + bz)x$. Setzt man nehmlich

$$[(a + bz)(\alpha + \beta z)]^{\frac{1}{2}} = (a + bz)x,$$

so muß dann $(a + bz)(\alpha + \beta z) = (a + bz)^2 . x^2$, und folglich auch

$$\alpha + \beta z = (a + bz)x^2$$

seyn, welche Gleichung als eine einfache Gleichung für z den rationalen und durch x bestimmten Werth $z = \frac{\alpha - ax^2}{bx^2 - \beta}$ giebt. Setzt man diesen in den Ausdruck $(a + bz)x$, so sieht man, daß die vorgegebene Function $[(a + bz)(\alpha + \beta z)]^{\frac{1}{2}} = \left[a + b\frac{\alpha - ax^2}{bx^2 - \beta}\right]x$ $= \frac{\alpha b - \alpha\beta}{bx^2 - \beta} . x$ wird.

Für einen jeden **rationalen** Werth von x ist nun ein **rationaler** Werth von $z = \frac{\alpha - ax^2}{bx^2 - \beta}$ angebbar, der, wenn man ihn in der **irrationalen** Function $Z = [(a + bz)(a + bz)]^{\frac{1}{2}}$ gebraucht, derselben einen rationalen Werth $\frac{\alpha b - a\beta}{bx^2 - \beta}$ ertheilt.

Also auch für die **irrationale** Function $Z = [(a + bz)(\alpha + \beta z)]^{\frac{1}{2}}$ giebt es eine gewisse Hülfsfunction X von x, vermittelst welcher man die Werthe z′, z″, z‴ 2c. der absolut veränderlichen Größe z angeben kann, denen rationale Werthe der Function Z entsprechen, die zwar hier nicht aus der Function Z selbst, aber doch aus einer rationalen Function Z′, welche für die Werthe z′, z″, z‴ 2c. der Function Z gleich ist, gefolgert werden können.

4) Dieß sind ohngefähr die Fälle, für welche der aufgestellte Lehrsatz gültig ist.

---

2) Von

2) Von der Formation, welche bey den verwickelten irrationalen Functionen vornehmlich merkwürdig ist.

§. 118.

So verschieden auch die Formen der Gleichungen seyn können, in welchen ein Verhältniß zwischen einer verwickelten irrationalen Function Z und der absolut veränderlichen Größe z gegeben ist; so muß sich doch auch für diese eine **allgemeine** Form angeben lassen, deren alle Gleichungen dieser Art fähig sind. Wir könnten diese Form zu bestimmen suchen; da aber die Kenntniß derselben keinen sonderlichen Nutzen gewähren kann, so wollen wir uns hier sogleich zu einer nützlichern Betrachtung wenden, welche die Bestimmung der Werthe der verwickelten irrationalen Functionen Z von z, die zu verschiedenen Werthen der absolut veränderlichen Größe z gehören, zur Absicht hat. Zwar ist eine **allgemeine** Regel für diese Bestimmung unmöglich, aber doch einige Formen solcher Gleichungen, in welchen das Verhältniß zwischen Z und z gegeben ist, sind von der Art, daß sie eine Transformation zulassen, durch welche man in den Stand gesetzt wird, zusammengehörige Werthe von Z und z anzugeben, ob man gleich wegen des Mangels einer allgemeinen Auflösungsregel der Gleichungen die Function Z nicht von z trennen, und in einem algebraischen Ausdrucke so entwickelt darstellen kann, daß sich für einen jeden beliebigen Werth von z der zugehörige Werth von Z unmittelbar aus demselben bestimmen läßt.

§. 119.

"Es sey Z eine Function von z, und das Verhältniß zwischen Z und z sey durch eine "Gleichung von der nachstehenden Form:

$$aZ^m + bZ^{m-1}.z + cZ^{m-2}.z^2 + d.Z^{m-3}.z^3 + \ldots + r.Z^2.z^{m-2} + sZz^{m-1} + tz^m$$

$$= \alpha Z^\mu + \beta Z^{\mu-1}.z + \gamma Z^{\mu-2}.z^2 + \delta.Z^{\mu-3}.z^3 + \ldots + \varrho Z^2.z^{\mu-2} + \sigma Zz^{\mu-1} + \tau z^\mu$$

"gegeben, welche von der Art ist, daß die Summe der Exponenten von Z und z in je- "dem Gliede der einen Seite = m und in jedem Gliede der andern Seite = μ ist, "und daß also blos **zwey** verschiedene Summen dieser Exponenten in der Gleichung vor- "kommen. Die Coefficienten a, b, c ..., α, β, γ ... und die Exponenten m und "μ seyen beliebige aber von z unabhängige Größen. Eine solche Gleichung wird jedesmal "eine Transformation zulassen, vermittelst welcher sich für verschiedene Werthe von z die

zu-

"zugehörigen Werthe von Z angeben lassen, obgleich aus derselben kein allgemeiner und
"von z abhängiger Ausdruck für Z abgeleitet werden kann."

1) Man stelle sich vor, die ihrer Form nach noch unbekannte Function Z sey eine Function von z und x zugleich und es sey $Z = xz$. Hierfür muß dann $Z^m = x^m . z^m$, $Z^{m-1} = x^{m-1} . z^{m-1}$, $Z^{m-2} = x^{m-2} . z^{m-2}$ ꝛc. $Z^\mu = x^\mu . z^\mu$, $Z^{\mu-1} = x^{\mu-1} . z^{\mu-1}$ ꝛc. seyn, und die im Lehrsatze angegebene Gleichung muß sich in die nachstehende verwandeln;

$$a x^m . z^m + b x^{m-1} . z^m + c x^{m-2} . z^m + d x^{m-3} . z^m + \ldots + r x^2 . z^m + f x . z^m + t z^m$$
$$= \alpha x^\mu . z^\mu + \beta x^{\mu-1} . z^\mu + \gamma x^{\mu-2} . z^\mu + \delta x^{\mu-3} . z^\mu + \ldots + \varrho x^2 . z^\mu + \sigma x . z^\mu + \tau z^\mu,$$

aus welcher ferner die Gleichung

$$\frac{z^m}{z^\mu} \text{ oder } z^{m-\mu} = \frac{\alpha x^\mu + \beta x^{\mu-1} + \gamma x^{\mu-2} + \delta x^{\mu-3} + \ldots + \varrho x^2 + \sigma x + \tau}{a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + d x^{m-3} + \ldots + r x^2 + f x + t}$$

und mithin der nachstehende Werth von

$$z = \left(\frac{\alpha x^\mu + \beta x^{\mu-1} + \gamma x^{\mu-2} + \delta x^{\mu-3} + \ldots + \varrho x^2 + \sigma x + \tau}{a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-1} + d x^{m-3} + \ldots + r x^2 + f x + t}\right)^{\frac{1}{m-\mu}}$$

erhalten wird.

2) Setzt man diesen Werth von z in die in Nro. 1. angenommene Gleichung $Z = xz$; so erhält man folgenden Werth von

$$Z = x\left(\frac{\alpha x^\mu + \beta x^{\mu-1} + \gamma x^{\mu-2} + \delta x^{\mu-3} + \ldots + \varrho x^2 + \sigma x + \tau}{a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + d x^{m-3} + \ldots + r x^2 + f x + t}\right)^{\frac{1}{m-\mu}}$$

3) Aus der Gleichung für z am Ende von Nro. 1. kann man nun für einen jeden Werth von x einen Werth von z finden, für welchen der zugehörige Werth von Z angegeben werden kann, weil derselbe allemal erhalten wird, wenn man den Werth von z noch mit dem Werthe von x multiplicirt, für welchen z gesucht ist.

§. 120.

Hier wollen wir das, was in dem vorigen §. im Allgemeinen gelehrt worden ist, auf einige bestimmte Fälle anwenden.

1) Es

I) Es sey Z eine verwickelte irrationale Function von z, und die Gleichung, in welcher das Verhältniß zwischen Z und z gegeben ist, sey folgende:

$$aZ^2 + bZz + cz^2 = \alpha Z + \beta z.$$

Diese Gleichung ist unter der allgemeinen im vorigen §. angegebenen Gleichung enthalten, denn in einem jeden Gliede der linken Seite ist die Summe der Exponenten von Z und z $= 2$, und in einem jeden Gliede der rechten Seite ist sie $= 1$; es kommen demnach in derselben nur zwey verschiedene Summen vor. Da nun hier $m = 2$, $\mu = 1$, $d = 0$, $e = 0$ ꝛc. $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ꝛc. ist; so muß seyn:

$$z = \left(\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}\right)^{\frac{1}{2-1}} \text{ und } Z = x . \left(\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}\right)^{\frac{1}{2-1}}$$

$$= \frac{\alpha x^2 + \beta x}{ax^2 + bx + c}.$$

II) Es sey Z eine verwickelte irrationale Function von z, und die Gleichung, in welcher das Verhältniß zwischen Z und z gegeben ist, sey folgende:

$$aZ^3 + bZ^2z + cZz^2 + dz^3 = \alpha Z^2 + \beta Zz + \gamma z^2$$

Diese Gleichung ist abermals unter der im vorigen §. angegebenen allgemeinen Gleichung enthalten, und man erhält, weil hier $m = 3$, $\mu = 2$, $e = 0$, $f = 0$ ꝛc. $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ ꝛc. ist,

$$z = \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right)^{\frac{1}{3-2}} \text{ und } Z = x \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right)^{\frac{1}{3-2}}$$

$$= \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x}{ax^3 + bx^2 + cx + d}.$$

III) Es sey ferner Z eine verwickelte Function von z, und die Gleichung, welche das Verhältniß zwischen Z und z darstellt, sey diese:

$$aZ^2 + bZz + cz^2 = \alpha.$$

Auch diese ist unter der allgemeinen Gleichung des vorigen §. enthalten. Weil hier $m = 2$, $\mu = 0$, $d = 0$, $e = 0$ ꝛc. $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ꝛc. ist; so muß

$$z = \left(\frac{\alpha}{ax^2 + bx + c}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } Z = x \left(\frac{\alpha}{ax^2 + bx + c}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ seyn.}$$

IV) Es sey endlich Z eine verwickelte Function von z, und die Gleichung für Z sey diese:

$$aZ^3 + bZ^2 z + cZz^2 + dz^3 = \alpha Z + \beta z$$

Hier ist, wenn man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung des vorigen §. vergleicht, $m = 3$, $\mu = 1$, $e = 0$, $f = 0$ ic. $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ic., und also

$$z = \left(\frac{\alpha x + \beta}{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } Z = x \left(\frac{\alpha x + \beta}{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

§. 121.

"Es sey Z eine Function von z, die Gleichung aber, in der das Verhältniß zwi-"schen Z und z gegeben ist, habe die Form

$$aZ^m + bZ^{m-1}.z + cZ^{m-2}.z^2 + \ldots + rZ^2.z^{m-2} + s.Z.z^{m-1} + tz^m$$

$$+ \alpha Z^{\frac{m+\mu}{2}} + \beta Z^{\frac{m+\mu}{2}-1}.z + \gamma Z^{\frac{m+\mu}{2}-2}.z^2 + \ldots + \varrho Z^2.z^{\frac{m+\mu}{2}-2}$$

$$+ \sigma Z.z^{\frac{m+\mu}{2}-1} + \tau z^{\frac{m+\mu}{2}}$$

$$+ \mathfrak{a}Z^{\mu} + \mathfrak{b}Z^{\mu-1}.z + \mathfrak{c}Z^{\mu-2}.z^2 + \ldots + \mathfrak{r}Z^2.z^{\mu-2} + \mathfrak{f}Zz^{\mu-1} + \mathfrak{t}z^{\mu} = 0,$$

"deren eigenthümliche Beschaffenheit darin besteht: daß in den verschiedenen Gliedern der-"selben nicht, wie in §. 119. zwey verschiedene, sondern drey verschiedene Summen der "Exponenten von Z und z vorkommen, nehmlich die Summen m, μ und $\frac{m+\mu}{2}$; daß "ferner die eine Summe die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen der kleinern "μ und der größern m ist; und daß endlich μ jedesmal als eine gerade Zahl gedacht "werden soll, wenn m als eine solche vorgestellt wird, als eine ungerade aber, wenn man "sich unter m eine ungerade Zahl vorstellt. Die Coefficienten sollen beliebige von z un-"abhängige Größen seyn. Für eine solche verwickelte irrationale Function Z werden sich "die Werthe, welche den verschiedenen Werthen der absolut veränderlichen Größe z zuge-"hören, angeben lassen, ob sich gleich Z nicht entwickelt darstellen läßt."

1) Wenn man sich hier Z als eine Function von x und z vorstellt, welche die Form xz hat; so wird $Z^m = x^m.z^m$, $Z^{m-1}.z = x^{m-1}.z^m$ ic. $Z^{\frac{m+\mu}{2}} = z^{\frac{m+\mu}{2}}.x^{\frac{m+\mu}{2}}$,

Z

$Z^{\frac{m+\mu}{2}-1} . z = x^{\frac{m+\mu}{2}-1} . z^{\frac{m+\mu}{2}}$ ꝛc. $Z^{\mu} = x^{\mu} . z^{\mu}$, $Z^{\mu-1} . z = x^{\mu-1} . z^{\mu}$ ꝛc. Setzt man nun diese Ausdrücke in die im Lehrsatze aufgestellte Gleichung, so verwandelt sich dieselbe in die nächstehende:

$$a x^m . z^m + b x^{m-1} . z^m + c x^{m-2} . z^m + \ldots + r x^2 z^m + s x z^m + t z^m$$
$$+ \alpha x^{\frac{m+\mu}{2}} . z^{\frac{m+\mu}{2}} + \beta x^{\frac{m+\mu-2}{2}} . z^{\frac{m+\mu}{2}} + \gamma x^{\frac{m+\mu-4}{2}} . z^{\frac{m+\mu}{2}} + \ldots$$
$$+ \varrho x^2 . z^{\frac{m+\mu}{2}} + \sigma x z^{\frac{m+\mu}{2}} + \tau z^{\frac{m+\mu}{2}}$$
$$+ \mathfrak{a} x^{\mu} . z^{\mu} + \mathfrak{b} x^{\mu-1} . z^{\mu} + \mathfrak{c} x^{\mu-2} . z^{\mu} + \ldots + \mathfrak{r} x^2 . z^{\mu} + \mathfrak{s} x . z^{\mu} + \mathfrak{t} z^{\mu} = o.$$

Hierfür kann man aber, wenn man die Potenzen von z gehörig trennt, und hernach die ganze Gleichung mit der niedrigsten Potenz von z, mit der Potenz z^{μ} nehmlich, dividirt, auch setzen:

$$(a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \ldots + r x^2 + s x + t) z^{m-\mu}$$
$$+ (\alpha x^{\frac{m+\mu}{2}} + \beta x^{\frac{m+\mu-2}{2}} + \gamma x^{\frac{m+\mu-4}{2}} + \ldots + \varrho x^2 + \sigma x + \tau) z^{\frac{m-\mu}{2}}$$
$$+ (\mathfrak{a} x^{\mu} + \mathfrak{b} x^{\mu-1} + \mathfrak{c} x^{\mu-2} + \ldots + \mathfrak{r} x^2 + \mathfrak{s} x + \mathfrak{t}) = o.$$

2) Weil nun nach der Voraussetzung die ganze bejahte Zahl μ kleiner, als die ganze bejahte Zahl m, und überdieß allemal gerad seyn soll, wenn m gerad, ungerad aber, wenn m ungerad ist; so muß der Exponent $m - \mu$ jedesmal eine **bejahte ganze gerade** Zahl, und folglich auch der Exponent $\frac{m-\mu}{2}$ eine **bejahte ganze** Zahl seyn.

Setzt man also $m - \mu = 2 v$, folglich $\frac{m-\mu}{2} = v$, und nennt die in der am Ende von Nro. 1. stehenden Gleichung vorkommenden Coefficienten der Potenzen von z der Ordnung nach A, B, C; so sieht jene Gleichung kurz so aus:

$$A z^{2v} + B z^{v} + C = o,$$

woraus, wenn man ferner $z^{v} = y$, und also $z^{2v} = y^2$ setzt, die quadratische Gleichung

$$Ay^2 + By + C = 0$$

folgt, welche Gleichung, wenn man sie nach den bekannten Auflösungsregeln auflöst,

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4CA)}}{2A}$$

giebt. Es ist also, wenn man nun für y wiederum den Werth $z^v = z^{\frac{m-\mu}{2}}$ setzt,

$$z^{\frac{m-\mu}{2}} = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4CA)}}{2A},$$

und folglich auch

$$z = \left(\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4CA)}}{2A}\right)^{\frac{2}{m-\mu}}$$

3) Setzt man hierein die Werthe von A, B, C aus Nro. 1.; so erhält man die Gleichung, in welcher z durch x ausgedrückt ist, und aus welcher für einen jeden beliebigen Werth von x ein Werth von z gefolgert werden kann, für welchen die Function Z = x.z seyn muß.

§. 122.

Das, was in dem vorigen §. im Allgemeinen gelehrt worden ist, soll hier abermals in einigen bestimmten Fällen angewendet werden.

1) Es sey Z eine verwickelte irrationale Function von z, und die Gleichung, in welcher das Verhältniß zwischen Z und z gegeben ist, sey folgende:

$$aZ^3 + bZ^2z + cZz^2 + dz^3 + \alpha Z^2 + \beta Zz + \gamma z^2 + \mathfrak{a}Z + \mathfrak{b}z = 0.$$

Diese gehört zu der im vorigen §. angegebenen allgemeinen Gleichung, denn hier ist $m = 3$, $\mu = 1$, $\frac{m+\mu}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$, und μ und m sind beyde ungerad. Sucht man nun nach Nro. 1. und 2. des vorigen §. die Größen A, B, C; so erhält man, weil hier $e = 0$, $f = 0$ ꝛc. $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ ꝛc. $\mathfrak{c} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$ ꝛc. ist,

$$A = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ B = \alpha x^2 + \beta x + \gamma;\ C = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}.$$

Es wird demnach, weil hier $\frac{2}{m-\mu} = \frac{2}{3-1} = 1$ ist, die Größe

$$z = \frac{-(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \pm \sqrt{[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 - 4(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b})(ax^3 + bx^2 + cx + d)]}}{2(ax^3 + bx^2 + cx + d)},$$

und folglich die Function Z = x.z seyn müssen.

Man



Man kann also hier für einen jeden Werth von x einen Werth von z finden, für welchen der Werth der Function $Z = xz$ angebbar ist.

II) Es sey Z eine verwickelte Function von z, und die Gleichung, in welcher das Verhältniß zwischen Z und z gegeben ist, sey diese:

$$Z^{10} + 2hZz^6 + \text{[illegible]}\, z^5 + lz^4 = 0.$$

In dieser Gleichung kommen verschiedene Summen der Exponenten von Z und z vor, nehmlich 10, 7 und 4; ferner aber ist die größte und kleinste Summe gerade und die dritte ist die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen der größten und kleinsten Summe, denn $\frac{10+4}{2}$ ist $= 7$. Es gehört demnach diese Gleichung unter die allgemeine im vorigen §. betrachtete. Vergleicht man sie mit jener, so findet man, daß hier $m = 10$, $\mu = 4$, $\frac{m+\mu}{2} = 7$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ rc. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = 0$, $\eta = 2h$, $\vartheta = 0$ rc. $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{c} = 0$, $\mathfrak{d} = k$, $\mathfrak{e} = l$, $\mathfrak{f} = 0$ rc. ist, und daß also nach §. 121. Nro. 1. und 2.

$$A = x^{10},\ B = 2hx,\ C = kx + l \text{ seyn muß,}$$

wofür man nun nach §. 121. Nro. 3.

$$z = \left[\frac{-2hx \pm \sqrt{(4h^2x^2 - 4(kx + l)x^{10})}}{2x^{10}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[\frac{-h \pm \sqrt{(h^2 - kx^9 - lx^8)}}{x^9}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{[-h \pm \sqrt{(h^2 - kx^9 - lx^8)}]^{\frac{1}{3}}}{x^3}$$

erhält. Folglich ist nun die Function

$$Z = xz = \frac{[-h \pm \sqrt{(h^2 - kx^9 - lx^8)}]^{\frac{1}{3}}}{x^2},$$

und man kann jetzt für einen jeden Werth von x einen Werth von z und den zugehörigen Werth von Z bestimmen.

§. 123.

"Es sey Z eine Function von z und die Gleichung, in der das Verhältniß zwischen "Z und z gegeben ist, habe die Form

$$aZ^m + bz^\mu + cZ^n . z^\nu = 0,$$

 "in

"in der die Coefficienten und Exponenten beliebige von z unabhängige Grössen bedeuten. "Man wird hier, ob sich gleich Z aus dieser Gleichung nicht finden läßt, dennoch die den "verschiedenen Werthen von z zugehörigen Werthe von Z angeben können."

1) Man stelle sich die Function Z als eine Function von x und z vor, welche die Form $x z^p$ hat; alsdann muß $Z^m = (x z^p)^m = x^m . z^{pm}$ und $Z^n = (x z^p)^n = x^n . z^{pn}$ werden, und die im Lehrsatze angegebene Gleichung verwandelt sich folglich in folgende:

$$a x^m . z^{pm} + b z^\mu + c x^n . z^{pn+\nu} = 0.$$

Wäre nun $p m = \mu$, so könnte man diese Gleichung durch z^μ dividiren; es würde hierdurch aus zwey Gliedern z weggebracht, und man könnte alsdann z bestimmen. Weil aber p in der für Z angenommenen Function $x z^p$ unbestimmt angenommen ist, so kann man ja $p = \frac{\mu}{m}$ setzen, wofür dann wirklich $p m = \mu$ wird. Man thue dieses, dann verwandelt sich die vorige Gleichung in diese:

$$a x^m . z^\mu + b z^\mu + c x^n . z^{\frac{\mu n + m\nu}{m}} = 0,$$

welche ferner durch die Division mit z^μ die Gleichung

$$a x^m + b + c x^n . z^{\frac{\mu n + m\nu - \mu m}{m}} = 0$$

giebt, aus der

$$z = \left(\frac{-a x^m - b}{c x^n}\right)^{\frac{m}{\mu n + m\nu - \mu m}}$$ folgt.

2) Setzt man diesen Werth von z in die in Nro. 1. für Z angenommene Function $x z^p$, so erhält man:

$$Z = x . \left(\frac{-a x^m - b}{c x^n}\right)^{\frac{mp}{\mu n + m\nu - \mu m}}$$

oder auch, weil $p = \frac{\mu}{m}$ ist,

$$Z = x . \left(\frac{-a x^m - b}{c x^n}\right)^{\frac{\mu}{\mu n + m\nu - \mu m}}$$

Für einen jeden Werth von x also läßt sich ein Werth von z finden, für welchen der zugehörige Werth von Z angeben werden kann.

§. 124.

§. 124.

Hier soll die allgemeine Betrachtung im vorigen §. durch ein Beyspiel erläutert werden.

Es sey Z eine Function von z, für welche die Gleichung, welche das Verhältniß zwischen Z und z enthält, folgende ist:

$$Z^3 + z^3 - 9Zz = 0.$$

Diese Gleichung gehört, wie man leicht sieht, wirklich zu der im vorigen §. betrachteten allgemeinen Gleichung, und es ist hier $a = 1$, $b = 1$, $c = -9$, $m = 3$, $\mu = 3$, $n = 1$, $\nu = 1$; folglich muß

$$z = \left(\frac{-1 \cdot x^3 - 1}{-9x}\right)^{\frac{3}{3+3-3.3}} = \left(\frac{x^3 + 1}{9x}\right)^{-1} = \frac{9x}{x^3 + 1}, \text{ und}$$

$$Z = x \cdot \left(\frac{x^3 + 1}{9x}\right)^{-1} = \frac{9x^2}{x^3 + 1} \text{ seyn.}$$

Vier

Vierter Abschnitt.

Von den Formen der transcendentischen Functionen einer veränderlichen Größe [illegible]haupt,

und der algebraischen Darstellung derjenigen unter diesen Functionen, welche man Logarithmen, Exponentengrößen und trigonometrische Functionen nennt, insbesondere.

---

§. 125.

Schon in §. 15. ist festgesetzt worden, was wir für eine Function verstanden haben wollen, wenn wir dieselbe durch das Prädikat **transcendentisch** bezeichnen, wir finden aber für nöthig, daß die a. a. O. gegebene Erklärung noch mehr in das Licht gesetzt werde, damit hier keine Unbestimmtheit der Begriffe zurück bleibe. Dieses wollen wir thun, ehe wir noch weiter etwas von den **transcendentischen** Functionen lehren.

§. 126.

1) Wenn für eine Function eines veränderlichen Quantums ein Zeichen angegeben wird, aus dem man nicht nur die Quanta erkennen kann, welche in einer bestimmten arithmetischen Form und Verbindung unter einander die Function geben, sondern auch die Art, Anzahl und Ordnung der arithmetischen Operationen, durch welche die Quanta in die bestimmte arithmetische Form und Verbindung unter einander gebracht werden müssen, und die man jedesmal zu beobachten und vorzunehmen hat, wenn man bey bestimmten Werthen der constanten Quanta die Werthe der Function berechnen will, welche den verschiedenen bestimmten Werthen des absolut veränderlichen Quantus entsprechen; so sagt man: **es werde die Function algebraisch dargestellt**; das Zeichen aber, wodurch diese Darstellung geschieht, nennt man den **algebraischen Ausdruck** der Function.

Hierbey ist zu merken, daß es bey der **algebraischen Darstellung** einer Function blos darauf ankommt, daß man diejenigen arithmetischen Operationen, durch welche die Quanta, die in einer gewissen arithmetischen Form und Verbindung unter einander die Function geben, dem Begriffe nach kenne und die Bezeichnung derselben verstehe; ob man aber dieselben **wirklich**, ob man sie **alle**, und zwar für einen **jeden** beliebigen Werth des absolut veränderlichen Quantus, vornehmen, ob man endlich, wenn man sie vornähme, die Werthe der hierbey erzeugten Quanta **vollständig** oder blos **näherungsweise** angeben

den könne; darauf wird bey der algebraischen Darstellung einer Function keine Rücksicht genommen, sondern alles dieses kommt erst alsdann in Betrachtung, wenn man sich des durch die algebraische Darstellung der Function erhaltenen algebraischen Ausdrucks zur wirklichen Berechnung der Werthe, welche die Function für verschiedene Werthe des absolut veränderlichen Quantums erhalten muß, bedienen will.

2) Wenn nun die Analysis Quanta, von welchen klar ist, daß sie Functionen von andern Quantis sind, für welche aber das Gesetz ihrer Abhängigkeit von den andern Quantis noch unbekannt ist und erst durch einen algebraischen Ausdruck vor Augen gelegt werden muß, algebraisch darzustellen sucht; so entdeckt sich ein wesentlicher Unterschied der Functionen. Es zeigen sich nehmlich

a) die Functionen theils als solche an, für deren jede die Analysis wenigstens auf **einem** der verschiedenen Wege, auf denen sie zur algebraischen Darstellung noch nicht algebraisch dargestellter Functionen gelangen kann, einen algebraischen Ausdruck zu finden im Stande ist, welcher blos eine **endliche** und **bestimmte** Anzahl solcher Quanta aufweist, die in einer gewissen arithmetischen Form und Verbindung unter einander die Function geben, und auch blos eine **endliche** und **bestimmte** Anzahl arithmetischer Operationen andeutet, durch welche diese Quanta geformt und unter einander in Verbindung gesetzt werden müssen, der daher allemal so dargestellt werden kann, daß in ihm **alle** diese Quanta und **alle** diese arithmetischen Operationen **einzeln** bezeichnet sind, daß ihm also nichts von dem fehlt, was er enthalten soll, sondern daß er ganz **bestimmt** und **vollständig** ist. Es geben sich aber auch

b) die Functionen theils als solche zu erkennen, für welche die Analysis auf keinem einzigen ihr bekannten Wege solche algebraische Ausdrücke finden kann, die wir so eben **bestimmt** und **vollständig** genannt haben, sondern wo alles, was dieselbe in Beziehung auf die algebraische Darstellung solcher Functionen zu leisten vermag, blos darin besteht, daß sie nur Ausdrücke für dieselben finden kann, welche aus einer ohne Ende fortlaufenden Reihe algebraischer Ausdrücke bestehen, in denen die absolut veränderliche Größe mit constanten Größen in einer bestimmten Form der Verbindung steht und auf immer höhere und höhere Potenzen steigt, welche also auf eine unerreichbar große Anzahl solcher Quanta, die in ihrer arithmetischen Form und Verbindung unter einander die Function geben, und auf eine nie vollendbare Anzahl arithmetischer Operationen, durch welche die erwähnten Quanta geformt und unter einander in Verbindung gesetzt werden müssen, hinweisen, und die überdieß meistens noch das allgemeine Gesetz angeben, nach welchem sich so viele von den erwähnten

ten Quantis bestimmen und in die gehörige Form und Verbindung unter einander bringen lassen, als man will. In solchen Ausdrücken kann also nie ein **jedes** von den Quantis, welches ein Bestimmungsstück der Function ist, besonders dargestellt, sondern nur das Gesetz kann angegeben werden, wodurch sich ein jedes Quantum finden und in die gehörige Form und Verbindung mit den andern Quantis bringen läßt; es müssen daher solche Ausdrücke allemal noch **unbestimmt** und **unvollständig** bleiben, man mag auch wie immer viele von den Quantis, welche in ihnen bezeichnet werden müssen, bestimmen und in der gesetzmäßigen Form unter einander in Verbindung bringen.

3) Diese Verschiedenheit der Functionen berechtigt uns, dieselben in zwey Classen zu theilen, wovon die eine Classe diejenigen enthält, welche einer **bestimmten** und **vollständigen** algebraischen Darstellung fähig sind, die andere aber diejenigen, welche zwar auch eine algebraische Darstellung zulassen, aber keine solche, welche man **bestimmt und vollständig** nennen kann. Die Functionen der ersten Classe wurden **algebraische** genannt, und diesen Namen erhalten sie, weil sie eine **vollkommene** algebraische Darstellung zulassen, mit Recht. Die Functionen der zweyten Classe wurden **transcendentisch** genannt, und der Grund dieser Benennung ist die Beschaffenheit der algebraischen Ausdrücke, die man für sie findet, bey welchen die Anzahl der ihnen zugehörigen Glieder eine **jede endlich große Zahl übersteigt**, (transcendit omnem finitum terminorum numerum).

4) **Euler** versteht unter den **transcendentischen** Functionen solche, welche weder **rational** noch **irrational** dargestellt werden können. Dieses erhellet deutlich aus einer Erklärung, welche er über die Logarithmen solcher Zahlen giebt, die keine vollkommenen Potenzen der Basis des Logarithmensystems sind, und die er darum transcendentisch nennt, weil sie weder **rational** noch **irrational** dargestellt werden können. (S. Introd. in Analys. infinit. Tom. I. §. 105.). Obgleich diese Eulerische Erklärung etwas dunkel und unbestimmt ist, so kann sie doch beybehalten werden, wenn man sie richtig versteht. **Leibnitz** nennt alle Größen **algebraisch**, welche sich durch Gleichungen von einem **bestimmten** Grade ausdrücken lassen, **transcendentisch** aber, wenn dieses der Fall nicht ist. (S. Opp. Tom. III. p. 106. der Genfer Ausgabe vom Jahr 1768.). Dieser Erklärung folgt auch **Kästner**, wie man deutlich aus dem 571ten §. der dritten Aufl. seiner Anfangsgründe der Analys. endl. Größen vernehmen kann. Nach unserer Erklärung ist Z eine transcendentische Function von z, wenn Z durch keinen andern algebraischen Ausdruck dargestellt werden kann, als durch einen solchen, der aus einer ohne Ende fortlaufenden Reihe von Gliedern besteht, in welchen z mit andern constanten Quantis nach einem bestimm-

stimmten Gesetze verbunden ist, und auf immer höhere Potenzen steigt. — Wenn man also den Ausdruck für Z der Function Z gleich setzt, so hat man eine Gleichung, von der man keinen bestimmten Grad angeben kann. — Herr **Bürja** sagt in seinem selbstlernenden Algebraisten (Th. 2. S. 264.): "**Es scheint** überhaupt eine **transcendenti**"**sche** Grösse in der Algebra eine jede Grösse zu seyn, deren Werth nie ganz rein, son"dern nur durch eine ohne Ende fortlaufende Reihe gefunden werden kann." Er rechnet daher auch a. a. O. die Potenzen binomischer und polynomischer Grössen, deren Potenzenexponenten Brüche sind, z. E. $(1+z)^{\frac{1}{2}}$, $(1+2z+z^2)^{\frac{2}{3}}$ rc. zu den **transcendentischen** Functionen, weil sich dieselben blos durch ohne Ende fortlaufende Reihen entwickelt darstellen lassen. Hier begeht aber Herr **Bürja** einen sehr grossen Fehler und zeigt, daß er gar keinen bestimmten Begriff von einer **transcendentischen** Function hat, welches auch schon aus seiner Aeusserung: "es **scheint** rc." erhellet. Nach Herrn **Bürja** sind also auch alle **irrationalen** Functionen **transcendentisch**. — — Nach unserer Erklärung über die **transcendentischen** Functionen darf keine Function so genannt werden, für welche man irgend einen algebraischen Ausdruck aufweisen kann, der, es sey nun übrigens die Form desselben, welche sie wolle, die Eigenschaft hat, daß er nicht nur **bestimmt** und **vollständig** alle Quanta, welche die Function geben, sondern auch alle arithmetischen Operationen angiebt, durch welche diese Quanta geformt und verbunden werden müssen. Kann demnach eine Function Z von z, deren algebraischer Ausdruck $(1+z)^{\frac{1}{2}}$, oder ein diesem ähnlicher ist, transcendentisch genannt werden? — Oder soll etwa eine Function, deren Ausdruck, wenn man ihn in irgend einer Absicht auf eine andere Form zu bringen sucht, die Form der Ausdrücke transcendentischer Functionen annimmt, darum zu den transcendentischen Functionen gerechnet werden? Da wären ja auch die **gebrochenen** algebraischen Functionen **transcendentisch**, denn diese zeigen, wenn man ihre Ausdrücke auf eine der Form der **ganzen** algebraischen Functionen ähnliche Form zu bringen sucht, ebenfalls eine Eigenschaft der transcendentischen Functionen, ihre Ausdrücke nehmlich lassen alsdann keine endlich grosse Anzahl von Gliedern zu. — Mehrere Distinctionen, welche man bey der Betrachtung der transcendentischen Functionen gemacht hat, die aber von keiner Erheblichkeit sind, findet man bey **Cramer**, Introduct. à l'Analyse des lignes courbes algébriques, Genf 1750. Seite 8.

5) Hierdurch wird nun hoffentlich der Anfänger in den Stand gesetzt seyn, sich einen deutlichen und bestimmten Begriff von den Functionen zu machen, die im eigentlichen Sinne **transcendentisch** genannt werden müssen. Nun aber muß noch eine Bemerkung beygefügt werden über eine gewisse Art von Functionen, welche man gewöhnlich zu den

transcendentischen zählt, die aber eigentlich zu den **algebraischen** Functionen gehören und als eine besondere Art derselben aufgeführt werden müssen, welches wir aus nachher zu erörternden Gründen nicht gethan haben. Es sey e eine beliebige als constant angenommene, z aber eine absolut veränderliche Größe, und Z bedeute eine Function von z, welcher, wenn man sie algebraisch darstellt, der Ausdruck e^z entspricht. Eine solche Function, welche eine Potenz einer beliebigen Größe e mit einem veränderlichen Potenzexponenten z ist, nennt man gewöhnlich eine **Exponentialgröße** und rechnet sie zu den **transcendentischen** Functionen. Auch alle Functionen, deren Ausdrücke **vollständig** und **bestimmt** sind, zählt man, sobald sie eine oder mehrere Größen von der Form e^z enthalten, zu den **transcendentischen**. Aber es ist doch in dem Ausdrucke e^z eine jede der Größen und arithmetischen Operationen, welche die Function Z geben, ausdrücklich in der Anschauung dargestellt; ob ich die Operation der Potenzenerhebung für einen jeden Werth von z vornehmen könne, oder nicht, dieses kann hier, wo von der algebraischen Darstellung die Rede ist, nicht in Anschlag kommen (Nro. 1.). Darum muß mit Recht die Function Z, welche $= e^z$ ist, und so eine jede andere Function, der ein **bestimmter** und **vollständiger** algebraischer Ausdruck entspricht, wenn er auch gleich Größen von der Form e^z enthält, zu den algebraischen Functionen gerechnet werden. Nun entsteht aber die Frage, zu welcher Art der algebraischen Functionen dergleichen Functionen gerechnet werden müssen. Daß sie zu keiner der von uns angegebenen Arten zu rechnen sind, dieses ist leicht einzusehen. Sie müssen also als eine besondere Art algebraischer Functionen angesehen werden, und als solche hätten wir sie in der Lehre von den algebraischen Functionen aufführen müssen, wenn uns nicht folgender Grund davon abgehalten hätte. Es können nehmlich dergleichen Functionen nicht, wie die übrigen Functionen, auf eine ihnen gemeinschaftliche Form gebracht werden, wenn man nicht erst diejenige transcendentische Function, welche man einen Logarithmus nennt, und die selbst aus der Function e^z entspringt, algebraisch darzustellen weis. Es beruht also die Transformation solcher Functionen auf der Möglichkeit der algebraischen Darstellung einer transcendentischen Function, und darum handelt man von ihnen gewöhnlich erst in der Lehre von den transcendentischen Functionen, welches nun auch von uns geschehen soll. Wenn man Gründe anzuführen sucht, um zu beweisen, daß die hier erwähnten Functionen doch eigentlich zu den **transcendentischen**, nicht aber zu den **algebraischen** Functionen gerechnet werden müssen; so ist dieses meinen Einsichten nach ein Beweis, daß man den wahren Begriff von den transcendentischen Functionen noch nicht gefaßt hat, und den Grund der Eintheilung der Functionen gar nicht versteht.

§. 127.

§. 127.

"In der Function $A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots + Uz^u$ (h) seyen die "Coefficienten A, B, C ... und Exponenten a, b, c ... beliebige von z unabhän"gige Größen und die Anzahl der Glieder der Function sey unerreichbar groß. Eine jede "transcendentische Function Z von z, welche nicht schon die Form der angeführten Function "hat, muß sich auf dieselbe bringen lassen, und bey dieser Reduction wird man allemal "die Formation so vornehmen können, daß die Exponenten a, b, c ... **ganze bejahte** "Zahlen werden, wenn die Glieder der zu reducirenden Function Z **rationale** Functionen "von z sind."

Es sollen nach der von uns gegebenen Erklärung unter transcendentischen Functionen solche verstanden werden, für welche die Analysis keine **bestimmten** und **vollständigen** algebraischen Ausdrücke finden, sondern blos Ausdrücke angeben kann, welchen unzählig viele Glieder zugehören, und wo jedes Glied von der Art ist, daß in ihm die absolut veränderliche Größe nach einem gewissen **allen** Gliedern gemeinschaftlichen Gesetze geformt und mit andern constanten Quantis arithmetisch verbunden ist, und jedesmal in dem folgenden Gliede in höheren Potenzen vorkommt, als in dem vorhergehenden. Nun mögen diese Glieder entweder **rationale** (ganze oder gebrochene) oder **irrationale** (entwickelte) Functionen von der absolut veränderlichen Größe seyn; so muß sich nach dem, was wir von den Formen solcher Functionen gelehrt haben, ganz gewiß ein jedes derselben in einer Form darstellen lassen, welche der Form der vorhin genannten Function (h) ähnlich ist. Daraus läßt sich die Richtigkeit unseres Satzes ohne weiteren Beweis sehr leicht einsehen.

§. 128.

Die im vorigen §. angegebene Form (h), auf welche sich die Ausdrücke **aller** transcendentischen Functionen Z von z, die nicht schon diese Form haben, bringen lassen müssen, ist nach §. 36. eine **allgemeine** Form der transcendentischen Functionen Z von z. Was also in der Folge von einer Function, welche die Form (h) hat, gelehrt und erwiesen wird, daß muß auch von allen transcendentischen Functionen gültig seyn (§. 38.).

§. 129.

Dieses ist das wesentlichste, was nach einer Theorie von den Formen der verschiedenartigen algebraischen Ausdrücke algebraisch dargestellter Functionen Z von z unter dem Titel vorkommen kann, welcher die Formen der Ausdrücke der transcendentischen Functionen Z von z zu betrachten hat. Hiermit ist nun aber auch das ganze Hauptstück von den

Formen der Functionen Z von z geendigt. Es ist also, wenn wir jetzt der Lehre von den Formen der Ausdrücke algebraisch dargestellter transcendentischer Functionen Z von z noch eine Lehre beyfügen, welche die algebraische Darstellung einiger transcendentischer Functionen Z von z, die wir uns als noch nicht algebraisch dargestellt vorstellen, selbst betrifft, dieses nicht so zu verstehen, als wenn diese Lehre als ein wesentlicher Theil der Lehre von den Formen der Functionen überhaupt und der transcendentischen insbesondere angesehen werden müßte. Die Lehre von den Formen der Functionen hat sich gar nichts darum zu bekümmern, auf welche Art man zur algebraischen Darstellung dieser und jener noch nicht dargestellten Functionen Z von z gelangen kann, sondern sie bestimmt blos nach Principien über die verschiedenen möglichen Synthesen und Analysen, die der Verstand mit arithmetischen Quantis vornehmen kann, und über die dadurch entstehenden verschiedenartigen Formen algebraischer Ausdrücke, die verschiedenen möglichen Classen, in welche sich diese Ausdrücke bringen lassen, die verschiedenen Grundformen, welche einer jeden Classe eigenthümlich sind, und die verschiedenen Reductionsarten derselben auf diese Grundformen. Die Lehre, welche zeigt, wie man diejenigen transcendentischen Functionen, welche man **Logarithmen, Exponentengrößen** und **trigonometrische Functionen** nennt, algebraisch darstellen kann, und die jetzt folgen soll, ist blos als ein Anhang zu der Lehre von den Formen der Functionen zu betrachten und müßte, wenn wir ein eigentliches System des zweyten Theils der allgemeinen Mathematik liefern wollten, eine andere Stelle einnehmen, als die, welche wir derselben hier anweisen.

Der Grund aber, der uns nöthigt, diese Lehre vorzutragen, ist folgender: Wir wollen uns zu dem Differential- und Integralcalcul vorbereiten, welcher uns eine Methode an die Hand giebt, durch welche wir auf eine sehr bequeme Art zur algebraischen Darstellung vorgegebener Functionen, die noch nicht algebraisch dargestellt sind, gelangen können. Dieser Calcul nun könnte gelehrt werden, ohne daß man schon zum voraus die algebraische Darstellung einiger transcendentischer Functionen kennte; aber der Gebrauch desselben würde dann sehr eingeschränkt seyn, da hingegen die Gränzen desselben beträchtlich dadurch erweitert werden, daß man schon vorher einige leichte transcendentische Functionen ohne Beyhülfe des Differential- und Integralcalculs algebraisch darstellen kann und die Ausdrücke derselben den Betrachtungen des Differentialcalculs unterwirft. Dieses nun sind eben diejenigen transcendentischen Functionen, welche man **Logarithmen** und **trigonometrische Functionen** nennt. — Die algebraische Darstellung derselben ist ohne Beyhülfe des Differential- und Integralcalculs auf eine, wie wir sehen werden, sehr leichte Art, zu bewerkstelligen. Das, was wir bisher gesagt haben, kann dem Anfänger nicht ganz deutlich seyn, es wird ihm aber vollkommen deutlich werden, wenn wir ihm in der Folge den Integralcalcul vortragen.

tragen. Für den Analysten, der unserer in diesem §. gegebenen Erklärung nicht beystimmen will, und vielleicht dieselben für einseitig erklären möchte, fügen wir hier die Bemerkung bey, daß wir den Grund seiner Unzufriedenheit gar wohl kennen, daß wir aber das ganze Gebieth des Differential- und Integralcalculs vielleicht von einem anderen Standpuncte aus betrachten, als er. —

Bey der algebraischen Darstellung der Logarithmen und trigonometrischen Functionen haben wir eine sehr schickliche Gelegenheit, dem Anfänger zugleich zu zeigen, wie sich die dabey erhaltenen algebraischen Ausdrücke auf eine sehr bequeme Art einrichten und gebrauchen ließen, wenn man nach denselben die Logarithmen der Zahlen, die trigonometrischen Linien und die ihnen zugehörigen Logarithmen berechnen wollte. Diese werden wir benutzen.

I) Von den Logarithmen und Exponentialgrößen.

---

§. 130.

Es soll hier gezeigt werden, wie sich der Logarithmus einer Zahl Z als eine Function dieser Zahl algebraisch darstellen, und was sich daraus folgern läßt. Damit könnten wir nun sogleich den Anfang machen, weil wir voraussetzen dürfen, daß unserem Leser die ersten Grundbegriffe von den Logarithmen schon aus den Elementen der allgemeinen Mathematik bekannt seyen. Wir wollen aber um des Anfängers willen auch diese ersten Grundbegriffe kurz und deutlich wiederhohlen, damit demselben die ganze Theorie von den Logarithmen, welche überhaupt hier allgemeiner behandelt wird, als es bey dem Unterrichte in den Elementen der allgemeinen Mathematik zu geschehen pflegt, vollständig vor Augen liege.

§. 131.

1) Wenn man eine beliebige Zahl e, welche größer oder kleiner als 1 ist, nach einander auf beliebige Potenzen, z. E. die mte, nte, pte ꝛc. erhebt; so sind diese Potenzen e^m, e^n, e^p ꝛc. wiederum Zahlen A, B, C ꝛc. und die Quantität derselben ist durch die Quantität der Zahl e und der Exponenten m, n, p ꝛc. bestimmt. Diese Potenzexponenten m, n, p ꝛc. nennt man aus bekannten Gründen **Logarithmen** der Zahlen A, B, C ꝛc. und bezeichnet sie durch das Zeichen l. oder log., welches man den Zahlen A, B, C ꝛc. vorsetzt, zu welchen die **Logarithmen** gehören; es ist demnach m = log A,

n =

$n = \log B$, $p = \log C$ ꝛc. Die Zahl e, von welcher die Zahlen A, B, C ꝛc. als Potenzen betrachtet werden, nennt man die **Basis** der diesen Zahlen zugehörigen Logarithmen m, n, p ꝛc., und diese Logarithmen selbst in Verbindung mit den ihnen zugehörigen Zahlen A, B, C ꝛc. machen ein auf die Basis e gegründetes **Logarithmensystem** aus.

2) "Ein solches **Logarithmensystem** ist durch dessen Basis e dergestalt bestimmt, "daß in ein und demselben Systeme zu einem Logarithmus nur eine einzige bestimmte "Zahl gehören kann, und in verschiedenen Systemen zu einerley Logarithmus verschie-"dene Zahlen gehören müssen."

Wenn z. E. in dem Systeme, dessen Basis e heißt, zu dem Logarithmus = m die Zahl A gehört; so kann es nun keine zweyte von A verschiedene Zahl Z mehr geben, die in diesem Systeme zu eben diesem Logarithmus = m gehörte. Wenn nehmlich $m = \log A$ ist, so ist $A = e^m$; sollte nun auch $m = \log Z$ seyn, so müßte $Z = e^m$ also $= A$ seyn, nicht aber verschieden von A. Wenn ferner in dem Systeme, dessen Basis = e ist, zu den Logarithmen m, n, p ꝛc. die Zahlen A, B, C ꝛc. gehören; so können nun in einem andern Systeme, dessen Basis E heißt, zu eben diesen Logarithmen m, n, p ꝛc. nicht wiederum dieselben Zahlen A, B, C ꝛc. gehören, sondern es müssen in diesem andern Systeme den Logarithmen m, n, p ꝛc. andere Zahlen A′. B′, C′ ꝛc. zugehören. Nach dem Systeme nehmlich, dessen Basis e heißt, ist $A = e^m$, $B = e^n$ ꝛc., nach dem andern aber, dessen Basis E heißt und größer oder kleiner als e ist, ist $A' = E^m$, $B' = E^n$ ꝛc., e^m aber kann nicht $= E^m$, und e^n kann nicht E^n ꝛc. seyn, folglich ist auch unmöglich $A = A'$, $B = B'$ ꝛc.

3) "In einem **Logarithmensysteme** muß der Logarithmus der Zahl 1 allemal "= 0, und der Logarithmus der Basis e jedesmal = 1 seyn."

Ersteres erhellet daraus, daß eine jede Zahl, welche einen Logarithmus haben soll, eine Potenz der Basis e seyn muß, und daß von einer Zahl e, die größer oder kleiner als 1 ist, keine Potenz = 1 seyn kann, als die, welche den Potenzenexponenten = 0 hat: weil also, es mag auch die Basis e seyn, welche sie wolle, blos $e^0 = 1$ seyn kann; so muß allemal $\log 1 = 0$ seyn. Das andere erhellet eben so leicht. Es soll ja der Logarithmus einer jeden Zahl derjenige Potenzenexponent seyn, welcher anzeigt, die wievielste Potenz von der Basis die Zahl ist; ist also eine Zahl $A = e^1$, so ist $\log A = 1$; da nun $A = e^1 = e$ ist, so ist auch $\log A = \log e = 1$.

"In

4) "In einem jeden Logarithmensysteme, dessen Basis $e > 1$ ist, gehören zu Logarithmen, welche ganze oder gebrochene **bejahte** Zahlen sind, allemal Zahlen, **welche** "**die Einheit übertreffen**, zu Logarithmen hingegen, welche ganze oder gebrochene "**verneinte** Zahlen sind, gehören allemal **ächte Brüche**."

Es mag nehmlich z was immer für eine ganze oder gebrochene **bejahte** Zahl bedeuten, so kann, wenn $e > 1$ ist, e^z unmöglich eine Zahl werden, welche kleiner als 1 ist; hingegen muß, wenn $(-z)$ irgend eine beliebige ganze oder gebrochene **verneinte** Zahl bedeutet, e^{-z} allemal $= \frac{1}{e^z}$ und also ein ächter Bruch seyn, sobald $e > 1$ ist.

5) "Umgekehrt sind in jedem Logarithmensysteme, dessen Basis $e < 1$ ist, die zu "**bejahten** Logarithmen gehörigen Zahlen **ächte Brüche**, die zu **verneinten** Logarithmen gehörigen Zahlen aber jedesmal Zahlen, **welche die Einheit übertreffen**."

Es mag nehmlich z was immer für eine ganze oder gebrochene **bejahte** Zahl seyn, so ist gewiß, wenn $e < 1$ und also ein ächter Bruch $\frac{m}{n}$ ist, e^z oder $\left(\frac{m}{n}\right)^z$ ein ächter Bruch; hingegen muß, wenn $(-z)$ irgend eine ganze oder gebrochene **verneinte** Zahl und e ein ächter Bruch $\frac{m}{n}$ ist, $e^{-z} = \left(\frac{m}{n}\right)^{-z} = \frac{1}{\frac{m^z}{n^z}} = \frac{n^z}{m^z}$ eine Zahl seyn, welche größer als 1 ist, weil nach der Voraussetzung $n > m$ seyn soll und also auch $n^z > m^z$ seyn muß.

6) "Man nimmt am füglichsten die Grundzahl $e > 1$ an, in welchem Falle dann "allemal das Gesetz in Nro. 4. Statt hat. Ueberdieß setzt man e allemal **bejahet**, "wodurch nur die **bejahten** Zahlen Logarithmen erhalten, die **verneinten** aber keine."

Sollen nehmlich Zahlen Logarithmen haben, so müssen sie als Potenzen der angenommenen Logarithmenbasis e, d. h. mit andern Worten, sie müssen als Glieder in der unendlich großen Reihe der Werthe angesehen werden können, welche die Function e^z für alle nur immer denkbaren reellen Werthe der absolut veränderlichen Größe z erhält. Nimmt man nun die Basis e als eine **bejahte** Zahl an, so erhält die Function e^z

a) für einen **jeden** Werth von z, welcher eine bejahte oder verneinte **ganze** Zahl ist, einen reellen und **bejahten** Werth; ebenso erhält sie

b) für einen jeden Werth von z, welcher eine in ihrem kürzesten Ausdrucke $\frac{m}{n}$ dargestellte bejahte oder verneinte **gebrochene** Zahl ist, ebenfalls einen reellen be-

bejahten Werth, und nur alsdann, wenn der Nenner n eine **gerade** Zahl ist, entsteht neben dem **bejahten** Werthe auch noch ein ebenso großer **verneinter**.

Es giebt also die Function e^z, wenn e eine **bejahte** Zahl bedeutet, für einen **jeden** beliebigen reellen Werth von z einen **bejahten** Werth, und es ist die Anzahl der ihr möglichen **bejahten** Werthe durch gar nichts **beschränkt**: hingegen giebt sie nur für gewisse bestimmte Werthe von z **verneinte** Werthe, und es ist demnach die Anzahl der ihr möglichen **verneinten** Werthe **beschränkt**. Diese Anzahl ist bey weitem kleiner, als die Anzahl der ihr möglichen **bejahten** Werthe, denn es entspricht einem jeden **verneinten** Werthe, welchen die Function e^z erhalten kann, auch allemal ein ebenso großer **bejahter**, aber für jeden **bejahten** Werth derselben läßt sich nicht auch allemal ein ebenso großer **verneinter** aufzeigen. Da nun die Function e^z, in der e **bejaht** ist, nicht für einen jeden Werth von z einen **verneinten** Werth erhalten kann; so folgt nothwendig, daß, wenn $-Z$ eine negative Zahl bedeutet, für einen **jeden** Werth dieser Zahl die Gleichung $-Z = e^z$ unmöglich bestehen kann. Ist aber dieses unmöglich, so ist es auch unmöglich zu behaupten, daß eine **jede** negative Zahl $-Z$ als eine Potenz der bejahten Basis e betrachtet werden und einen Logarithmus haben könne. Hiermit ist gezeigt, daß bey einer festgesetzten **bejahten** Basis e ganz gewiß kein Logarithmensystem für **alle bejahten** und **verneinten** Zahlen zugleich möglich ist, daß aber wohl eins, welches für **alle bejahten** Zahlen Logarithmen angiebt, als möglich gedacht werden kann. Es ist aber über die Unmöglichkeit der Logarithmen **verneinter** Zahlen noch mehr zu sagen, welches jedoch für den gegenwärtigen Ort zu weitläuftig seyn würde, und in einer eigens dazu bestimmten Abhandlung geliefert werden soll. Leibnitii et Joh. Bernoulli commercium epistol. Lausann. et Genev 1745. B. II., enthält die Streitigkeit über die Logarithmen **negativer** Zahlen. **Leibnitz** leugnet dieselben und **Bernoulli** vertheidigt sie. Man kann auch hierüber nachlesen: Frid. Mallet de Logarithmis numerorum negat. Nova Acta R. S. S. Upsaliensis Vol. IV. Upsal, 1784. pag. 205. **Bernhard** Friedr. Thibaut dissertatio: historiam controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos sistens. Gott. 1797. In dem Leipziger Magazin für Mathemat., 4. St. 1786., sucht **Kästner** die Unmöglichkeit der Logarithmen **verneinter** Zahlen aus den ersten arithmetischen Begriffen abzuleiten.

7) "In einem jeden Logarithmensysteme ist der Logarithmus eines aus zwey Zahlen "A und B sich ergebenden Productes AB der Summe der Logarithmen der Factoren "gleich: $\log AB = \log A + \log B$."

Wenn

Wenn nehmlich die Basis des Systems = e, der log A = m, der log B = n ist; so ist $A = e^m$, $B = e^n$, $AB = e^m \times e^n = e^{m+n}$. Da nun m + n der Logarithmus von AB, m + n aber auch = log A + log B ist; so ist der behauptete Satz richtig.

8) "In jedem Logarithmensysteme ist der Logarithmus des durch die Division zweyer "Zahlen A und B sich ergebenden Quotienten $\frac{A}{B}$ der Differenz gleich, die man er"hält, wenn man den Logarithmus des Divisors B von dem Logarithmus des Dividen"dus A abzieht: $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$."

Ist nehmlich die Basis = e, der log A = m, der log B = n; so ist $A = e^m$, $B = e^n$, $\frac{A}{B} = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$. Da nun m − n der Logarithmus der Zahl $\frac{A}{B}$, m − n aber auch = log A − log B ist; so ist hiermit der Satz erwiesen.

9) "In einem jeden Logarithmensysteme ist der Logarithmus der nten Potenz einer "Zahl A dem nfachen Logarithmus der Zahl A gleich: $\log A^n = n \log A$."

Wenn die Basis = e und der log A = m ist, so ist $A = e^m$, folglich $A^n = (e^m)^n = e^{mn}$. Weil aber m n der Logarithmus der Zahl A^n und ferner $n.m = n.\log A$ ist; so hat man $\log A^n = n \log A$.

10) "In jedem Logarithmensysteme bleibt der Satz in Nro. 9) auch alsdann noch "wahr, wenn n irgend ein beliebiger Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ ist: $\log A^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\mu}{\nu}.\log A$ und "$\log A^{\frac{1}{\nu}}$ oder $\log \sqrt[\nu]{A} = \frac{1}{\nu}.\log A$."

Wenn die Basis = e und log A = m ist, so muß $A = e^m$ seyn. Nun setze man $A^{\frac{\mu}{\nu}} = B$, dann ist $A^\mu = B^\nu$; für die letztere Gleichung kann man aber nach Nro. 9) diese setzen: $\mu \log A = \nu \log B$; also ist $\frac{\mu}{\nu} \log A = \log B$, welches, weil $B = A^{\frac{\mu}{\nu}}$ ist, $\frac{\mu}{\nu}.\log A = \log A^{\frac{\mu}{\nu}}$ giebt. Für $\mu = 1$ aber hat man: $\log A^{\frac{1}{\nu}}$ oder $\log \sqrt[\nu]{A} = \frac{1}{\nu} \log A$.

11) "Aus den in Nro. 7) bis Nro. 10) angegebenen Eigenschaften der Logarithmen "ergiebt sich, daß die Logarithmen für den Calcul äusserst vortheilhafte Zahlen werden

"kön-

"können, wenn man im Stande ist, für alle bejahten Zahlen nach irgend einer Basis "e Logarithmen zu berechnen."

Man kann alsdann Tafeln verfertigen, in welchen der Reihe nach die bejahten ganzen Zahlen, darneben aber die für die angenommene Basis e ihnen zugehörigen Logarithmen stehen. Vermittelst dieser Tafeln aber kann man hernach zu den Producten aus großen Zahlen, ohne daß man die beschwerliche Multiplicationsrechnung vorzunehmen hat, durch die viel leichtere Addition ihrer Logarithmen (Nro 7.), und zu den Quotienten aus großen Zahlen durch die Subtraction des Logarithmus des Divisors von dem des Dividendus (Nro. 8.) gelangen; man kann die beschwerliche Potenzenerhebung einer Zahl durch eine leichte Vervielfältigung ihres Logarithmus (Nro. 9.), und die Ausziehung einer jeden Wurzel aus einer Zahl durch eine Division ihres Logarithmus (Nro. 10.) verrichten. Ja, was noch mehr ist, man kann alsdann aus Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe als Potenzenexponent vorkommt, die öfters nur sehr schwer, öfters auch wohl gar nicht ohne Logarithmen gelöst werden können, vermittelst der Logarithmen den Werth der unbekannten Größe auf eine leichte Art finden. Ist z. E. die Gleichung diese: $A^x = C$, ; so muß nach Nro. 2) $\log A^x = \log C$ und nach Nro. 7) $x \log A = \log C$ seyn, woraus dann $x = \frac{\log C}{\log A}$ folgt. Dieser vortheilhafte Gebrauch der Logarithmen schränkt sich aber, wenn man blos Tafeln hat, in welchen die Logarithmen der ganzen Zahlen stehen, nicht etwa blos auf die Rechnungen mit ganzen Zahlen ein, denn durch die Logarithmen der ganzen Zahlen m und n ist auch der Logarithmus eines jeden Bruchs $\frac{m}{n}$ gegeben, weil $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$ seyn muß (Nro. 8).

12) "Es können aber, man mag auch was immer für eine bejahte Zahl e als Basis "des Logarithmensystems festsetzen, die Logarithmen aller ganzen bejahten Zahlen wirk"lich berechnet werden."

Es reicht hier zu, wenn dieses nur für den Fall gezeigt wird, wenn e eine ganze bejahte Zahl ist. Es sey also e eine ganze bejahte Zahl. Man nehme dieselbe und erhebe sie der Ordnung nach auf die 2te, 3te, 4te ꝛc. Potenz; die Potenzen e^2, e^3, e^4 ꝛc. werden wiederum ganze bejahte Zahlen seyn. Ist nun eine ganze bejahte Zahl Z, deren Logarithmus zu bestimmen ist, eine von den Zahlen e^2, e^3, e^4 ꝛc., z. E. $= e^m$; so ist $\log Z = m$. Ist aber dieses der Fall nicht, so lassen sich gewiß unter diesen Zahlen zwey Zahlen A und B angeben, zwischen welche Z fällt, und zwischen die Logarithmen m und n dieser Zahlen muß dann auch der log Z fallen. Man suche also von beyden Zahlen A und B die zwischen sie fallende mittlere geometrische Proportionalzahl $C = \sqrt{AB}$, und

und auch den $\log C = \log \sqrt{AB} = \frac{1}{2} . \log AB = \frac{m+n}{2}$, welchen Logarithmus wir durch p bezeichnen wollen. Jetzt muß Z entweder = C seyn, und dann ist $\log Z = p$, oder es muß zwischen eins von den beyden Paaren der Zahlen A, C und C, B fallen. Es sey letzteres, und zwar falle Z zwischen das Paar C, B. Zwischen beyden suche man wiederum die mittlere geometrische Proportionalzahl $D = \sqrt{CB}$, und auch $\log D = \log \sqrt{CB} = \frac{1}{2} \log C.B = \frac{n+p}{2} = q$. Ist nun Z = D, so ist $\log Z = q$; ist aber Z nicht = D, so fällt es zwischen eins von den beyden Paaren der Zahlen C, D oder D, B. Man kann also hier wiederum so verfahren, wie vorhin. Fährt man aber auf diesem Wege fort, so muß man endlich zu Gränzzahlen gelangen, die von einander so wenig unterschieden sind, daß der Unterschied nicht zu achten ist, und daß mithin die eine oder die andere für Z selbst genommen werden kann. Da nun jedesmal mit den Gränzzahlen auch die Logarithmen gefunden werden können, welche den Gränzzahlen zugehören; so wird, wenn eine Gränzzahl gefunden worden ist, welche der Zahl Z nahe genug kommt, der dieser Gränzzahl zugehörige Logarithmus ohne erheblichen Fehler als der wahre Logarithmus der Zahl Z angesehen werden können.

13) "Auf die in Nro. 12) erwähnte Art ist ein Logarithmensystem für die Basis "e = 10 berechnet worden, welches wegen seines allgemeinen Gebrauchs in der Ma"thematik das gemeine, (vulgäre), oder auch, nach seinem Erfinder, das **Brig**"**gische** System genannt wird."

Heinrich **Brigge** berechnete auf die erwähnte Weise die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalstellen, und **Adrian Vlacq** füllte die Lücke von 20000 bis 90000 aus, berechnete aber die Logarithmen der Zahlen blos mit 10 Decimalstellen. Hier folgt als ein Beyspiel der weitläuftigen und beschwerlichen Arbeit die Berechnung des Logarithmus der Zahl 5, welche zwischen die beyden Gränzzahlen 1 und 10 fällt und deren Logarithmus also zwischen 0 und 1 fallen muß. Die mittlere Proportionalzahl zwischen 1 und 10 ist $= \sqrt{1.10} = 3{,}162277$, und der $\log 3{,}162277$ ist $= \frac{0+1}{2} = 0{,}5$. Nun fällt die Zahl 5 zwischen 3,162277 und 10, und log 5 zwischen 0, 5 und 1. Die mittlere Proportionalzahl zwischen 3,162277 und 10 ist $= \sqrt{3{,}162277 \times 10} = 5{,}623413$, und $\log 5{,}623413$ ist $= \frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$. Jetzt fällt wiederum 5 zwischen 3,162277 und 5,623413, und also log 5 zwischen 0,5 und 0, 75. So fahre man nun fort und suche die Zahl 5 zwischen immer engere Gränzzahlen einzuschließen, wie hier gezeigt ist. Wenn ist:

A = 1,000000,	log A = 0,0000000;	
B = 10,000000,	log B = 1,0000000;	so sey nun
		C = $\sqrt{AB}$,

alsdann wird:

C = 3,162277,	log C = 0,5000000;	D = $\sqrt{BC}$ d. h.
D = 5,623413,	log D = 0,7500000;	E = $\sqrt{CD}$
E = 4,216964,	log E = 0,6250000;	F = $\sqrt{DE}$
F = 4,869674,	log F = 0,6875000;	G = $\sqrt{DF}$
G = 5,232991,	log G = 0,7187500;	H = $\sqrt{FG}$
H = 5,048065,	log H = 0,7031250;	I = $\sqrt{FH}$
I = 4,958069,	log I = 0,6953125;	K = $\sqrt{HI}$
K = 5,002865,	log K = 0,6992187;	L = $\sqrt{IK}$
L = 4,980416,	log L = 0,6972656;	M = $\sqrt{KL}$
M = 4,991627,	log M = 0,6982421;	N = $\sqrt{KM}$
N = 4,997242,	log N = 0,6987304;	O = $\sqrt{KN}$
O = 5,600052,	log O = 0,6989745;	P = $\sqrt{NO}$
P = 4,998647,	log P = 0,6988525;	Q = $\sqrt{OP}$
Q = 4,999359,	log Q = 0,6989135;	R = $\sqrt{OQ}$
R = 4,999701,	log R = 0,6989440;	S = $\sqrt{OR}$
S = 4,999876,	log S = 0,6989592;	T = $\sqrt{OS}$
T = 4,999963,	log T = 0,6989668;	V = $\sqrt{OT}$
V = 5,000008,	log V = 0,6989707;	W = $\sqrt{TV}$
W = 4,999984,	log W = 0,6989687;	X = $\sqrt{WV}$
X = 4,999997,	log X = 0,6989697;	P = $\sqrt{VX}$
Y = 5,000003,	log Y = 0,6989702;	Z = $\sqrt{XY}$
Z = 5,000000,	log Z = 0,6989700;	

Diese Berechnung zeigt, daß die Zahl Z nicht mehr um $\frac{1}{1000000}$ von der Zahl 5 unterschieden ist, und daß man also ohne erheblichen Fehler log 5,000000... oder 0,6989700 als den wahren Logarithmus der Zahl 5 annehmen kann. Es ist also beynahe $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$.

Es war aber nicht nöthig, alle Logarithmen auf einem so weitläuftigen und beschwerlichen Wege zu berechnen, sondern es war blos eine solche Berechnung für die Logarithmen

men der Primzahlen erforderlich, denn die Logarithmen der aus den Primzahlen zusammengesetzten Zahlen ergeben sich nach Nro. 7. durch eine bloße Addition der Logarithmen derjenigen Primzahlen, welche Factoren der zusammengesetzten Zahlen sind. Unter den Logarithmen der Primzahlen aber ergab sich auch ohne weitere Berechnung der Logarithmus der Zahl 2 nach Nro. 8). Es ist nehmlich $\log 10 = 1{,}0000000$, $\log 5 = 0{,}6989700$, also $\log \frac{10}{5}$ oder $\log 2 = \log 10 - \log 5 = 1{,}0000000 - 0{,}6989700 = 0{,}3010300$. Aus $\log 2$ folgt nun: $\log 4 = 2 \log 2 = 0{,}6020600$; $\log 8 = \log 2 + \log 4 = 0{,}9030900$ ꝛc.

14) "Wenn die Logarithmen der Zahlen für irgend ein System berechnet sind, so lassen sich aus demselben die Logarithmen für ein jedes anderes System ableiten."

Es seyen für das System, dessen Basis $= e$ ist, die Logarithmen der Zahlen bekannt und der Logarithmus irgend einer beliebigen bejahten Zahl Z sey nach demselben $= m$. Will man nun für eben diese Zahl Z den Logarithmus des Systems berechnen, dessen Basis $= E$ ist; so darf man nur überlegen, daß nach dem ersteren Systeme $Z = e^m$, nach dem andern aber $Z = E^x$ seyn muß, wo x den unbekannten Logarithmus bedeutet. Hieraus fließt denn die Gleichung $\log e^m = \log E^x$, aus welcher ferner nach Nro. 9) diese wird: $m \log e = x \log E$. Nimmt man nun nach dem Systeme, dessen Basis e heißt, und für welches die Logarithmen bekannt seyn sollen, die Logarithmen; so wird $\log e = 1$ (Nro. 3) und auch $\log E$ wird eine bekannte Zahl. Es verwandelt sich also, wenn man $\log Z$ statt m setzt, die vorige Gleichung in folgende:

$$\log Z = x \log E,$$

woraus nun $\frac{\log Z}{\log E} = x$ oder auch

$$\frac{1}{\log E} \cdot \log Z = x \text{ folgt.}$$

Man darf also nur, um den Logarithmus einer Zahl Z für die neue Basis E zu finden, den Logarithmus dieser Zahl Z aus dem schon berechneten Logarithmensysteme nehmen und mit der Zahl multipliciren, die entsteht, wenn man aus dem schon berechneten Logarithmensysteme den Logarithmus der neuen Basis E nimmt, und in die Einheit dividirt.

15) "Man nennt die Zahl $\frac{1}{\log E}$ den **Modul** des Systems, dessen **Basis** die Zahl "E seyn soll."

Es

Es ist also, wenn man die Briggischen Logarithmen für das System, dessen Basis E = 2 seyn soll, moduliren will, der dazu erforderliche **Modul**

$$= \frac{1}{\log \text{Brigg.} 2} = \frac{1}{0{,}3010300} = 3{,}3219277.$$

16) "Die Logarithmen zweyer Zahlen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{z}$ in dem Systeme, dessen Basis e "heißt, verhalten sich eben so zu einander, als wie die Logarithmen eben dieser beyden "Zahlen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{z}$ in einem andern Systeme, dessen Basis E ist."

Es sey in dem Systeme, dessen Basis e heißt, $\log \mathfrak{Z} = \mu$ und $\log \mathfrak{z} = \nu$, in dem andern aber, welches die Basis E hat, sey $\text{Log } \mathfrak{Z} = m$ und $\text{Log } \mathfrak{z} = n$. Nun muß in dem ersten Systeme $\mathfrak{Z} = e^{\mu}$ und $\mathfrak{z} = e^{\nu}$ seyn, und ebenso muß in dem andern Systeme $\mathfrak{Z} = E^{m}$ und $\mathfrak{z} = E^{n}$ seyn. Daraus aber folgen die Gleichungen $e^{\mu} = E^{m}$ und $e^{\nu} = E^{n}$, und ferner ist

$$e = E^{\frac{m}{\mu}} \text{ und } e = E^{\frac{n}{\nu}};$$

mithin muß auch $E^{\frac{m}{\mu}} = E^{\frac{n}{\nu}}$ und $\frac{m}{\mu} = \frac{n}{\nu}$ seyn. Also verhält sich $m : \mu = n : \nu$ d. h.

$$\text{Log } \mathfrak{Z} : \log \mathfrak{Z} = \text{Log } \mathfrak{z} : \log \mathfrak{z} \text{ oder}$$
$$\text{Log } \mathfrak{Z} : \text{Log } \mathfrak{z} = \log \mathfrak{Z} : \log \mathfrak{z}.$$

Dieß sind nun die Hauptsätze von den Logarithmen, welche gewöhnlich in der Elementarmathematik vorgetragen werden, und die wir dem Anfänger wieder in das Gedächtniß zurückrufen wollten. Jetzt gehen wir zur algebraischen Darstellung der Logarithmen über.

§. 132.

"Es soll gezeigt werden, wie man für ein jedes Logarithmensystem, dessen Basis irgend eine beliebige **bejahte** Zahl e ist, den einer jeden beliebigen **bejahten** Zahl $\mathfrak{Z}$ zugehörigen Logarithmus als eine Function Z der Zahl $\mathfrak{Z}$ algebraisch darstellen kann."

1) Wenn man die bejahte Zahl $\mathfrak{Z}$ als absolut veränderlich annimmt, so wird der dazu gehörige Logarithmus eine Function Z von $\mathfrak{Z}$, und diese Function Z ist, wie wir wissen, von der Art, daß sie für einen jeden beliebigen bejahten Werth von $\mathfrak{Z}$ einen Werth erhalten muß, welcher der Gleichung $e^{Z} = \mathfrak{Z}$ ein Genüge leistet. Man kennt also eine Gleichung zwischen der Function Z und der absolut veränderlichen Größe $\mathfrak{Z}$; aus dieser aber kann man wegen ihrer besondern Form keinen algebraischen Ausdruck für die Function Z ablei-

ableiten. Darum muß man versuchen, einen solchen Ausdruck auf eine andere Weise zu erhalten. Wenn man dieses thut, so entdeckt sich folgender sehr bequeme Weg:

2) Man setze $\mathfrak{Z} = 1 + z$ und nehme z als veränderlich an, stelle sich also $\mathfrak{Z}$ als eine Function derjenigen Zahl z vor, die jedesmal anzeigt, um wieviel die **bejahte** Zahl $\mathfrak{Z}$ größer oder kleiner als 1 ist. Da man sich unter Z lauter **bejahte** Zahlen zu denken hat, weil von solchen nur Logarithmen Statt haben können (§. 131. Nro. 6.); so ist klar, daß in dem Ausdrucke $1 + z$, welcher $= \mathfrak{Z}$ seyn soll, die **bejahten** Werthe von z sowohl **ganze** als **gebrochene** Zahlen seyn können, die **verneinten** Werthe von z aber allemal als **ächte Brüche** vorgestellt werden müssen. Ferner setze man, es sey für einen jeden beliebigen Werth, welchen z in dem Ausdrucke $1 + z = \mathfrak{Z}$ erhalten kann, die Function

$$Z, \text{ oder } \log \mathfrak{Z}, \text{ oder } \log (1 + z)$$
$$= Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + \ldots,$$

und suche die Coefficienten B, C, D ..., welche hier noch unbestimmte und von z unabhängige Größen bedeuten, zu bestimmen. Ein absolutes Glied A darf man in dem für $\log \mathfrak{Z}$ hier aufgestellten Ausdrucke darum nicht setzen, weil sonst die Gleichung nicht für einen jeden Werth von z bestehen könnte. Für $z = 0$ nehmlich gäbe sie, wenn sie ein absolutes Glied A hätte, $\log (1 + 0)$ oder $\log 1 = A$, welches einer allgemeinen Eigenschaft der Logarithmen widerspräche, der in §. 131. Nro. 3) angegebenen nehmlich, nach welcher in **jedem** Logarithmensysteme $\log 1 = 0$ seyn muß.

3) Die Schlüsse nun, vermittelst welcher man zur Bestimmung der Werthe der Größen B, C, D ... gelangen kann, sind folgende:

a) Wenn nach der in Nro. 2) gemachten Hypothese für einen jeden Werth von z, für welchen $\mathfrak{Z}$ eine **bejahte** Zahl bleibt, die Function

$$Z, \text{ oder } \log \mathfrak{Z}, \text{ oder } \log (1 + z)$$
$$= Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + \ldots$$

seyn soll; so muß, wenn man z um einen beliebigen aliquoten Theil ω ändert, auch für einen jeden Werth von z und ω, wofür $1 + z + \omega$ eine **bejahte** Zahl $\mathfrak{Z}'$ bleibt, die Gleichung:

$$Z', \text{ oder } \log \mathfrak{Z}', \text{ oder } \log (1 + z + \omega)$$
$$= B(z + \omega) + C(z + \omega)^2 + D(z + \omega)^3 + E(z + \omega)^4 + \ldots$$
$$+ P(z + \omega)^n + Q(z + \omega)^{n+1} + \ldots,$$

zugelassen werden. Es verwandelt sich aber diese Gleichung durch die Entwickelung der Potenzen von $z + \omega$ in folgende:

Z', oder $\log \mathfrak{Z}'$, oder $\log(1+z+\omega)$

$$
= \left\{ \begin{array}{l} Bz \\ +Cz^2 \\ +Dz^3 \\ +Ez^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +Pz^n \\ +Qz^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.
\left. \begin{array}{l} +B \\ +2Cz \\ +3Dz^2 \\ +4Ez^3 \\ \\ \\ \\ +nPz^{n-1} \\ +(n+1)Qz^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \omega
\left. \begin{array}{l} +C \\ +3Dz \\ +6Ez^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}Pz^{n-2} \\ +\frac{(n+1).n}{1\,.\,2}Qz^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right| \omega^2 + \ldots
$$

b) Nennt man in dieser den in ω^2 multiplicirten Coefficienten kurz K, und zieht von ihr die in Nro. 2) angenommene Gleichung ab; so ergiebt sich diese:

$Z' - Z$, oder $\log \mathfrak{Z}' - \log \mathfrak{Z}$, oder $\log(1+z+\omega) - \log(1+z)$

$$= [B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + nPz^{n-1} + (n+1)Qz^n + \ldots]\omega$$
$$+ K\omega^2 + \ldots\ldots$$

Weil aber $\log(1+z+\omega) - \log(1+z)$ nach §. 131. Nro. 8) $= \log\left(\frac{1+z+\omega}{1+z}\right)$ d. h. $= \log\left(1+\frac{\omega}{1+z}\right)$ gesetzt werden kann, so läßt sich auch statt der vorigen Gleichung diese setzen:

$Z' - Z$, oder $\log \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}}$, oder $\log\left(1+\frac{\omega}{1+z}\right)$

$$= [B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + Pz^{n-1} + (n+1)Qz^n + \ldots]\omega$$
$$+ K\omega^2 + \ldots\ldots$$

c) Hier-

c) Hierzu nehme man nun, daß $\log\left(1+\frac{\omega}{1+z}\right)$ vermöge der hypothetischen Gleichung in Nro. 2), wenn man $\frac{\omega}{1+z}$ statt z setzt, auch noch so ausgedrückt werden kann:

$$\log\left(1+\frac{\omega}{1+z}\right)$$

$$= B\cdot\frac{\omega}{1+z} + C\left(\frac{\omega}{1+z}\right)^2 + D\cdot\left(\frac{\omega}{1+z}\right)^3 + \ldots + P\cdot\left(\frac{\omega}{1+z}\right)^n + Q\cdot\left(\frac{\omega}{1+z}\right)^{n+1} + \ldots,$$

und setze die beyden für $\log\left(1+\frac{\omega}{1+z}\right)$ jetzt erhaltenen Ausdrücke einander gleich; dann erhält man die nachstehende Gleichung:

$$[B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + nPz^{n-1} + (n+1)Qz^n + \ldots]\cdot\omega + K\omega^2 + \ldots$$
$$= \frac{B}{1+z}\cdot\omega + \frac{C}{(1+z)^2}\cdot\omega^2 + \ldots$$

d) Da nun beyde für $\log\left(1+\frac{\omega}{1+z}\right)$ gesuchten Ausdrücke für einen jeden beliebigen Werth, welchen ω als ein aliquoter Theil von z erhalten kann, gesucht sind und gelten sollen, diese beyden Ausdrücke in der hier zuletzt angegebenen Gleichung aber unmöglich für alle Werthe von ω einander gleich seyn könnten, wenn nicht die in einerley Potenzen von ω multiplicirten Coefficienten gleich wären (§. 21.); so muß man ferner auch folgende Gleichung zugeben:

$$B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + nPz^{n-1} + (n+1)Qz^n + \ldots = \frac{B}{1+z},$$

und zwar muß diese für einen jeden beliebigen Werth, welchen z in dem Ausdrucke $\log(1+z)$ erhalten kann, gültig seyn.

e) Dieß ist nun eine Gleichung, aus der sich Gleichungen für die Größen B, C, D... ableiten lassen. Bringt man nehmlich $1+z$ auf die andere Seite und multiplicirt ein jedes Glied derselben, so erhält man:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} B & +2C & z+3D & z^2 + 4E & z^3 + \ldots + (n+1)Q & z^n + \ldots = B, \\ & +B & +2C & +3D & +n.P & \end{array}$$

woraus, wenn man auf beyden Seiten B abzieht, die Gleichung

$$(2C+B)z + (3D+2C)z^2 + (4E+3D)z^3 + \ldots + \left((n+1)Q + nP\right)z^n + \ldots = 0$$

folgt. Diese Gleichung ist aus einer gefolgert, die für einen jeden Werth, welchen z in dem Ausdrucke $\log(1+z)$ erhalten kann, bestehen soll; sie muß also selbst

für

für einen jeden dieser Werthe von z als gültig angenommen werden. Darum muß man aber auch alle Bedingungen zugeben, unter welchen dieses geschehen kann, und also nach §. 20. setzen, daß in ihr ein jeder Coefficient der Potenzen von z den Werth = 0 habe, daß also sey:

$$\left.\begin{array}{l} 2C + B = 0, \\ 3D + 2C = 0, \\ 4E + 3D = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (n+1)Q + nP = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \text{Hieraus folgt:} \left\{\begin{array}{l} C = -\frac{1}{2}B, \\ D = \frac{1}{3}B, \\ E = -\frac{1}{4}B, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q = -\frac{n}{n+1}.P, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

4) Jetzt setze man diese Werthe von C, D, E . . . Q . . . in die in Nro. 2) angenommene Gleichung, dann wird

$$Z, \text{ oder } \log \mathfrak{Z}, \text{ oder } \log(1+z)$$

$$= Bz - \frac{1}{2}Bz^2 + \frac{1}{3}Bz^3 - \frac{1}{4}Bz^4 + \ldots - \frac{n}{n+1}Pz^n \ldots;$$

und daraus sieht man ohne weitere Erläuterung, daß der Logarithmus Z einer jeden in der Form $1+z$ dargestellten bejahten Zahl $\mathfrak{Z}$

$$= B\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6 + \ldots - \frac{1}{2r}z^{2r} + \frac{1}{2r+1}z^{2r+1} - \ldots\right)$$

seyn muß. In diesem Ausdrucke ist nun noch die Größe B zu bestimmen; dieses kann aber leicht vermittelst des Ausdruckes selbst auf folgende Weise geschehen:

5) Man setze, die Zahl $\mathfrak{Z}$ oder $1+z$ sey der Basis e des Systems gleich; dann ist $\log(1+z) = \log e = 1$ (§. 131. Nro. 3), und statt z kann man, wegen $1+z = e$, den Werth $e-1$ setzen. Dafür erhält man nun aus der vorigen Gleichung diese:

$$1 = B\left(e - 1 - \frac{(e-1)^2}{2} + \frac{(e-1)^3}{3} - \frac{(e-1)^4}{4} + \ldots - \frac{(e-1)^{2r}}{2r} + \frac{(e-1)^{2r+1}}{2r+1} - \ldots\right),$$

wor-

woraus nun ferner die Größe

$$B = \frac{1}{e-1 - \frac{1}{2}(e-1)^2 + \frac{1}{3}(e-1)^3 - \frac{1}{4}(e-1)^4 + \ldots - \frac{1}{2r}(e-1)^{2r} + \frac{1}{2r+1}(e-1)^{2r+1} - \ldots}$$

folgt. Es ist, wie man sieht, B eine von der Basis des Logarithmensystems abhängige Größe und also bestimmt, wenn e bestimmt ist.

So ist nun gezeigt, wie sich der Logarithmus einer jeden in der Form $1 + z$ dargestellten bejahten Zahl Z als eine Function der Zahl, oder eigentlich, als eine Function desjenigen Theils z der Zahl Z darstellen läßt, welcher anzeigt, um wie viel die Zahl Z grösser oder kleiner als die Einheit ist. Da sich aber der Logarithmus als eine Function der Zahl algebraisch darstellen läßt, so muß sich auch umgekehrt die Zahl als eine Function des Logarithmus algebraisch darstellen lassen.

§. 133.

"Es soll gezeigt werden, wie sich für ein jedes Logarithmensystem, dessen Basis eine "beliebige **bejahte** Zahl e ist, die einem beliebigen Logarithmus Z zugehörige **bejahte** "Zahl Z als eine Function dieses Logarithmus algebraisch darstellen läßt."

1) Man setze, es sey eine jede bejahte Zahl Z oder $1 + z$ eine Function ihres Logarithmus Z von der Form

$$1 + bZ + cZ^2 + dZ^3 + eZ^4 + \ldots + pZ^n + qZ^{n+1} + \ldots$$

und es seyen die Coefficienten b, c, d ... in derselben Größen, die von Z unabhängig sind; die Anzahl der Glieder nehme man unbestimmt groß an. Daß man, wie bey dieser Hypothese geschieht, einem algebraischen Ausdrucke, welcher eine jede bejahte Zahl Z als eine Function ihres Logarithmus darstellen soll, ein absolutes Glied $= 1$ geben muß, dieses ist leicht einzusehen. Wenn nehmlich der Logarithmus $=$ Z den Werth $= 0$ erhält, so muß der Ausdruck, welcher die ihm zugehörige Zahl Z darstellt, eine Zahl Z $= 1$ geben, weil $0 = \log 1$ ist (§. 131. Nro. 3); dieses aber würde der angenommene Ausdruck nicht geben können, wenn wir ihm nicht das absolute Glied $= 1$ gäben.

2) Nun suche man die Werthe der Coefficienten b, c, d ... zu bestimmen. Es kann dieses auf verschiedenen Wegen geschehen; wir wählen folgenden:

a) Man nehme die aus der Hypothese in Nro. 1. fließende Gleichung

$$Z = 1 + bZ + cZ^2 + dZ^3 + eZ^4 + \ldots + pZ^n + qZ^{n+1} + \ldots \quad (h),$$

 und

und setze in derselben statt $\mathfrak{Z}$ den Ausdruck $1 + z$, statt Z aber den im vorigen §. Nro. 4) für $Z = \log \mathfrak{Z} = \log (1 + z)$ gefundenen Ausdruck. Dadurch erhält man nun die Gleichung

$$1 + z = 1 + bB.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots) + cB^2.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^2$$
$$+ dB^3.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^3 + eB^4.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^4$$
$$+ \ldots\ldots + pB^n.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^n + \ldots\ldots$$

welche, wenn man sie auf o zurückführt, so aussieht:

$$0 = -z + bB.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots) + cB^2.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^2$$
$$+ dB^3.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^3 + eB^4(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^4$$
$$+ \ldots\ldots + pB^n.(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots)^n + \ldots\ldots$$

b) In dieser Gleichung entwickele man nun die Potenzen des Ausdruckes

$$z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots\ldots = z(1 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{3}z^2 - \tfrac{1}{4}z^3 + \ldots)$$

nach §. 31. Nro. 16). Man erhält hierbey:

$$z^2(1 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{3}z^2 - \tfrac{1}{4}z^3 + \ldots)^2 = z^2 - z^3 + \tfrac{11}{12}z^4 - \tfrac{10}{12}z^5 + \tfrac{137}{180}z^6 - \ldots,$$
$$z^3(1 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{3}z^2 - \tfrac{1}{4}z^3 + \ldots)^3 = z^3 - \tfrac{3}{2}z^4 + \tfrac{7}{4}z^5 - \tfrac{45}{32}z^6 + \ldots,$$
$$z^4(1 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{3}z^2 - \tfrac{1}{4}z^3 + \ldots)^4 = z^4 - 2z^5 + \tfrac{17}{6}z^6 - \ldots,$$
$$z^5(1 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{3}z^2 - \tfrac{1}{4}z^3 + \ldots)^5 = z^5 - \tfrac{5}{2}z^6 + \ldots,$$

u. s. w.

Es wird also die Gleichung, wenn man die Coefficienten gehörig einmultiplicirt und alles nach Potenzen von z ordnet, diese:

$$0 = \left\{\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} B.b & -\tfrac{1}{2}B.b & +\tfrac{1}{3}B.b & -\tfrac{1}{4}B.b & +\tfrac{1}{5}B.b & -\tfrac{1}{6}B.b & + \ldots \\ -1 & +B^2.c & -B^2.c & +\tfrac{11}{12}B^2.c & -\tfrac{10}{12}B^2.c & +\tfrac{137}{180}B^2.c & - \ldots \\ & & +B^3.d & -\tfrac{3}{2}B^3.d & +\tfrac{7}{4}B^3.d & -\tfrac{45}{32}B^3.d & + \ldots \\ & & & +B^4.e & -2B^4.e & +\tfrac{17}{6}B^4.e & - \ldots \\ & & & & +B^5.f & -\tfrac{5}{2}B^5.f & + \ldots \\ & & & & & + & \vdots \end{array}\right.$$

(die einzelnen Spalten sind der Reihe nach mit z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6 multipliziert: $[\ldots]z - [\ldots].z^2 + [\ldots].z^3 - [\ldots].z^4 + [\ldots].z^5 - [\ldots].z^6 + \ldots$)

c) Nun überlege man, daß als eine nothwendige Folge aus der in Nro. 1) gemachten Hypothese angenommen werden muß, es sey die vorige Gleichung für alle nur immer denkbaren Werthe, welche z in dem Ausdrucke $\log (1 + z)$ nach §. 132. Nro. 2) erhal-

erhalten kann, gültig, daß aber dieß bey der erwähnten Gleichung nach §. 20. doch nicht möglich ist, wenn man nicht annimmt, es sey ein jeder Coefficient der Potenzen von z für sich genommen = 0: dann sieht man, daß es die Hypothese mit sich bringt, folgende Gleichung als gültig anzunehmen:

$$Bb - 1 = 0,$$
$$-\tfrac{1}{2}Bb + B^2.c = 0,$$
$$\tfrac{1}{3}Bb - B^2.c + B^3.d = 0,$$
$$-\tfrac{1}{4}Bb + \tfrac{11}{12}B^2.c - \tfrac{3}{2}B^3.d + B^4.e = 0,$$
$$\tfrac{1}{5}Bb - \tfrac{10}{12}B^2.c + \tfrac{7}{4}B^3.d - 2B^4.e + B^5.f = 0,$$
$$-\tfrac{1}{6}Bb + \tfrac{137}{180}B^2.c - \tfrac{45}{32}B^3.d + \tfrac{17}{6}B^4.e - \tfrac{5}{2}B^5.f + \ldots = 0,$$

u. s. w.

An diesen Gleichungen aber erkennt man, daß sich aus ihnen bestimmte und reelle Werthe für die Größen b, c, d . . . ableiten lassen müssen, daß also die Rechnung, welche auf die in Nro. a) aufgestellte hypothetische Gleichung (h) gegründet worden ist, auf keine Ungereimtheiten oder imaginäre Größen führt, und daß mithin wirklich für eine jede bejahte Zahl $\mathfrak{Z}$ ein bestimmter Ausdruck von der Form $1 + bZ + cZ^2 + dZ^3 + \ldots$ möglich ist, welcher die Zahl $\mathfrak{Z}$ als eine Function ihres Logarithmus Z algebraisch darstellt.

2) Man suche jetzt die Werthe der Größen b, c, d . . ., man erhält: $b = \frac{1}{B}$, $c = \frac{1}{2B^2}$, $d = \frac{1}{2.3.B^3}$, $e = \frac{1}{2.3.4.B^4}$, $f = \frac{1}{2.3.4.5.B^5}$. u. s. w. Aus ihnen läßt sich das Gesetz für alle übrigen abnehmen; nach diesem Gesetze muß der auf den ersten Coefficienten b folgende nte Coefficient

$$p = \frac{1}{2.3.4.\ldots.n.B^n} \text{ seyn.}$$

3) Diese Werthe der Größen b, c, d . . . p . . . gebrauche man jetzt in der in Nro. a) aufgestellten Gleichung, so erhält man:

$$\mathfrak{Z} = 1 + \frac{Z}{B} + \frac{Z^2}{2B^2} + \frac{Z^3}{2.3.B^3} + \frac{Z^4}{2.3.4.B^4} + \ldots + \frac{Z^n}{2.3.4\ldots n.B^n} + \ldots,$$

oder, wenn man statt Z, log $\mathfrak{Z}$ setzen will,

$\mathfrak{Z}$ =

$$\mathfrak{Z} = 1 + \frac{\log \mathfrak{Z}}{B} + \frac{(\log \mathfrak{Z})^2}{2 \,.\, B^2} + \frac{(\log \mathfrak{Z})^3}{2 \,.\, 3 \,.\, B^3} + \frac{(\log \mathfrak{Z})^4}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, B^4} + \ldots$$
$$+ \frac{(\log \mathfrak{Z})^n}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n \,.\, B^n} + \ldots$$

4) So ist nun die Zahl $\mathfrak{Z}$ als eine Function ihres Logarithmus Z algebraisch dargestellt. Für Z = 1 z. E. ist

$$\mathfrak{Z} = 1 + \frac{1}{B} + \frac{1}{2B^2} + \frac{1}{2.3.B^3} + \frac{1}{2.3.4.B^4} + \ldots + \frac{1}{2.3.4\ldots n.B^n} + \ldots$$

Dieß ist ein Ausdruck für die Basis e des Logarithmensystems, denn diejenige Zahl $\mathfrak{Z}$, deren Logarithmus Z den Werth = 1 hat, ist nach §. 131. Nro. 3) jedesmal der Basis e des Systems gleich.

§. 134.

Es ist nun gezeigt worden, wie sich der Logarithmus Z einer bejahten Zahl $\mathfrak{Z}$ als eine Function von $\mathfrak{Z}$, und auch umgekehrt, wie sich eine bejahte Zahl $\mathfrak{Z}$ als eine Function ihres Logarithmus algebraisch darstellen läßt. Die Ausdrücke, welche bey dieser algebraischen Darstellung gefunden worden sind, leiten auf neue Begriffe und Sätze von den Logarithmen, den Systemen und der Berechnungsart derselben, wodurch diejenigen, welche schon die Elementarmathematik lehrt, und die in §. 131. kurz in Erinnerung gebracht worden sind, beträchtlich erweitert werden.

1) Ein jeder Logarithmus Z einer in der Form 1 + z dargestellten bejahten Zahl $\mathfrak{Z}$ ist ein Product aus einer durch die Basis e des Systems bestimmten Größe B in eine Function von z, welche aus einer nach einem bestimmten Gesetze ohne Ende fortlaufenden Reihe von Gliedern besteht. Dieses zeigen die für Z und B in §. 132. Nro. 4. und 5. stehenden Ausdrücke.

2) Man kann daher eine Basis e des Logarithmensystems festsetzen, daraus nach §. 132. Nro. 5) die Größe B, und hernach für den hierbey erhaltenen Werth von B nach §. 132. Nro. 4) die Logarithmen der Zahlen berechnen: man kann aber auch den Werth der Größe B zuerst festsetzen, dafür die Logarithmen der Zahlen und hernach auch nach §. 133. Nro. 4) die diesen Logarithmen zugehörige Basis e berechnen.

3) Es kommen demnach bey einem jeden Logarithmensysteme zwey Größen B und e vor, die einander wechselseitig bestimmen, und auf deren jede das Logarithmensystem gegründet wer-

werden kann. Die erste dieser beyden Größen, die, wenn man unter der **Basis** eines Logarithmensystems überhaupt eine Größe verstehen will, durch welche das ganze System bestimmt werden kann, eben so gut den Namen Basis erhalten könnte, als die Größe e, welche diesen Namen schon in der Elementarmathematik erhält, nennt man, um sie von der Basis e zu unterscheiden, den **Modul** (das **Modell**) des Systems.

4) "In verschiedenen Systemen, deren Moduln B und M heißen sollen, verhalten sich "die zu einerley Zahl $\mathfrak{Z}$ gehörigen Logarithmen gegen einander, wie diese Moduln". In dem Systeme, dessen Modul B heißt, ist der Logarithmus einer jeden Zahl $\mathfrak{Z}$ oder $1 + z$, der hier mit Log $\mathfrak{Z}$ bezeichnet werden soll, $= B(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots)$; in einem andern Systeme aber, dessen **Modul** M heißen soll, ist der Logarithmus eben dieser Zahl $\mathfrak{Z}$ oder $(1 + z)$, welchen wir durch log $\mathfrak{Z}$ bezeichnen wollen, $= M(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots)$: also verhält sich

$$\text{Log}\,\mathfrak{Z} : \log \mathfrak{Z} = B(z - \frac{1}{2}z + \ldots) : M(z - \frac{1}{2}z + \ldots) = B : M.$$

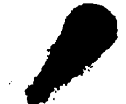
5) Man kann demnach, wenn die Logarithmen eines Systems, dessen Modul B heißt, bekannt sind, daraus die Logarithmen für ein jedes anderes System, welches den Modul M haben soll, berechnen, denn aus der vorigen Proportion folgt die Gleichung:

$$\log \mathfrak{Z} = \frac{M \cdot \text{Log}\,\mathfrak{Z}}{B}.$$

6) Wenn man einen Modul B annehmen und für denselben nach der Gleichung §. 132. Nro. 4) die Logarithmen der Zahlen $\mathfrak{Z}$, nach der Gleichung §. 133. Nro. 4) aber die diesen Logarithmen und dem angenommenen Modul B zugehörige Basis e berechnen will; so verfährt man am **natürlichsten**, wenn man dem Modul B den Werth = 1 giebt. Hierdurch erspart man sich nehmlich bey der Berechnung der Logarithmen der Zahlen nicht nur die Multiplication mit B, sondern man erhält auch durch die Berechnung selbst ein Logarithmensystem, aus welchem man ein jedes anderes, das den Modul M haben soll, leicht ableiten kann.

Ist nehmlich B = 1, so wird aus der Gleichung in Nro. 5) diese:

$$\log \mathfrak{Z} = M \cdot \text{Log}\,\mathfrak{Z},$$



und man kann daher log $\mathfrak{Z}$, d. h. den Logarithmus einer Zahl in demjenigen Systeme, dessen Modul $= M$ seyn soll, aus Log $\mathfrak{Z}$, d. h. aus dem Logarithmus von eben dieser Zahl $\mathfrak{Z}$ in dem System, dessen Modul $B = 1$ ist, allemal finden, wenn man denselben nimmt und mit dem Modul M multiplicirt.

7) Man hat auch wirklich die Logarithmen der Zahlen für den Modul $B = 1$ berechnet und dieselben **natürliche Logarithmen** (log. naturales) genannt. Alle anderen Logarithmen, deren Modul M größer oder kleiner als 1 ist, nennt man hingegen **künstliche Logarithmen** (log. artificiales). Auch werden bisweilen die **natürlichen** Logarithmen **hyperbolische** genannt, welche Benennung ihren Grund in der Geometrie hat, in welcher man bey einer gewissen Berechnung über diejenige krumme Linie, welche **Hyperbel** heißt, auf einen Ausdruck kommt, der dem Ausdrucke $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots$, aus dem die natürlichen Logarithmen der Zahlen $1 + z$ berechnet werden, vollkommen gleich ist.

8) Nach Nro. 6) ist jedesmal in einem **künstlichen** Logarithmensysteme, dessen Modul M heißt, der irgend einer bejahten Zahl $\mathfrak{Z}$ zugehörige künstliche Logarithmus ein **Product** aus dem Modul M in den natürlichen Logarithmus der eben so großen Zahl $\mathfrak{Z}$,

$$\log \text{art. } \mathfrak{Z} = M \, . \, \log \text{nat. } \mathfrak{Z}.$$

Also kann auch in dem **natürlichen** Logarithmensysteme jedesmal der irgend einer bejahten Zahl $\mathfrak{Z}$ zugehörige natürliche Logarithmus als ein **Quotient** angesehen werden, der entstehen muß, wenn man den künstlichen Logarithmus eben dieser Zahl $\mathfrak{Z}$ nimmt, und durch den Modul M des künstlichen Systems dividirt;

$$\frac{\log \text{art. } \mathfrak{Z}}{M} = \log \text{nat. } \mathfrak{Z}.$$

Ferner muß auch, wenn man den künstlichen Logarithmus irgend einer beliebigen Zahl $\mathfrak{Z}$ durch den natürlichen Logarithmus eben dieser Zahl dividirt, der Modul M des künstlichen Systems herauskommen;

$$M = \frac{\log \text{art. } \mathfrak{Z}}{\log \text{nat. } \mathfrak{Z}}.$$

Daraus folgt wiederum, daß der Modul M eines künstlichen Systems eben so groß ist, als der aus diesem Systeme genommene künstliche Logarithmus, welcher zu einer Zahl $\mathfrak{Z}$ gehört, die der Basis des natürlichen Systems gleich ist. Wenn man nehmlich, weil in der vorigen Gleichung $\mathfrak{Z}$ jede bejahte Zahl bedeuten kann, statt $\mathfrak{Z}$ die Basis des natür-

türlichen Systemes setzt, die wir von nun an allemal mit e bezeichnen wollen; so wird log. art. Z = log. art. e und log. nat. Z = log. nat. e = 1 (§. 131. Nro. 3); es ist also

$$M = \text{log. art. } e.$$

Endlich folgt auch, daß der Modul M eines künstlichen Systems dem Quotienten gleich ist, den man erhält, wenn man die Einheit durch den natürlichen Logarithmus der Basis E desjenigen künstlichen Systems, wozu der Modul M gehören soll, dividirt. Wenn man nehmlich in der vorletzten Gleichung statt Z die Basis E des künstlichen Systems, welches den Modul M hat, setzt; so wird log art. Z = log. art. E = 1 (§. 131. Nro. 3) und log. nat. Z = log. nat. E; es folgt also aus der erwähnten Gleichung diese:

$$M = \frac{1}{\text{log. nat. } E}.$$

Diesen Ausdruck vergleiche man mit dem, welcher in §. 131. Nro. 15) **Modul** genannt wurde. —

9) Das **künstliche** System, dessen wir uns in der Mathematik bedienen, ist das **Briggische**, dessen Basis E = 10 ist. Es sind also vornehmlich zwey Logarithmensysteme für uns merkwürdig, das **natürliche** und das **Briggische**. Von dem ersteren kennen wir den **Modul** B, welcher = 1 ist, aber die **Basis** e ist uns bis jetzt noch unbekannt; von dem letzteren kennen wir die **Basis** E = 10, aber den **Modul** M wissen wir noch nicht. Wir wollen hier die Berechnung von e und M zeigen.

Wenn man in §. 133. Nro. 4) den Modul B = 1 setzt; so erhält man: $e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{2.3.4\ldots n} + \ldots$ Verwandelt man die Glieder dieser Reihe in Decimalbrüche, und addirt alles zusammen, so ergiebt sich die dem natürlichen Systeme zugehörige **Basis**

$$e = 2{,}7182818284590452353 60 \ldots$$

Wenn man ferner in §. 132. Nro. 5) statt e den Werth 10, d. h. den Werth der Basis E des Briggischen Systems setzt; so erhält man daselbst einen Werth für die Größe B, welcher der Werth des Briggischen Moduls M ist; es wird nehmlich

$$M = \frac{1}{9 - \frac{1}{2}.9^2 + \frac{1}{3}.9^3 - \frac{1}{4}.9^4 + \ldots - \frac{1}{2r}.9^{2r} + \frac{1}{2r+1}.9^{2r+1} + \ldots}.$$

Es kann aber der Werth von M auf eine viel leichtere Art vermittelst der in Nro. 8) gegebenen Gleichung

$$\frac{1}{\text{log. nat. } E} = M$$

 bereck

berechnet werden, wenn man den natürlichen Logarithmus der Briggischen Basis E = 10 weis. Dieser ist aus den Tafeln für die natürlichen Logarithmen bekannt, in welchen man log nat. 10 = 2,302585092994045 ... findet. Demnach ist

$$M = \frac{1}{2{,}302585092994045\ldots}$$
$$= 0{,}4342944819032518276 51\ldots$$

§. 135.

Hiermit sind nun die Hauptsätze angegeben, welche zur genauern Kenntniß der Logarithmen überhaupt, insbesondere aber zur Kenntniß derjenigen beyden Logarithmensysteme gehören, die man wirklich zum Gebrauche in der Mathematik eingeführt und berechnet hat. Nun sollen noch in den folgenden §. §. die verschiedenen Ausdrücke angegeben werden, die man vermittelst des in §. 132. für log Z oder log (1 + z) gefundenen Ausdruckes: $B\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\right)$ formiren kann und die zur wirklichen Berechnung der Logarithmen weit tauglicher und bequemer werden, als der eben angeführte Ausdruck selbst ist, in welchem die auf einander folgenden Glieder blos alsdann immer kleiner werden, wenn die Werthe von z **ächte** Brüche sind, für alle anderen Werthe von z aber immer mehr zunehmen.

§. 136.

1) "Aus der für log Z in §. 132. Nro. 4) angegebenen Gleichung läßt sich folgende:

$$\log Z = 2B\left(\frac{Z-1}{Z+1} + \frac{(Z-1)^3}{3(Z+1)^3} + \frac{(Z-1)^5}{5(Z+1)^5} + \frac{(Z-1)^7}{7(Z+1)^7} + \ldots + \frac{(Z-1)^{2r+1}}{(2r+1)(Z+1)^{2r+1}} + \ldots\right)$$

"ableiten, in welcher Z eine **jede** beliebige **bejahte** Zahl bedeutet. Es soll gezeigt werden, "wie dieses geschehen kann, und was über die Anwendung dieser Gleichung zur wirklichen "Berechnung der Logarithmen zu merken ist."

2) In der Gleichung: log Z oder

$$\log(1+z) = B\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \ldots - \frac{z^{2r}}{2r} + \frac{z^{2r+1}}{2r+1} - \ldots\right)$$

kann, wie man schon aus §. 132. Nro. 2) weis, die Größe z einen jeden beliebigen Werth erhalten, aber nur muß für denselben jedesmal 1 + z eine **bejahte** Zahl Z werden; es kann also z alle nur immer denkbaren **bejahten** Werthe haben, unter den **verneinten** aber nur solche,

solche, welche ächte Brüche sind. Mithin darf man, wenn man festsetzt, daß alle Werthe von z ächte Brüche seyn sollen, statt z in der vorigen Gleichung (— z) setzen. Man thue dieses, dann ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\log(1-z) = B\left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} - \ldots - \frac{z^{2r}}{2r} - \frac{z^{2r+1}}{2r+1} - \ldots\right).$$

2) Nun denke man sich auch unter den Werthen, welche z in der ersten Gleichung haben soll, lauter ächte Brüche; diese Einschränkung der Werthe von z steht in unserer Freyheit. Auf diese Art erhält man nun zwey Gleichungen, in welchen die Werthe von z ihrer Größe nach zwischen einerley Gränzen 0 und 1 eingeschlossen sind.

Von diesen beyden Gleichungen nehme man die zweyte, und ziehe sie von der ersten ab, dadurch ergiebt sich alsdann folgende Gleichung:

$$\log(1+z) - \log(1-z) = 2B\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \ldots + \frac{z^{2r+1}}{2r+1} + \ldots\right),$$

und statt dieser kann man, weil nach §. 131. Nro. 8. $\log(1+z) - \log(1-z) = \log\frac{1+z}{1-z}$ seyn muß, auch diese setzen:

$$\log\frac{1+z}{1-z} = 2B\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \ldots + \frac{z^{2r+1}}{2r+1} + \ldots\right),$$

in der aber alle Werthe von z blos bejahte oder verneinte ächte Brüche bedeuten dürfen (Nro. 1).

3) Bedeutet nun Z eine beliebige ganze oder gebrochene bejahte Zahl, so bedeutet auch ganz gewiß der Ausdruck $\frac{Z-1}{Z+1}$ einen jeden beliebigen bejahten oder verneinten ächten Bruch; einen bejahten nehmlich, wenn $Z > 1$, einen verneinten aber, wenn $Z < 1$ ist. Man nehme also an, es habe Z diese Bedeutung, und setze statt z in der vorigen Gleichung den Ausdruck $\frac{Z-1}{Z+1}$; dann erhält man die vorhin aufgestellte Gleichung:

$$\log Z = 2B\left(\frac{Z-1}{Z+1} + \frac{(Z-1)^3}{3(Z+1)^3} + \frac{(Z-1)^5}{5(Z+1)^5} + \frac{(Z-1)^7}{7(Z+1)^7} + \ldots + \frac{(Z-1)^{2r+1}}{(2r+1)(Z+1)^{2r+1}} + \ldots\right),$$

welche nun für alle ganzen und gebrochenen bejahten Zahlen Z gilt.

4) Vermittelst dieser Gleichung, in welcher die Glieder alle ächte Brüche sind, und ziemlich schnell abnehmen, könnte man die Logarithmen der Primzahlen Z mit ziemlicher Be-

Bequemlichkeit berechnen. Hätte man aber diese, so hätte man auch die Logarithmen aller geraden Zahlen, welche Producte aus den Primzahlen sind, denn nach §. 131. Nro. 8 muß $\log Z'.Z''.Z''' \times \ldots = \log Z' + \log Z'' + \log Z''' + \ldots$, $\log 2.5$ z. E. $= \log 2 + \log 5$, $\log 3.5 = \log 3 + \log 5$ u. s. w. seyn.

5) Wir wollen hier die vorige Gleichung auf die Berechnung des natürlichen Logarithmus der Zahl 2 anwenden. Es sey also der Modul $B = 1$ und $Z = 2$; dann ist $Z - 1 = 1$ und $Z + 1 = 3$, und es muß folglich seyn:

$$\text{log. nat. } 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \frac{1}{11.3^{11}} + \frac{1}{13.3^{13}} + \frac{1}{15.3^{15}} + \frac{1}{17.3^{17}} + \ldots\right)$$

Um sich hier die fernere Berechnung zu erleichtern, so verwandele man $\frac{2}{3}$ in einen Decimalbruch, und dividire denselben erst mit 3^2 oder 9, den Quotienten wiederum mit 9 u. s. w.; hierdurch erhält man die Werthe von $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3.3^2}$, $\frac{2}{3.3^4}$, $\frac{2}{3.3^6}$, $\frac{2}{3.3^8}$ u. s. w. in Decimalbrüchen. Diese nehme man nun, und dividire den zweyten mit 3, den dritten mit 5, den vierten mit 7 u. s. w.; so erhält man die Glieder des obigen Ausdruckes in Decimalbrüchen, deren Summe

$$= 0{,}6931471800 \ldots = \text{log. nat. } 2. \text{ ist}$$

Es geben hier schon die 9 ersten Glieder des Ausdruckes den log. nat. 2 bis auf 9 Decimalstellen richtig. Auf ähnliche Art kann man nun auch den log. Brigg. 2 berechnen, wenn man ihn nicht durch die Multiplication des Briggischen Moduls $M = 0{,}43429448190 \ldots$ (§. 134. Nro. 9) mit log. nat. 2 finden will.

6) Man hat sich aber mit der Bequemlichkeit, welche der für $\log Z$ am Ende von Nro. 3) gefundene Ausdruck bey der Berechnung der Logarithmen der Primzahlen 3, 5, 7, 11 rc. gewähren kann, nicht begnügt, sondern noch andere Ausdrücke aufgesucht, deren Glieder noch geschwinder abnehmen, als die Glieder des eben erwähnten Ausdrucks.

§. 137.

II) "Der Logarithmus einer jeden ganzen bejahten Zahl Z läßt sich auch durch die Gleichung:

log

$$\log Z = \frac{\log(Z+1) + \log(Z-1)}{2} + B.\left(\frac{1}{2Z^2-1} + \frac{1}{3(2Z^2-1)^3} + \frac{1}{5(2Z^2-1)^5} + \frac{1}{7(2Z^2-1)^7} + \ldots + \frac{1}{(2r+1)(2Z^2-1)^{2r+1}} + \ldots\right)$$

„bestimmen. Es soll die Ableitung dieser Gleichung und die Anwendung derselben auf die „Berechnung der Logarithmen der Primzahlen gezeigt werden."

1) Wenn Z eine **ganze** bejahte Zahl bedeutet, so ist gewiß der Ausdruck $\frac{1}{2Z^2-1}$ ein **ächter** Bruch, und dieser ist desto kleiner, je größer die ganze bejahte Zahl Z ist. Setzt man nun diesen Ausdruck statt z in der am Ende von Nro. 2) im vorigen §. angegebenen Gleichung, (in welcher alle Werthe von z blos ächte Brüche bedeuten); so wird

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1 + \frac{1}{2Z^2-1}}{1 - \frac{1}{2Z^2-1}} = \frac{Z^2}{Z^2-1}$$

und es verwandelt sich die erwähnte Gleichung in folgende:

$$\log \frac{Z^2}{Z^2-1} = 2B\left(\frac{1}{2Z^2-1} + \frac{1}{3(2Z^2-1)^3} + \frac{1}{5(2Z^2-1)^5} + \frac{1}{7(2Z^2-1)^7} + \ldots + \frac{1}{(2r+1)(2Z^2-1)^{2r+1}} + \ldots\right)$$

2) Nun ist aber $\log \frac{Z^2}{Z^2-1} = \log Z^2 - \log(Z^2-1) = 2\log Z - \log(Z+1)\times(Z-1) = 2\log Z - \left(\log(Z+1) + \log(Z-1)\right)$. Es ist also, wenn man die rechte Seite in der am Ende von Nro. 2) stehenden Gleichung durch S bezeichnet,

$$2\log Z - (\log(Z+1) + \log(Z-1)) = S,$$

woraus $\log Z = \frac{\log(Z+1) + \log(Z-1) + S}{2}$ folgt.

3) Substituirt man in der letzten Gleichung den Werth von S, so erhält man:

$$\log Z = \frac{\log(Z+1) + \log(Z-1)}{2} + B\left(\frac{1}{2Z^2-1} + \frac{1}{3(2Z^2-1)^3} + \frac{1}{5(2Z^2-1)^5} + \frac{1}{7(2Z^2-1)^7} + \ldots + \frac{1}{(2r+1)(2Z^2-1)^{2r+1}} + \ldots\right)$$

4. Ver-

4) Vermittelst dieser Gleichung nun, in welcher unter Z lauter **ganze** bejahte Zahlen zu denken sind (Nro. 2), kann man, da die Glieder derselben sehr schnell abnehmen, den Logarithmus einer **jeden** bejahten Zahl äusserst leicht finden, wenn man zuvor den Logarithmus der um eine Einheit niedrigeren Zahl $Z - 1$ und den Logarithmus der um eine Einheit höheren Zahl $Z + 1$ weis. Nun ist aber der Logarithmus der Zahl 2 nach der Formel im vorigen §. leicht zu finden, und daraus kann man den Logarithmus der Zahl 4, welcher $= 2 \log 2$ ist, berechnen; folglich läßt sich nach der Gleichung in Nro. 4) schon der Logarithmus der Zahl 3 angeben. Aus $\log 3$ aber folgt $\log 6 = \log 2.3 = \log 2 + \log 3$, also kann man auch wiederum vermittelst $\log 6$ und $\log 4$ den $\log 5$ finden. Nimmt man ferner aus $\log 2$ den $\log 8 = 3 \log 2$, so kann man alsdann vermittelst $\log 8$ und $\log 6$ den $\log 7$ berechnen. Man sieht leicht ein, daß man nun immer so fortfahren und nach der Reihe die Logarithmen aller Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen berechnen kann.

5) Hier soll die Berechnung einiger Zahlen hergesetzt werden. Wir wollen hierbey den **Modul** $B = 1$ setzen, um die natürlichen Logarithmen zu erhalten. Im vorigen §. war

$\log.\text{nat.}\ 2 = 0{,}6931471$. Daraus folgt $2 \log.\text{nat.}\ 2$ oder

$\log.\text{nat.}\ 4 = 1{,}3862943$, und ferner $3 \log.\text{nat.}\ 2$ oder

$\log.\text{nat.}\ 8 = 2{,}0794415$. Folglich ist nun nach der Gleichung in Nro. 3),

$$\log.\text{nat.}\ 3 = \frac{\log.\text{nat.}\ 4 + \log.\text{nat.}\ 2}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2} \log.\text{nat.}\ 8 + 0{,}0588235 + 0{,}0000678 + 0{,}0000001 + \ldots$$

$$= 1{,}0986122.$$ Hieraus ergiebt sich ferner:

$\log.\text{nat.}\ 6 = \log.\text{nat.}\ 2.3 = \log.\text{nat.}\ 2 + \log.\text{nat}\ 3 = 1{,}7917594$;

$\log.\text{nat.}\ 9 = \log.\text{nat.}\ 3^2 = 2 \log.\text{nat.}\ 3 = 2{,}1972245$;

$\log.\text{nat.}\ 12 = \log.\text{nat.}\ 2.6 = \log.\text{nat.}\ 2 + \log.\text{nat.}\ 6 = 2{,}4849065$;

$$\log.\text{nat.}\ 5 = \frac{\log.\text{nat.}\ 6 + \log.\text{nat.}\ 4}{2} + \frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \ldots = 1{,}5890268$$

$$+ 0{,}0204082 + 0{,}0000028 = 1{,}6094379;$$

$\log.\text{nat.}\ 10 = \log.\text{nat.}\ 2.5 = \log.\text{nat.}\ 2 + \log.\text{nat.}\ 5 = 2{,}3025850$

$$\log.\text{nat.}\ 7 = \frac{\log.\text{nat.}\ 8 + \log.\text{nat.}\ 6}{2} + \frac{1}{97} + \frac{1}{3.97^3} + \ldots = 1{,}9356004$$

$$+ 0{,}0103093 + 0{,}0000003 = 1{,}9459101;$$

log

$$\log.\ \text{nat.}\ 11 = \frac{\log.\ \text{nat.}\ 12 + \log.\ \text{nat.}\ 10}{2} + \frac{1}{241} + \frac{1}{3.241^3} + \ldots$$

$$= 2{,}3937457 + 0{,}0041494 + 0{,}0000000 = 2{,}3978952.$$

So könnte man nun fortfahren in der Rechnung. Man sieht aus der Berechnung des Logarithmus der Zahl 11, wie schnell die Glieder des Ausdruckes in Nro. 4) abnehmen, und wie vortheilhaft also derselbe ist. Man erhält schon den Logarithmus der Zahl 11 bis auf 7 Decimalstellen genau, und hat nur zwey Glieder des Ausdruckes dazu nöthig. Bey der Berechnung des Logarithmus der Zahl 23 findet man, daß derselbe schon durch die blose Entwickelung des ersten Gliedes in 10 Decimalstellen richtig erhalten wird, weil das zweyte Glied in dieser Stelle noch keine Zahl erhält.

§. 138.

III) "Der Logarithmus einer jeden bejahten Zahl $\mathfrak{Z}$, welche $= m + v$ oder $= m - v$ ist, läßt sich durch die Gleichungen:

$$\log \mathfrak{Z} \text{ oder } \log(m+v) = \log m + B\left(\frac{v}{m} - \frac{v^2}{2m^2} + \frac{v^3}{3m^3} - \frac{v^4}{4m^4} + \ldots - \frac{v^{2r}}{2r.m^{2r}} + \frac{v^{2r+1}}{(2r+1).m^{2r+1}} - \ldots\right),$$

$$\log \mathfrak{Z} \text{ oder } \log(m-v) = \log m - B\left(\frac{v}{m} + \frac{v^2}{2m^2} + \frac{v^3}{3m^3} + \frac{v^4}{4m^4} + \ldots + \frac{v^{2r}}{2r.m^{2r}} + \frac{v^{2r+1}}{(2r+1).m^{2r+1}} + \ldots\right)$$

"bestimmen. Es soll die Ableitung und der Gebrauch dieser Gleichungen gezeigt werden."

1) Man setze in dem für $\log(1+z)$ in §. 132. Nro. 4) angegebenen Ausdrucke $z = \frac{v}{m}$, dann erhält man die Gleichung:

$$\log\left(1+\frac{v}{m}\right) = B\left(\frac{v}{m} - \frac{v^2}{2m^2} + \frac{v^3}{3m^3} - \frac{v^4}{4m^4} + \ldots - \frac{v^{2r}}{2r.m^{2r}} + \frac{v^{2r+1}}{(2r+1).m^{2r+1}} - \ldots\right).$$

Da nun $\log\left(1+\frac{v}{m}\right) = \log\frac{m+v}{m} = \log(m+v) - \log m$ ist, so erhält

man,

man, wenn die Seite rechter Hand in obiger Gleichung durch S bezeichnet wird, die Gleichung:

$$\log(m + v) - \log m = S,$$

woraus dann $\log(m + v) = \log m + S$, oder, wenn man den Ausdruck für S substituirt, und $m + v$, $\mathfrak{Z}$ nennt,

$$\log \mathfrak{Z} \text{ oder } \log(m + v) = B\Big(\frac{v}{m} - \frac{v^2}{2m^2} + \frac{v^3}{3m^3} - \frac{v^4}{4m^4} + \ldots - \frac{v^{2r}}{2r.m^{2r}} + \frac{v^{2r+1}}{(2r+1).m^{2r+1}} - \ldots\Big) \text{ folgt.}$$

2) Man setze ferner in der Gleichung §. 132. Nro. 4) statt z den **verneinten ächten** Bruch $\frac{v}{m}$, wobey also $m > v$ vorzustellen ist, dann verwandelt sich jene Gleichung in diese:

$$\log\Big(1 - \frac{v}{m}\Big) = -B\Big(\frac{v}{m} + \frac{v^2}{2m^2} + \frac{v^3}{3m^3} + \frac{v^4}{4m^4} + \ldots + \frac{v^{2r}}{2r.m^{2r}} + \frac{v^{2r+1}}{(2r+1).m^{2r+1}} + \ldots\Big).$$

Weil nun hier $\log\Big(1 - \frac{v}{m}\Big) = \log\frac{m - v}{m} = \log(m - v) - \log m$ gesetzt werden kann, so muß, wenn man $m - v$, $\mathfrak{Z}$ nennt,

$$\log \mathfrak{Z} \text{ oder } \log(m - v) = \log m - B\Big(\frac{v}{m} + \frac{v^2}{2m^2} + \frac{v^3}{3m^3} + \frac{v^4}{4m^4} + \ldots + \frac{v^{2r}}{2r\,v^{2r}} + \frac{v^{2r+1}}{(2r+1).v^{2r+1}} + \ldots \text{ seyn.}$$

3) Diese beyden Formeln sind vortheilhaft zu gebrauchen, wenn man den Logarithmus einer Zahl $\mathfrak{Z}$ verlangt, die schon die Zahlen der Logarithmentafeln übersteigt. So enthalten die Wolframischen Logarithmentafeln die natürlichen Logarithmen nur für die Zahlen von 1 bis 10009. Will man also den natürlichen Logarithmus der Zahl $\mathfrak{Z} = 795716324$ berechnen, so darf man nur $B = 1$, $m = 795700000$, und $v = 16324$ setzen; alsdann ist log. nat. 795716324 oder

$$\text{log. nat.}(795700000 + 16324) = \text{log. nat. } 7957 \times 10^5 + \frac{16324}{795700000} - \frac{16324^2}{2 \times 795700000^2} + \ldots$$

$= \log$

$$= \log.\ nat.\ 7957 + 5 \log.\ nat.\ 10 + 0{,}00000205152694 - \frac{0{,}00000205152694^2}{2}$$

$$= \begin{cases} \ 8{,}98180732337753 \\ +\ 11{,}51292546497020 \\ +\ 0{,}00000205152694 \end{cases}$$

$$\overline{20{,}49473483987467}$$

Hier hat man nun den log 795716324, und zwar ist dieser, wie man leicht einsehen kann, in 12 Decimalstellen völlig genau, weil die folgenden Glieder auf die 12te Decimalstelle keinen Einfluß haben.

Will man für dieselbe Zahl $Z = 795716324$ den **Briggischen** Logarithmus haben, so ist, da diese Tafeln die Zahlen bis etwas über 100000 enthalten, $m = 795710000$, $v = 6324$, also log. Brigg. 795716324 oder log. Brigg. $(795710000 + 6324)$ $= \log.\ Brigg.\ 79571 \times 10^4$

$$+ B\left(\frac{6324}{795710000} - \frac{6324^2}{2 \cdot 795710000^2} + \ldots\right).$$

Hier ist die Berechnung, die Multiplication mit dem **Modul** $B = M = 0{,}4342944819\ldots$ (§. 134. Nro. 9) ausgenommen, eben so leicht, wie die vorige.

§. 139.

Hier ist nun der Ort, wo wir auch etwas über die Tafeln der natürlichen Logarithmen beyfügen müssen.

1) **Joh. Heinrich Lambert** giebt in Tab XIII. seiner "Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln, Berlin 1770," die natürlichen Logarithmen der **ganzen** Zahlen von 1 bis 100, und in Tab. XV. die Logarithmen aller zwischen 1 und 10 fallenden und um einen Hunderttheil der Einheit von einander unterschiedenen **Decimalbrüche** 1,01; 1,02; 1,03 rc. an. Vermittelst der Logarithmen dieser Decimalbrüche aber kann man die Logarithmen aller **ganzen** Zahlen zwischen 100 und 1000 berechnen, indem man zu ihnen den log. nat. 100 = 4,6051702 addirt. Es ist nehmlich log. nat. 101 = log. nat. 1,01 × 100 = log. nat. 1,01 + log. nat. 100 u. s. f.

2) **Joh. Carl Schulze**, ein geh. Oberbaurath zu Berlin gab daselbst im Jahr 1778 heraus: "Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und an-



derer in der Math. unentbehrlicher Tafeln, 2 Bände in (8)." Hiervon enthält der erste Band die natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 2200 in 48 Decimalstellen, und auch die natürlichen Logarithmen aller zwischen 2200 und 10009 fallenden Primzahlen. Diese Logarithmen hat **Wolfram**, ein Artillerielieutenant in Holländischen Diensten, berechnet. Es befinden sich aber in der Schulzischen Ausgabe der Wolframischen Logarithmentafeln mehrere leere Räume, weil Wolfram durch Kränklichkeit verhindert die dahin gehörigen Logarithmen nicht berechnen konnte. **Lüdike** hat die in der Schulzischen Ausgabe fehlenden Logarithmen noch berechnet.

3) Der Ritter, **Georg Vega**, hat im Jahr 1783 zu Wien herausgegeben: "Logarithmische, trigonometrische und andere Tafeln," worin die natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 und aller Primzahlen zwischen 1000 und 9973 in 8 Decimalstellen angegeben sind. Eben dieser hat dann einen Thesaurus logarithmorum oder — "Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln (Leipzig 1794 fol.)" herausgegeben, in welchen am Ende des zweyten Bandes die Wolframischen Tafeln der natürlichen Logarithmen vorkommen und auch diejenigen Logarithmen angegeben sind, für welche in der Schulzischen Ausgabe leere Räume gelassen sind. Ferner hat eben dieser wiederum eine Ausgabe logarithmisch-trigonometrischer Tafeln in 2 Quartbänden besorgt (Leipzig 1797), welche die natürlichen Logarithmen eben so enthalten, wie die Wiener Ausgabe vom Jahr 1783.

Wer umständlichere Nachrichten über Logarithmentafeln verlangt, der findet sie: in **Kästners** astronomischen Abhandlungen, II. Sammlung, Seite 1 bis 79; in **Scheibels** Einleit. zur math. Bücherkenntniß, 7. Stück, S. 1 bis 88 und 11. St. S. 403 bis 424; in dem Leipziger Magazin für reine und angewandte Math. auf das Jahr 1787, 1. St. S. 120 rc.

§. 140.

Jetzt wollen wir noch die Transformation derjenigen algebraischen Functionen betrachten, welche man **Exponentialgrößen** nennt, und deren algebraische Ausdrücke erst dann transformirt werden können, wenn die Logarithmen algebraisch dargestellt worden sind (§. 126.).

§. 141.

"Es sollen die Hauptformen, deren die Function $Z = a^x$ fähig ist, angegeben "werden."

Da

1) Man kann a als die Basis eines Logarithmensystems, z als den Logarithmus und $a^z = Z$ als die dem Logarithmus z zugehörige Zahl Z ansehen, dann muß nach §. 133. Nro. 3)

$$Z \text{ oder } a^z = 1 + \frac{z}{B} + \frac{z^2}{2B^2} + \frac{z^3}{2.3.B^3} + \frac{z^4}{2.3.4.B^4} + \ldots + \frac{z^n}{2.3\ldots nB^n} + \ldots$$

seyn, und B ist nach §. 132. Nro. 5) aus a zu bestimmen.

Wenn nun a der Basis e des natürlichen Logarithmensystems gleich, also $a^z = e^z$ wäre; so müßte $B = 1$ und mithin Z oder a^z oder e^z

$$= 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \ldots + \frac{z^n}{2.3\ldots n} + \ldots \quad (h)$$

seyn.

2) Man kann aber, wenn auch a nicht $= e$ ist, dennoch den Ausdruck für $Z = a^z$ so einrichten, daß die Größe B aus demselben heraus fällt, und zwar kann dieses vermittelst des Ausdruckes (h) auf folgende Art geschehen: Man setze, es sey für einen jeden Werth von z

$$a^z = e^x, \quad (\delta)$$

wo e die aus §. 134. Nro. 9) bekannte Basis des natürlichen Logarithmensystems, und x den unbekannten natürlichen Logarithmus bedeutet, der für einen jeden Werth von z der Gleichung $a^z = e^x$ ein Genüge leistet. Aus dieser Gleichung folgt nun, wenn man von beyden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt und also setzt:

$$\text{log. nat. } a^z = \text{log. nat. } e^x,$$

die Gleichung: $z \text{ log. nat. } a = x \text{ log. nat. } e$ (§. 131. Nro. 9).

Es ist also, weil der Logarithmus der Basis e den Werth $= 1$ haben muß (§. 131. Nro. 3),

$$z . \text{log. nat. } a = x.$$

Den für x hier gefundenen Ausdruck setze man jetzt in die Gleichung (δ), dann hat man:

$$a^z = e^{z \text{ log. nat. } a}.$$

Da nun $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \ldots + \frac{z^n}{2.3\ldots n} + \ldots$

seyn muß (Nro. 1), so ergiebt sich, wenn man hier statt z, z log. nat. a setzt, die Gleichung:

$$e^{z \log. nat. a} = 1 + \frac{z \log. nat. a}{1} + \frac{(z \log. nat. a)^2}{2} + \frac{(z \log. nat. a)^3}{2 \cdot 3} + \ldots$$
$$+ \frac{(z \log. nat. a)^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n} + \ldots$$

Also ist eine jede Function Z von der Form

$$a^z = 1 + (\log. nat. a) \cdot z + \frac{(\log. nat. a)^2}{2} \cdot z^2 + \frac{(\log. nat. a)^3}{2 \cdot 3} \cdot z^3 + \ldots$$
$$+ \frac{(\log. nat. a)^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n} \cdot z^n + \ldots$$

§. 142.

Aus dem vorigen §. sieht man, daß sich auch die Exponentialgröße a^z auf die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$ reduciren läßt, und nun wird es nicht schwer seyn, eine jede Function Z von z, in welcher Exponentialgrößen in irgend einer arithmetischen Form vorkommen mögen, auf die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$ zu reduciren.

II) Von den trigonometrischen Functionen.

---

§. 143.

"Man stelle sich einen Kreisbogen und den dazu gehörigen Sinus vor; der Sinus tot., "für welchen der Sinus des Bogens gelten soll, sey = 1. Die Zahl der Grade, Minu"ten rc., welche der Bogen enthält, sey beliebig groß, und die dieser Zahl entsprechende "und durch Rectification erhaltene Länge des Bogens heiße z; der Sinus selbst heiße Z. "Es soll gezeigt werden, wie sich die Abhängigkeit der Function Z = Sin z von z "durch einen Ausdruck algebraisch darstellen läßt."

1) Man nehme an, es gebe für die Function Sin z einen algebraischen Ausdruck, welcher unter dem allgemeinen Ausdrucke

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + Rz^{2n+2} + Sz^{2n+3} + \ldots$ begriffen ist, in welchem die Größen A, B, C ... von z unabhängig, übrigens aber völ-

völlig unbestimmt seyn sollen, in dem ferner auch die Anzahl der Glieder unbestimmt groß gedacht werden soll, und der bekanntlich alle ganzen und auch alle in eine Reihe aufgelösten gebrochenen algebraischen Functionen unter sich begreift. — Diese Annahme nun zieht die nachstehende Gleichung nach sich:

$$\mathrm{Sin}\, z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + Rz^{2n+2} + Sz^{2n+3} + \ldots$$

Die Möglichkeit dieser Gleichung ist bis jetzt noch hypothetisch und muß untersucht werden.

2) Zuerst erhellet aus der geometrischen Natur der Function Sin z, daß der für sie angenommene Ausdruck nicht für einen jeden beliebigen Werth des Bogens z Statt haben kann, wenn der Werth des absoluten Gliedes A eine wirkliche Größe und nicht $= 0$ ist. Es erhält nehmlich der Ausdruck für $z = 0$ den Werth $= A$; die Function Sin z aber muß, wenn man $z = 0$ setzt, $= 0$ werden. — Beydes widerspricht sich. Die erste Bedingung also, die erfüllt werden muß, wenn die in Nro. 1) aufgestellte Gleichung keinen offenbaren Widerspruch enthalten soll, ist die, daß man $A = 0$, und also

$$\mathrm{Sin}\, z = Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + Rz^{2n+2} + Sz^{2n+3} + \ldots$$

setze. Es sey demnach jetzt diese Gleichung angenommen.

3) Ob nun diese letzte Gleichung möglich sey oder nicht, dieses läßt sich weiterhin nicht unmittelbar durch die Betrachtung der geometrischen Natur der Function Sin z entscheiden, sondern es muß dieses auf einem anderen Wege entschieden werden. Er ist folgender:

Man suche durch eine auf die vorige Gleichung und überdieß auf die geometrische Natur der Function Sin z gebaute Rechnung Gleichungen für die Größen B, C, D, E... zu erhalten, und sehe nach, ob dieselben auf Widersprüche oder auf unmögliche Werthe der Größen B, C, D, E... führen, oder nicht.

Die Rechnung, durch welche sich dergleichen Gleichungen erhalten lassen, soll in dem Folgenden gezeigt werden, zuvor aber haben wir noch dieses zu bemerken: Man gelangt durch diese Rechnung, welche wir vornehmen werden, zwar zu Gleichungen für die Größen C, D, E..., wenn man die Gleichung in Nro. 2) annimmt, aber für die Größe B erhält man keine Gleichung. Da aber das Urtheil über die Möglichkeit des für Sin z angenommenen Ausdruckes ganz und gar auf der Beschäffenheit der für die Größen B, C, D, E... aufgesuchten Gleichungen und der daraus gefolgerten Werthe dieser Größen beruhen soll; so muß man, um ein bestimmtes Urtheil fällen zu können, die Rechnungsoperation entweder so einrichten, daß man auch für B eine Gleichung erhält, oder man muß die Voraussetzung so machen, daß man gar keine Gleichung für B nöthig hat.

Wenn

Wenn man nun $B = 1$ setzt, also annimmt, es sey die Function.
$\text{Sin}\, z = z + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + Rz^{2n+2} + Sz^{2n+3} + \ldots$, und eben die Rechnung, bey der man für B keine Gleichung erhalten kann, noch einmal vornimmt; so erhält man Gleichungen für alle unbestimmt angenommenen Größen C, D, E..., von welchen sich dann ganz sicher auf die Möglichkeit des für Sin z angenommenen Ausdruckes zurück schließen läßt. Wir setzen also $B = 1$ und mithin

$$\text{Sin}\, z = z + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + Rz^{2n+2} + Sz^{2n+3} + \ldots \quad (k)$$

Die auf diese Gleichung und auf die geometrische Natur der Function Sin z gegründete Rechnung nun, durch welche man Gleichungen für die Größen C, D, E.... erhält, ist folgende:

a) Wenn die Gleichung (k) für einen jeden beliebigen Werth von z möglich wäre, so müßte auch die Gleichung

$$\text{Sin}\,(z+\omega) = (z+\omega) + C(z+\omega)^2 + D(z+\omega)^3 + E(z+\omega)^4 + \ldots + P(z+\omega)^{2n} + Q(z+\omega)^{2n+1} + R(z+\omega)^{2n+2} + S(z+\omega)^{2n+3} + \ldots,$$

in welcher blos statt z, $z + \omega$ gesetzt ist, möglich seyn. Diese aber verwandelt sich, wenn man die Potenzen von $z + \omega$ gehörig nach §. 26. Nro. 3) entwickelt und alle dabey erhaltenen Glieder nach Potenzen von ω ordnet, in folgende Gleichung:

$$\text{Sin}\,(z+\omega) = \left\{\begin{array}{l} z \\ + Cz^2 \\ + Dz^3 \\ + Ez^4 \\ \vdots \\ + Pz^{2n} \\ + Qz^{2n+1} \\ + Rz^{2n+2} \\ + Sz^{2n+3} \\ \vdots \end{array}\right. \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \\ \vdots \\ + \\ + \\ + \\ + \\ \vdots \end{array} \left.\begin{array}{r} 1 \\ 2\,Cz \\ 3\,Dz^2 \\ 4\,Ez^3 \\ \\ 2n\,Pz^{2n-1} \\ (2n+1).Qz^{2n} \\ (2n+2).Rz^{2n+1} \\ (2n+3).Sz^{2n+2} \\ \end{array}\right\}.\omega \left.\begin{array}{l} + C \\ + 3.Dz \\ + 6.Ez^2 \\ \vdots \\ + \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2}.Pz^{2n-2} \\ + \frac{(2n+1).2n}{1\,.\,2}.Qz^{2n-1} \\ + \frac{(2n+2)(2n+1)}{1\,.\,2}.Rz^{2n} \\ + \frac{(2n+3)(2n+2)}{1\,.\,2}.Sz^{2n+1} \\ \vdots \end{array}\right\}.\omega^2 + \ldots$$

b) Fer-

b) Ferner müßte bey der Annahme der Möglichkeit der Gleichung (k) die Gleichung

$$\mathrm{Sin}\,\omega = \omega + C\omega^2 + D\omega^3 + E\omega^4 + \ldots + P\omega^{2n} + Q\omega^{2n+1} + R\omega^{2n+2} + S\omega^{2n+3} + \ldots,$$

und also auch, weil der $\mathrm{Cos}\,\omega = \sqrt{(1 - \mathrm{Sin}\,\omega^2)}$ ist, die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,\omega = [1 - (\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + E\omega^4 + \ldots)^2]^{\frac{1}{2}}$$

möglich seyn. Da nun $(\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + E\omega^4 + \ldots)^2 = (1 + C\omega + D\omega^2 + E\omega^3 + \ldots)^2.\omega^2$ seyn muß und die Potenz $(1 + C\omega + D\omega^2 + E\omega^3 + \ldots)^2$, wenn man sie nach §. 31. gehörig entwickelte, ganz gewiß eine Function von der Form $1 + b\omega + c\omega^2\ d\omega^3 + e\omega^4 + f\omega^5 + \ldots$ werden müßte; so könnte statt der vorigen Gleichung für $\mathrm{Cos}\,\omega$ auch die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,\omega = [1 - (1 + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + e\omega^4 + \ldots)\omega^2]^{\frac{1}{2}}$$

setzen. Entwickelte man aber ferner auch die Potenz $(1 - \omega^2 - b\omega^3 - c\omega^4 - d\omega^5 - e\omega^6 - \ldots)^{\frac{1}{2}}$ nach §. 31., so müßte sich diese in eine Function von der Form $1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3 + \gamma\omega^4 + \delta\omega^5 + \ldots$ verwandeln, und es würde demnach aus der vorigen für $\mathrm{Cos}\,\omega$ angegebenen Gleichung diese:

$$\mathrm{Cos}\,\omega = 1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3 + \gamma\omega^4 + \ldots + \pi\omega^{2\nu} + \rho\omega^{2\nu+2} + \ldots;$$

c) Nun ist aus der Trigonometrie bekannt, daß, wenn der Sin tot = 1 gesetzt wird,

$$\mathrm{Sin}\,(z + \omega) = \mathrm{Sin}\,z\,.\,\mathrm{Cos}\,\omega + \mathrm{Cos}\,z\,.\,\mathrm{Sin}\,\omega$$

seyn muß, und es müßte also auch, wenn die für $\mathrm{Cos}\,\omega$ und $\mathrm{Sin}\,\omega$ angegebenen Ausdrücke richtig wären,

$$\mathrm{Sin}\,(z + \omega) = \mathrm{Sin}\,z\,(1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3 + \gamma\omega^4 + \ldots) + \mathrm{Cos}\,z\,(\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + E\omega^4 + \ldots)$$

$$= \mathrm{Sin}\,z + \mathrm{Cos}\,z\,\omega + \left.\begin{matrix}\alpha\,\mathrm{Sin}\,z\\ + C\,\mathrm{Cos}\,z\end{matrix}\right\}\omega^2 + \left.\begin{matrix}\beta\,\mathrm{Sin}\,z\\ + D\,\mathrm{Cos}\,z\end{matrix}\right\}\omega^3 + \ldots$$

gesetzt werden können. Aus den beyden für $\mathrm{Sin}\,(z + \omega)$ jetzt angegebenen Ausdrücken aber ergäbe sich ferner die nachstehende Gleichung

$$\text{Sin } z + \text{Cos } z \,.\, \omega + (\alpha \text{ Sin } z + C \text{ Cos } z) \,.\, \omega^2 + \ldots$$

$$= \left\{\begin{array}{l} z \\ + Cz^2 \\ + Dz^3 \\ + Ez^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + Pz^{2n} \\ + Qz^{2n+1} \\ + Rz^{2n+2} \\ + Sz^{2n+3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right. \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \\ + \\ + \\ + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2.Cz \\ 3.Dz^2 \\ 4.Ez^3 \\ \\ \\ \\ 2n.Pz^{2n-1} \\ (2n+1)Qz^{2n} \\ (2n+2)Rz^{2n+1} \\ (2n+3)Sz^{2n+2} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \omega + \left\{\begin{array}{l} C \\ + 3.Dz \\ + 6.Ez^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2} . Pz^{2n-2} \\ + \frac{(2n+1).2n}{1\,.\,2} . Qz^{2n-1} \\ + \frac{(2n+2)(2n+2)}{1\,.\,2} . Rz^{2n} \\ + \frac{(2n+3)(2n+2)}{1\,.\,2} . Sz^{2n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} . \omega^2 + \ldots,$$

und diese müßte für einen jeden beliebigen Werth von ω gelten. Da aber letzteres nur möglich ist, wenn die in einerley Potenzen von ω multiplicirten Coefficienten gleich sind (§. 21.); so müßte man auch ferner noch für einen jeden Werth von z diese Gleichungen annehmen:

I) $\text{Sin } z = z + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + Rz^{2n+2} + Sz^{2n+3} + \ldots.$

II) $\text{Cos } z = 1 + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + 2nPz^{2n-1} + (2n+1)Qz^{2n} + (2n+2)Rz^{2n+1} + (2n+3)Sz^{2n+2} + \ldots.$

u. s. w.

d) Wäre jetzt die Gleichung II) angenommen, so müßte man ferner zugeben, daß auch

$$\text{Cos}(z+\omega) = 1 + 2C(z+\omega) + 3D(z+\omega)^2 + 4E(z+\omega)^3 + \ldots + 2nP(z+\omega)^{2n-1} + (2n+1)Q(z+\omega)^{2n} + (2n+2)R(z+\omega)^{2n+1} + (2n+3)S(z+\omega)^{2n+2} + \ldots$$

sey, welche Gleichung, wenn man die Potenzen von $z + \omega$ entwickelt, und alles nach Potenzen von ω ordnet, in folgende übergeht:

Cos

$$\mathrm{Cos}\,(z+\omega)$$

$$= \left\{\begin{array}{llll|ll}
 & 1 & & & & \\
+ & 2Cz & + & 2.1.C & & \\
+ & 3Dz^2 & + & 3.2.Dz & + & 3.D \\
+ & 4Ez^3 & + & 4.3.Ez^2 & + & 4.3\,Ez \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \\
+ & 2n\,Pz^{2n-1} & + & 2n(2n-1)\,Pz^{2n-2} & + & \frac{2n(2n-1)}{1} \cdot \frac{(2n-2)}{2} . Pz^{2n-3} \\
+ & (2n+1)\,Qz^{2n} & + & (2n+1).2n\,Qz^{2n-1} & + & \frac{(2n+1).2n}{1} \cdot \frac{(2n-1)}{2} . Qz^{2n-2} \\
+ & (2n+2)\,Rz^{2n+1} & + & (2n+2)(2n+1)\,Rz^{2n} & + & \frac{(2n+2)(2n+1)}{1} \cdot \frac{.2n}{2} . Rz^{2n-1} \\
+ & (2n+3)\,Sz^{2n+2} & + & (2n+3)(2n+2)\,Sz^{2n+1} & + & \frac{(2n+3)(2n+2)}{1} \cdot \frac{(2n+1)}{2} . Sz^{2n} \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot &
\end{array}\right\} \begin{array}{l} .\,\omega \quad\quad .\,\omega^2 \end{array}$$

e) Nun ist ferner auch aus der Trigonometrie bekannt, daß

$$\mathrm{Cos}\,(z+\omega) = \mathrm{Cos}\,z.\mathrm{Cos}\,\omega - \mathrm{Sin}\,z.\mathrm{Sin}\,\omega$$

ist; es müßte also, wenn die für Sin ω und Cos ω in Nro. b) angegebenen Ausdrücke möglich wären, die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,(z+\omega) = \mathrm{Cos}\,z\,(1+\alpha\omega^2+\beta\omega^3+\ldots) - \mathrm{Sin}\,z\,(\omega+C\omega^2+D\omega^3+\ldots)$$

$$= \mathrm{Cos}\,z - \mathrm{Sin}\,z.\omega + \left.\begin{array}{l}\alpha\ \mathrm{Cos}\,z \\ -C\ \mathrm{Sin}\,z\end{array}\right\}\omega^2 + \left.\begin{array}{l}\beta.\ \mathrm{Cos}\,z \\ -D\ \mathrm{Sin}\,z\end{array}\right\}\omega^3 + \ldots$$

Statt haben. Aus den beyden für Cos $(z+\omega)$ angegebenen Ausdrücken müßte sich dann wieder die nachstehende Gleichung:

Cos z

$$\begin{array}{l} \mathrm{Cos}\,z - \mathrm{Sin}\,z.\omega + (\alpha\,\mathrm{Cos}\,z - C\,\mathrm{Sin}\,z).\omega^2 + \ldots \\ = \left\{ \begin{array}{l|l|l|} 1 & & \\ +\;2Cz & +\;2.1.C & \\ +\;3Dz^2 & +\;3.2.Dz & +\;3.D \\ +\;4Ez^3 & +\;4.3.Ez^2 & +\;4.3.Ez \\ \;\;\vdots & \;\;\vdots & \;\;\vdots \\ +\;2nP\,z^{2n-1} & +\;2n(2n-1)Pz^{2n-2} & +\;\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\;.\;2}.Rz^{2n-3} \\ +\;(2n+1)Qz^{2n} & +\;(2n+1).2n.Qz^{2n-1} & +\;\frac{(2n+1).2n.(2n-1)}{1\;.\;2}.Qz^{2n-2} \\ +\;(2n+2)Rz^{2n+1} & +\;(2n+2)(2n+1)Rz^{2n} & +\;\frac{(2n+2)(2n+1).2n}{2\;.\;2}.Rz^{2n-1} \\ +\;(2n+3)Sz^{2n+2} & +\;(2n+3)(2n+2)Sz^{2n+1} & +\;\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{1\;.\;2}.Sz^{2n} \\ \;\;\vdots & \;\;\vdots & \;\;\vdots \end{array} \right. \begin{array}{l} \omega \qquad\qquad\qquad\quad \omega^2 + \ldots \end{array} \end{array}$$

bilden lassen, und diese müßte für einen jeden Werth von ω gelten. Dieses könnte aber blos unter der Bedingung geschehen, daß man die in einerley Potenz von ω multiplicirten Coefficienten einander gleich setzte (§. 21.), und man müßte also auch die folgenden Gleichungen als gültig annehmen:

I) $\mathrm{Cos}\,z = 1 + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + 2nPz^{2n-1} + (2n+1)Qz^{2n} + \ldots,$

II) $-\mathrm{Sin}\,z = 2.1.C + 3.2.Dz + 4.3.Ez^2 + \ldots + 2n.(2n-1)Pz^{2n-2}$
$+ (2n+1).2n.Qz^{2n-1} + (2n+2)(2n+1).Rz^{2n} + (2n+3)(2n+2)Sz^{2n+1} + \ldots$

u. s. w.,

von welchen die Gleichung II) folgende Gleichung giebt:

$$\mathrm{Sin}\,z = -2.1.C - 3.2.Dz - 4.3.Ez^2 - 5.4.Fz^3 - 6.5.Gz^4 - 7.6.Hz^5 - \ldots$$
$$-2n(2n-1)Pz^{2n-2} - (2n+1).2n.Qz^{2n-1} - (2n+2)(2n+1)Rz^{2n} - (2n+3)(2n+2)Sz^{2n+1} - \ldots$$

f) Weil endlich nach Nro. 3) (k) die Function

$$\mathrm{Sin}\,z = z + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \ldots$$
$$+ Nz^{2n-2} + Oz^{2n-1} + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + \ldots$$

seyn

seyn soll, so müßte (wegen $\text{Sin}\, z = \text{Sin}\, z$) der am Ende von Nro. e) stehende Ausdruck für $\text{Sin}\, z$ dem hier zuletzt angegebenen gleich seyn. Dieses aber könnte wiederum nicht geschehen, wenn nicht die in einerley Potenz von z multiplicirten Coefficienten einander gleich gesetzt würden (§. 21.); man müßte mithin die nachstehenden Gleichungen annehmen:

$-2.1.C = 0$	$-2n(2n-1).P = N$
$-3.2.D = 1$	$-(2n+1).2n.Q = O$
$-4.3.E = C$	$-(2n+2)(2n+1).R = P$
$-5.4.F = D$	$-(2n+3)(2n+2).S = Q$
$-6.5.G = E$	. . . . .
$-7.6.H = F$	. . . . .
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .

Dieß sind nun die Gleichungen für die Größen C, D, E..., welche wir suchen wollten.

4) Aus den gesuchten Gleichungen ergeben sich folgende Werthe der Größen C, D, E...:

$C = \frac{0}{-1.2} = 0$	$P = \frac{-N}{(2n-1).2n} = \frac{\pm 1}{2.3.4\ldots(2n-1).2n}$
$D = \frac{1}{-2.3} = \frac{-1}{2.3}$	$Q = \frac{-O}{2n(2n+1)} = \frac{\pm 1}{2.3.4\ldots(2n+1).2n}$
$E = \frac{C}{-3.4} = 0$	$R = \frac{-P}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pm 1}{2.3.4\ldots(2n+1)(2n+2)}$
$F = \frac{D}{-4.5} = \frac{1}{2.3.4.5}$	$S = \frac{-Q}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{\pm 1}{2.3.4\ldots(2n+2)(2n+3)}$
$G = \frac{E}{-5.6} = 0$	. . . . . .
$H = \frac{F}{-6.7} = \frac{-1}{2.3.4.5.6.7}$	. . . . . .
. . . . .	. . . . . .
. . . . .	. . . . . .

Wir wollen dieselben näher betrachten.

a) Der Werth eines jeden Coefficienten, C und D ausgenommen, entspringt aus dem Werthe des vor ihm vorhergehenden Coefficienten, und zwar nach einem bestimmten Gesetze, welches, wenn man den in z^2 multiplicirten Coefficienten C den **zweyten**, und also D den **dritten**, E den **vierten** ꝛc. P den 2nten, Q den (2n + 1)ten Coefficienten nennt, auf folgende Art ausgedrückt werden kann.

"Man nehme, wenn man einen der Coefficienten E, F, G . . . haben will, "die Zahl, welche angiebt, der wievielste Coefficient erzeugt werden soll, und multiplicire "sie mit der um eine Einheit verminderten Zahl; das aus beyden Zahlen erhaltene "Product nehme man zum Nenner eines Bruches dessen Zähler = 1 ist, und mit "diesem Bruche multiplicire man den vorvorhergehenden Coefficienten; die hierdurch "erhaltene Größe aber nehme man **verneint**, wenn der vorvorhergehende Coefficient "**bejaht** war, **bejaht** aber, wenn das Gegentheil Statt fand."

Dem (2n + 3)ten Coefficienten S z. E. geht der (2n + 1)te Q voraus, daher ist $S = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \times Q$ und **bejaht**, wenn Q **verneint**, verneint aber, wenn Q **bejaht** war.

b) Da jeder Coefficient, C und D ausgenommen, aus dem vorvorhergehenden Coefficienten entspringt; so müssen, wenn dieselben bestimmte Größen werden sollen, die Coefficienten C und D bestimmt seyn. Dieß ist auch der Fall, denn C ist = 0 und D ist $= \frac{-1}{2 \cdot 3}$. Weil nun der **zweyte** Coefficient C = 0 ist; so muß der **vierte** Coefficient E, der **sechste** G ꝛc. und überhaupt ein jeder 2nter Coefficient = 0 werden; hingegen muß, weil der **dritte** Coefficient D einen wirklichen Werth hat, auch der **fünfte** F, der **siebende** H ꝛc. einen wirklichen Werth haben, d. h. es muß ein jeder (2n + 1)ter Coefficient eine wirkliche Größe seyn.

c) Wegen des Gesetzes in Nro. a) und b) giebt es also eine unzählbar große Menge (2n + 1)ter Coefficienten.

5) Weil aus den für die Coefficienten C, D, E . . . gesuchten Gleichungen keine Widersprüche und unmögliche Werthe folgen, sondern vielmehr Werthe für diese Coefficienten erhalten werden, welche **mögliche** Größen sind; so muß auch die in Nro. 3 festgesetzte Gleichung, auf welcher die Coefficientengleichungen beruhen, **möglich** seyn. Weil ferner alle



alle 2nten Coefficienten = 0 werden müssen; so sieht man, daß die in Nro. 3 festgesetzte Gleichung eigentlich diese seyn muß:

$$\text{Sin } z = z + Dz^3 + Fz^5 + Hz^7 + \ldots Qz^{2n+1} + Sz^{2n+3} + \ldots$$

Setzt man nun aus Nro. 4) die Werthe von D, F, H ... Q, S ... in diese Gleichung; so hat man:

$$\text{Sin } z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$
$$\pm \frac{z^{2n+1}}{2.3\ldots2n\,(2n+1)} \mp \frac{z^{2n+3}}{2.3\ldots(2n+2)(2n+3)} \pm \ldots$$

Diesem für Sin z gefundenen Ausdrucke gehört eine durch den Calcul unerreichbare Menge von Gliedern zu, und das Gesetz, nach welchem ein jedes folgendes Glied aus dem zunächst vorhergegangenen Gliede erhalten werden kann, fällt leicht in die Augen.

§. 144.

"Unmittelbar aus Nro 3) e) des vorigen §. ergiebt sich nun auch ein Ausdruck, "in welchem der **Cosinus** des Kreisbogens z durch den Bogen z algebraisch ausge- "drückt ist."

Es wurde nehmlich daselbst der Schluß gemacht, daß, wenn für den Sin. tot. = 1 der

$$\text{Sin. } z = z + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1}$$
$$+ Rz^{2n+2} + Sz^{2n+3} + \ldots$$

gesetzt werden könnte, auch für den dem Kreisbogen z zugehörigen Cosinus die Gleichung

$$\text{Cos. } z = 1 + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + 2n.Pz^{2n-1} + (2n+1)Qz^{2n}$$
$$(2n+2)Rz^{2n+1} + (2n+3)Sz^{2n+2} + \ldots$$

müßte bestehen können. Nun ist aber die Möglichkeit der für Sin z angegebenen Gleichung erwiesen und die Werthe der Größen B, C, D rc., welche dieser Gleichung für einen jeden beliebigen Werth von z ein Genüge leisten, sind gefunden; also ist auch die Möglichkeit der für Cos z gefolgerten Gleichung völlig ausser Zweifel gesetzt, und es giebt dieselbe einen bestimmten Ausdruck für Cos z, wenn man in ihr alle für die Größen B, C, D rc. gefundenen Werthe gehörig substituirt. Diese Substitution giebt:

$$\mathrm{Cos}\ z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots(2n-1).2n}$$

$$\mp \frac{z^{2n+2}}{2.3\ldots(2n+1)(2n+2)} \pm \ldots$$

Auch in diesem für Cos z gefundenen Ausdrucke, der ebenfalls für Sin tot. = 1 gilt, ist die Anzahl der ihm zugehörigen Glieder unzählbar groß und mithin durch den Calcul unerreichbar. Das Gesetz, nach welchen ein jedes folgendes Glied desselben aus dem zunächst vorhergehenden erzeugt werden kann, fällt ebenfalls leicht in die Augen. —

§. 145.

"Auch ist leicht einzusehen, daß sich nun alle trigonometrischen Linien durch den Kreisbogen z, welchem sie zugehören sollen, algebraisch ausdrücken lassen müssen, denn es "können ja dieselben, wie die Trigonometrie lehrt, durch die Sinus und Cosinus ausgedrückt werden."

1) Für die **Tangente** des Kreisbogens z erhält man einen Ausdruck, wenn man in der bekannten und für Sin. tot. = 1 geltenden Gleichung

$$\mathrm{Tang}\ z = \frac{\mathrm{Sin}\ z}{\mathrm{Cos}\ z}$$

die für Sin z und Cos z in den vorigen §. §. angegebenen Ausdrucke substituirt. Diese Substitution giebt;

$$\mathrm{Tang}\ z = \frac{z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6}}$$

Der für Tang z hier erhaltene Ausdruck nun hat die Form einer gebrochenen Function Z von z, nur mit dem Unterschiede, daß der Dividendus und auch der Divisor nicht aus einer angebbar, sondern aus einer unangebbar großen Anzahl von Gliedern besteht. Es kann aber, wie leicht einzusehen ist, ohngeachtet dieses Umstandes dennoch der Ausdruck durch Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten oder der Division in eine ohne Ende fortlaufende Reihe aufgelöst werden. Nimmt man diese Auflösung vor, so erhält man:

Tang

$$\text{Tang } z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{3\cdot5} + \frac{17z^7}{3\cdot5\cdot7\cdot3} + \frac{62z^9}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot3} + \ldots$$

$$= z + \frac{2z^3}{2\cdot3} + \frac{16\cdot z^5}{2.3.4.5} + \frac{272\cdot z^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{7936\cdot z^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \ldots$$

2) Für die **Cotangente** des Kreisbogens z ergiebt sich ein Ausdruck aus der bekannten für den Sin. tot. = 1 geltenden Gleichung

$$\text{Cot. } z = \frac{\text{Cos. } z}{\text{Sin. } z}.$$

Setzt man nehmlich in dieselbe die für Cos. z und Sin. z gefundenen Ausdrücke, so erhält man:

$$\text{Cot. } z = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.} + \ldots}{z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots},$$

woraus durch die Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten oder der Division diese Gleichung erhalten wird:

$$\text{Cot. } z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{3\cdot5\cdot3} - \frac{2z^5}{3\cdot5\cdot7\cdot9} - \frac{z^7}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot5} - \ldots$$

3) Für die **Secante** des Kreisbogens z wird ein Ausdruck erhalten, wenn man in die für den Sin. tot. = 1 geltende bekannte Gleichung

$$\text{Sec. } z = \frac{1}{\text{Cos. } z}$$

den für Cos. z angegebenen Ausdruck substituirt und hernach den hierdurch erhaltenen Quotienten in eine Reihe auflöst. Es ist

$$\text{Sec. } z = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots}$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5\cdot z^4}{2.3.4} + \frac{60\cdot z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

4) Für die **Cosecante** des Kreisbogens z folgt vermittelst der bekannten und für den Sin. tot. = 1 geltenden Gleichung

$$\text{Cosec. } z = \frac{1}{\text{Sin. } z}$$

durch die gehörig vorgenommene Substitution und Reduction die Gleichung:

$$\text{Cosec. } z = \frac{1}{z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \frac{31z^5}{15120} + \ldots$$

5) Für den Sinus versus des Kreisbogens z findet man ferner für Sin. tot. = 1 aus der bekannten Gleichung:

$$\text{Sin. vers. } z = 1 - \text{Cos. } z,$$

wenn man in derselben den für Cos. z angegebenen Ausdruck substituirt, die Gleichung:

$$\text{Sin. vers. } z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^6}{2.3.4.5.6} - \ldots \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots(2n-1).2n}$$

$$\mp \frac{z^{2n+2}}{2.3\ldots(2n+1)(2n+2)} \pm \ldots$$

6) Für den Cosinus versus des Kreisbogens z endlich findet man vermittelst der bekannten Gleichung

$$\text{Cos. vers. } z = 1 - \text{Sin. } z \text{ diese:}$$

$$\text{Cos. vers. } z = 1 - z + \frac{z^3}{2.3} - \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots \pm \frac{z^{2n+1}}{2.3\ldots 2n(2n+1)}$$

$$\mp \frac{z^{2n+3}}{2.3\ldots(2n+2)(2n+3)} \pm \ldots$$

Es versteht sich, daß in allen bisher angegebenen Ausdrücken der Kreisbogen z als rectificirt gedacht werden muß.

§. 146.

Die allgemeinen Glieder, welche den im vorigen §. für Tang. z, Cot. z, Sec. z, Cosec. z angegebenen Ausdrücken zugehören, und durch welche das Gesetz, nach welchem jedes Glied dieser Ausdrücke formirt werden muß, allgemein dargestellt wird, können auf dem Wege, auf welchem wir die Ausdrücke gesucht haben, nicht gefunden werden. Man kann aber dergleichen Ausdrücke auch noch auf andern Wegen finden, auf welchen man zugleich zur Bestimmung der den Ausdrücken zugehörigen allgemeinen Glieder gelangt. Wir

Wir wollen jetzt einen dieser Wege zeigen, auf dem man zu Ausdrücken für die Cosec. z, Cot. z und Tang z gelangen kann, welche ausserdem, daß sich bey ihnen das Gesetz der Formation ihrer Glieder allgemein darstellen läßt, noch einen andern Vortheil gewähren, der aber erst in der Folge, wenn wir die Ausdrücke selbst gebrauchen, in die Augen fallen wird. Zu diesem Wege aber müssen wir uns erst durch einen Satz vorbereiten, welcher in dem nächsten §. gelehrt und erwiesen wird.

§. 147.

"Wenn man die einer Gleichung $1 - Bz + Cz^5 - Dz^5 + Ez^7 - Fz^9 + \ldots$ "$\pm Uz^n = 0$ (h) zugehörenden Wurzeln α, β, γ ... π, ϱ ... nimmt, eine jede "derselben in die Einheit dividirt, alsdann aber alle hierbey erhaltenen Quotienten summirt "und das der Summe ursprünglich zugehörige Zeichen (+) oder (—) in das entgegenge- "setzte umändert; so muß die auf diesem Wege erhaltene Größe jedesmal dem Coefficien- "ten der ersten Potenz von z, welcher hier — B heißt, gleich seyn."

1) Man kann sich einen jeden der Wurzelwerthe α, β, γ ... π, ϱ ... der Größe z in der Form eines Quotienten $= \frac{1}{x}$ ausgedrückt vorstellen, denn man kann allemal den hierzu nöthigen Nenner x finden. Soll z. E. α so vorgestellt werden, so darf man nur x aus der Gleichung $\alpha = \frac{1}{x}$ nehmen, woraus $x = \frac{1}{\alpha}$ folgt. Wenn man nun überhaupt $z = \frac{1}{x}$ setzt, so verwandelt sich die Gleichung (h) in folgende:

$$1 - B.\left(\frac{1}{x}\right) + C\left(\frac{1}{x}\right)^5 - D\left(\frac{1}{x}\right)^6 + E\left(\frac{1}{x}\right)^7 - F\left(\frac{1}{x}\right)^9 + \ldots \pm U\left(\frac{1}{x}\right)^n = 0 \quad (\delta)$$

Diese muß für $\frac{1}{x} = \alpha$, $\frac{1}{x} = \beta$, $\frac{1}{x} = \gamma$ ꝛc. bestehen, also auch für $x = \frac{1}{\alpha}$, $x = \frac{1}{\beta}$, $x = \frac{1}{\gamma}$ ꝛc., denn sie ist die Gleichung (h), deren Wurzeln α, β, γ ꝛc. seyn sollten. Es sind also die Größen $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, ... $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\varrho}$ .... Werthe von x, welche der Gleichung (δ) ein Genüge leisten, und mithin Wurzeln dieser Gleichung.

2) Man kann ferner die Gleichung (δ) mit x^n multipliciren, dadurch erhält man folgende:

$$x^n.\left[1 - B.\left(\frac{1}{x}\right) + C.\left(\frac{1}{x}\right)^5 - D.\left(\frac{1}{x}\right)^6 + E.\left(\frac{1}{x}\right)^7 - F.\left(\frac{1}{x}\right)^9 + \ldots \pm U.\left(\frac{1}{x}\right)^n\right] = 0$$

oder

$$x^n - B.x^{n-1} + C.x^{n-3} - D.x^{n-5} + E\,x^{n-7} - F.x^{n-9} + \ldots \pm U = 0 \quad (\mathfrak{C})$$

Da nun der in dem vorletzten dieser beyden Ausdrücke in den Klammern stehende Factor für $x = \frac{1}{\alpha}$, $x = \frac{1}{\beta}$, $x = \frac{1}{\gamma}$ rc. den Werth $= 0$ erhalten muß (Nro. 1), allemal aber ein Product $= 0$ wird, sobald ein Factor diesen Werth erhält; so sind ganz gewiß die Größen $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \ldots \frac{1}{\pi}, \frac{1}{\varrho} \ldots$ auch Werthe von x, welche der Gleichung ($\mathfrak{C}$) ein Genüge leisten, und also Wurzeln dieser Gleichung.

3) Es ist aber die Gleichung ($\mathfrak{C}$) eine **regulirte** Gleichung vom nten Grade, und von einer solchen muß bekanntlich der Satz gelten, daß, wenn man die Summe ihrer Wurzeln nimmt und das dieser Summe zugehörige Zeichen (+) oder (—) in das entgegengesetzte umändert, die so formirte Größe jedesmal dem Coefficienten von x^{n-1} gleich sey. Sind nun die Wurzeln der Gleichung ($\mathfrak{C}$) folgende: $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \ldots \frac{1}{\pi}, \frac{1}{\varrho} \ldots$ (Nro. 2); so muß die Summe $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\varrho} + \ldots$ (welche hier gewiß bejaht ist, weil wegen der Abwechselungen der Zeichen die Gleichung ($\mathfrak{C}$) gar keine verneinte Wurzeln haben kann) wenn man ihr das entgegengesetzte Zeichen giebt, eine Größe $= -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\varrho} + \ldots\right)$ geben, welche $= -B$ ist. Daraus erhellet aber die Richtigkeit des im Anfange des §. behaupteten Satzes.

§. 148.

„Es sollen die in §. 146. versprochenen Ausdrücke für Cosec. z, Cot. z und Tang z „gesucht werden."

1) Aus der in §. 143. Nro. 5) für Sin. z angegebenen Gleichung ergiebt sich, wenn man dieselbe auf 0 zurückführt und hernach durch Sin. z dividirt, die Gleichung

$$\text{I)}\quad 1 - \frac{1}{\text{Sin. z}}.z + \frac{1}{2.3.\,\text{Sin. z}}.z^3 - \frac{1}{2.3.4.5.\,\text{Sin. z}}.z^5 + \ldots = 0$$

Aus der Gleichung ferner, welche in §. 145. Nro. 1) für Tang z gefunden wurde, entspringt, wenn man sie ebenfalls auf 0 zurückführt, mit Cot. z alsdann multiplicirt und hierauf das Glied Cot. z × Tang z = 1 setzt (weil bekanntlich Cot. $z = \frac{1}{\text{Tang z}}$ ist) die Gleichung:

II)

$$\text{II)}\ 1 - \frac{\text{Cot. } z}{1}\,.\,z - \frac{\text{Cot. } z}{3}\,.\,z^3 - \frac{2\,\text{Cot. } z}{3\,.\,5}\,.\,z^5 - \ldots = 0.$$

2) Von diesen beyden Gleichungen nun ist zunächst folgendes zu merken:

Sie müssen für einen jeden Werth des als rectificirt vorzustellenden Kreisbogens z gelten, weil sie auf einem richtigen Wege aus Gleichungen gefolgert sind, deren Gültigkeit für einen jeden Werth, welchen man einem als rectificirt vorgestellten Kreisbogen z beylegen kann, keinem Zweifel unterworfen ist. Es müssen also die linker Hand in ihnen stehenden Ausdrücke für einen jeden Werth, welchen z erhalten kann, den Werth = 0 erhalten, d. h. es muß ein jeder dieser Werthe von z eine Wurzel der beyden Gleichungen seyn. Weil nun z als rectificirter Kreisbogen unzählbar viele Werthe erhalten kann, so folgt, daß den beyden Gleichungen unzählbar viele Wurzeln zukommen müssen. Dieses stimmt auch ganz mit der Form dieser Gleichungen überein, deren Gradexponent, wie man sieht, eine unbestimmbar große Zahl ist.

Ferner sind in den beyden Gleichungen die Coefficienten der Potenzen der Größe z von z abhängig, denn in der Gleichung I) kommt in diesen Coefficienten Sin. z und in der Gleichung II) Cot. z vor. Diese Abhängigkeit aber ist nicht so beschaffen, daß, wie man glauben könnte, für einen jeden andern Werth von z auch die Coefficienten jedesmal einen andern Werth erhalten müssen. Man erinnere sich, um dieses einzusehen, an die Trigonometrie. Diese lehrt, daß, wenn B irgend einen Kreisbogen bedeutet, welcher $< 90^\circ$ ist, und durch π die halbe Kreisperipherie bezeichnet wird, der Sin. B nicht diesem Bogen B allein, sondern überhaupt einem jeden von den in der Reihe

$$(\mathfrak{h})\left\{\begin{array}{l} B;\ (\pi - B);\ (2\pi + B);\ (3\pi - B);\ (4\pi + B)\ \ldots \\ \qquad (2r.\pi + B);\ ((2r+1)\pi - B)\ \ldots \\ -(\pi + B);\ -(2\pi - B);\ -(3\pi + B);\ -(4\pi - B)\ \ldots \\ \qquad -(2r.\pi - B);\ -((2r+1).\pi + B)\ \ldots \end{array}\right.$$

enthaltenen unzählbar vielen Bögen als Sinus zugehören muß: und ferner, daß die Cot. B ebenfalls nicht blos die Cotangente des Bogens B ist, sondern auch die Cotangente aller der unzählbar vielen Bögen in der Reihe

$$(\mathfrak{d})\left\{\begin{array}{l} B;\ (\pi + B);\ (2\pi + B);\ (3\pi + B);\ (4\pi + B)\ \ldots \\ \qquad (2r.\pi + B);\ ((2r+1)\pi + B)\ \ldots \\ -(\pi - B);\ -(2\pi - B);\ -(3\pi - B);\ -(4\pi - B)\ \ldots \\ \qquad -(2r.\pi - B);\ -((2r+1).\pi - B)\ \ldots \end{array}\right.$$

 Stellt

Stellt man sich also vor, es sey in den Coefficienten der beyden Gleichungen I) und II) z einem Bogen B, welcher $< 90°$ ist, gleichgesetzt worden; so kann man nun in den mit diesen so bestimmten Coefficienten versehenen Gleichungen nicht etwa blos an die Stelle der Potenzen von z Potenzen des Bogens B setzen, sondern man kann überhaupt jetzt in der Gleichung I) alle Bögen gebrauchen, die der Reihe (♄) zugehören, weil für alle diese Bögen die Coefficienten der Gleichung I) dieselben bleiben, da $\text{Sin. } B = \text{Sin. } (2r.\pi + B) = \text{Sin. } ((2r+1)\pi - B) = \text{Sin. } -(2r.\pi - B) = \text{Sin. } -((2r+1)\pi + B)$ ist. Und ebenso kann man in der Gleichung II) alle Bögen gebrauchen, welche der Reihe (♂) zugehören, weil auch für diese die Coefficienten dieser Gleichung einerley Werth behalten müssen, da $\text{Cot. } B = \text{Cot. } (2r\pi + B) = \text{Cot. } ((2r+1)\pi + B) = \text{Cot } -(2r\pi - B) = \text{Cot. } -((2r+1).\pi - B)$ ist. Es giebt also, wenn die Coefficienten der Gleichungen I) und II) für irgend einen Bogen B $< 90°$ bestimmt werden, eine unzählbare Menge verschieden groſser und durch B und π bestimmter Kreisbögen, welche man an die Stelle der in diesen Gleichungen stehenden Potenzen von z setzen kann, und bey welchen die Coefficienten der Gleichungen unverändert denselben Werth behalten.

Da ferner ein jeder als rectificirt vorgestellter Kreisbogen z eine Wurzel der Gleichungen I) und II) seyn kann, so sind gewiß alle den Reihen (♄) und (♂) zugehörigen Kreisbögen, wenn man sich dieselben rectificirt vorstellt, Wurzeln dieser Gleichungen. Es bedeutet aber B in diesen Reihen einen jeden Kreisbogen, der $< 90°$ ist, und es fassen daher dieselben alle nur immer denkbaren Kreisbögen in sich. Demnach enthalten sie, wenn man sich die ihnen zugehörigen Kreisbögen rectificirt vorstellt, alle nur immer denkbaren Wurzeln der Gleichungen I) und II). Nun enthält aber die Reihe (♄) alle Kreisbogen nach einem bestimmten Gesetze, so daß, wenn B bestimmt wird, sogleich aus derselben in einer bestimmten Ordnung beliebig viele von den unzählig vielen Kreisbögen angegeben werden können, welche mit dem Bogen B einerley Sinus haben. Also lassen sich vermittelst dieser Reihe die der Gleichung I) zugehörigen unzählig vielen Wurzeln nach einem bestimmten Gesetze darstellen, so daß man sogleich für einen jeden Werth von B, nach welchen die Coefficienten dieser Gleichung bestimmt werden, in einer bestimmten Ordnung beliebig viele von der unangebbar großen Anzahl von Wurzeln, welche für jeden Werth von B dieser Gleichung zugehören, angeben kann. Auf ähnliche Art ergiebt sich auch, daß die Reihe (♂) alle Wurzeln der Gleichung II) nach einem bestimmten Gesetze für einen jeden Werth von B darstellt, für welchen die Coefficienten dieser Gleichung bestimmt seyn können.

3) Diese Gleichungen I) und II) nun, deren Wurzeln bisher betrachtet worden sind, haben die Form der in §. 147. betrachteten Gleichung; es muß daher von ihnen auch

eben

eben das gelten, was von jener Gleichung gelehrt und erwiesen worden ist. Es wird also, wenn man sich die Coefficienten der Gleichung I) für irgend einen beliebigen Kreisbogen B < 90° bestimmt gedenkt, ferner aber die Kreisbögen der Reihe (h) als rectificirt und als Wurzeln dieser Gleichung sich vorstellt, der ihr zugehörige erste Coefficient

$$\frac{1}{\text{Sin B}} = \frac{1}{B} + \frac{1}{\pi - B} + \frac{1}{2\pi + B} + \frac{1}{3\pi - B} + \frac{1}{4\pi + B} + \ldots + \frac{1}{2r.\pi + B} + \frac{1}{(2r+1)\pi - B} + \ldots$$
$$- \frac{1}{\pi + B} - \frac{1}{2\pi - B} - \frac{1}{3\pi + B} - \frac{1}{4\pi - B} - \ldots - \frac{1}{2r.\pi - B} - \frac{1}{(2r+1)\pi + B} - \ldots$$

seyn müssen.

Bekanntlich ist nun für den Sin. tot. = 1, die Cosec. B $= \frac{1}{\text{Sin B}}$. Der für $\frac{1}{\text{Sin. B}}$ hier angegebene Ausdruck ist also ein Ausdruck für die **Cosecante** eines jeden beliebigen Kreisbogens B, welcher < 90° ist. Man kann, wie man sieht, die in demselben unter einander stehenden Glieder unter einerley Benennung bringen und jedesmal zwey Glieder in eins verwandeln. Thut man dieses, so erhält man:

$$\text{Cosec. B} = \frac{1}{B} + \frac{2B}{\pi^2 - B^2} - \frac{2B}{2^2.\pi^2 - B^2} + \frac{2B}{3^2.\pi^2 - B^2} - \frac{2B}{4^2.\pi^2 - B^2} + \ldots$$
$$- \frac{2B}{(2r)^2\pi^2 - B^2} + \frac{2B}{(2r+1)^2\pi^2 - B^2} - \ldots$$

Setzt man jetzt, um diese Gleichung unseren übrigen Gleichungen ähnlich zu machen, statt B den Buchstaben z, merkt aber, daß hier z einen Kreisbogen bedeutet, der nicht über 90° groß ist; so hat man:

$$\text{Cosec. z} = \frac{1}{z} + \frac{2z}{\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{2^2.\pi^2 - z^2} + \frac{2z}{3^2.\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{4^2\pi^2 - z^2} + \ldots$$
$$- \frac{2z}{(2r)^2.\pi^2 - z^2} + \frac{2z}{(2r+1)^2.\pi^2 - z^2} - \ldots$$

Eben so muß, wenn man sich die Coefficienten der Gleichung II) für irgend einen beliebigen Kreisbogen B < 90° bestimmt gedenkt, die Kreisbögen der Reihe (𝔯) aber als rectificirt und als Wurzeln dieser Gleichung sich vorstellt, der ihr zugehörige Coefficient

$$\text{Cot. B} = \frac{1}{B} + \frac{1}{\pi + B} + \frac{1}{2\pi + B} + \frac{1}{3\pi + B} + \frac{1}{4\pi + B} + \ldots + \frac{1}{2r.\pi + B} + \frac{1}{(2r+1)\pi + B} + \ldots$$
$$- \frac{1}{\pi - B} - \frac{1}{2\pi - B} - \frac{1}{3\pi - B} - \frac{1}{3\pi - B} - \ldots - \frac{1}{2r.\pi - B} - \frac{1}{(2r+1)\pi + B} - \ldots$$

seyn.

seyn. Bringt man die in diesem für Cot. z gefundenen Ausdrucke unter einander stehenden Glieder unter einerley Benennung und nimmt dieselben in eins zusammen, so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$\text{Cot. } B = \frac{1}{B} - \frac{2B}{\pi^2 - B^2} - \frac{2B}{2^2.\pi^2 - B^2} - \frac{2B}{3^2.\pi^2 - B^2} - \frac{2B}{4^2.\pi^2 - B^2} - \ldots$$

$$- \frac{2B}{(2r)^2\,\pi^2 - B^2} - \frac{2B}{(2r+1)^2\,\pi^2 - B^2} - \ldots$$

Setzt man nun auch hier, um diese Gleichung den übrigen ähnlich zu machen, statt B den Buchstaben z und merkt, daß z einen jeden Kreisbogen bedeutet, der kleiner als 90° ist; so erhält man:

$$\text{Cot. } z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{2^2.\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{3^2.\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{4^2.\pi^2 - z^2} - \ldots$$

$$- \frac{2z}{(2r)^2.\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{(2r+1)^2.\pi^2 - z^2} - \ldots$$

4) Vermittelst der für Cosec. B und Cot. B in Nro. 3) angegebenen Ausdrücke läßt sich nun auch ein Ausdruck für die Tangente eines jeden Bogens z finden, welcher kleiner als 90° ist. Bekanntlich ist, wenn ein Kreisbogen mit A bezeichnet wird, für den Sin. tot. $= 1$ der $\text{Sin. } 2A = 2\,\text{Cos. } A \times \text{Sin. } A$, woraus $\frac{\text{Sin. } 2A}{\text{Sin. } A} = 2\,\text{Cos. } A$ folgt. Durch die Multiplication der letzten Gleichung mit Cos. A aber erhält man die Gleichung $\text{Sin. } 2A\,\frac{\text{Cos. } A}{\text{Sin } A} = 2\,\text{Cos. } A^2$ oder, weil $\frac{\text{Cos. } A}{\text{Sin. } A} = \text{Cot. } A$ ist, $\text{Sin. } 2A \times \text{Cot. } A = 2\,\text{Cos. } A^2$, woraus die Gleichung

$$\text{Cot. } A = \frac{2\,\text{Cos. } A^2}{\text{Sin. } 2A}$$

folgt. Setzt man ferner in der Gleichung $\frac{\text{Cos. } A}{\text{Sin. } A} = \text{Cot. } A$ statt A den doppelten Bogen 2 A, so erhält man:

$$\text{Cot. } 2A = \frac{\text{Cos. } 2A}{\text{Sin. } 2A}.$$

Beyde für Cot. A und Cot. 2 A jetzt angegebenen Gleichungen nun geben, wenn man die letzte von der ersten abzieht, die Gleichung

$$\text{Cot. } A - \text{Cot. } 2A = \frac{2.\text{Cos. } A^2 - \text{Cos. } 2A}{\text{Sin. } 2A}.$$

In

In dieser kann man statt $\text{Cos.}\,2\,A$ auch den bekannten gleichgeltenden Ausdruck $\text{Cos.}\,A^2 - \text{Sin.}\,A^2$ setzen, dann verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$\text{Cot.}\,A - \text{Cot.}\,2\,A = \frac{\text{Cos.}\,A^2 + \text{Sin.}\,A^2}{\text{Sin.}\,2\,A}$$

Da nun $\text{Cos.}\,A^2 + \text{Sin.}\,A^2 = 1$ und $\frac{1}{\text{Sin.}\,2\,A} = \text{Cosec.}\,2\,A$ ist, so kann man die vorige Gleichung auch so ausdrücken:

$$\text{Cot.}\,A - \text{Cot.}\,2\,A = \text{Cosec.}\,2\,A,$$

woraus $\text{Cot.}\,A = \text{Cosec.}\,2\,A + \text{Cot.}\,2\,A$, oder, weil $\text{Cot.}\,A = \frac{1}{\text{Tang.}\,A}$ ist,

$$\frac{1}{\text{Tang.}\,A} = \text{Cosec.}\,2\,A + \text{Cot.}\,2\,A$$

folgt. Hieraus erhält man ferner

$$\text{Tang.}\,A = \frac{1}{\text{Cosec.}\,2\,A + \text{Cot.}\,2\,A},$$

in welcher Gleichung die Tangente des Bogens A durch die Cosecante und Cotangente des doppelten Bogens ausgedrückt ist. Man kann aber dieselbe noch bequemer einrichten. Wenn man nehmlich den Ausdruck rechter Hand im Zähler und Nenner mit $\text{Cosec.}\,2\,A - \text{Cot}\,2\,A$ multiplicirt, so erhält man zunächst die Gleichung

$$\text{Tang.}\,A = \frac{\text{Cosec.}\,2\,A - \text{Cot.}\,2\,A}{\text{Cosec.}\,2\,A^2 - \text{Cot.}\,2\,A^2},$$

und hieraus ferner, weil $\text{Cosec.}\,2\,A^2 - \text{Cot.}\,2\,A^2 = 1$ seyn muß, die Gleichung

$$\text{Tang.}\,A = \text{Cosec.}\,2\,A - \text{Cot.}\,2\,A.$$

Man setze nun in der vorigen Gleichung $2\,A = B$, dann ist $A = \tfrac{1}{2}\,B$,

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,B = \text{Cosec.}\,B - \text{Cot.}\,B,$$

und aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich, wenn man die in Nro. 3) für Cosec. B und Cot. B angegebenen Ausdrücke substituirt, die Gleichung:

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{1}{B} + \frac{2\,B}{\pi^2 - B^2} - \frac{2\,B}{2^2.\pi^2 - B^2} + \frac{2\,B}{3^2.\pi^2 - B^2} - \frac{2\,B}{4^2.\pi^2 - B^2} + \ldots$$
$$- \frac{2\,B}{(2\,r)^2.\pi^2 - B^2} + \frac{2\,B}{(2\,r+1)^2.\pi^2 - B^2} - \ldots$$

$$-\left(\frac{1}{B}-\frac{2B}{\pi^2-B^2}-\frac{2B}{2^2.\pi^2-B^2}-\frac{2B}{3^2.\pi^2-B^2}-\frac{2B}{4^2.\pi^2-B^2}-\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{2B}{(2r)^2.\pi^2-B^2}-\frac{2B}{(2r+1)^2.\pi^2-B^2}-\ldots\right)$$

oder

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}B=\frac{4B}{\pi^2-B^2}+\frac{4B}{3^2\pi^2-B^2}+\ldots+\frac{4B}{(2r+1)^2.\pi^2-B^2}+\ldots$$

Setzt man $\frac{1}{2}B=z$, so wird $B=2z$ und $4B=8z$, und es verwandelt sich die vorige Gleichung, wenn man ihr noch mehr Glieder giebt, in folgende:

$$\text{Tang}\,z=\frac{8z}{\pi^2-4z^2}+\frac{8z}{3^2.\pi^2-4z^2}+\frac{8z}{5^2.\pi^2-4z^2}+\frac{8z}{7^2.\pi^2-4z^2}+\ldots$$
$$+\frac{8z}{(2r+1)^2.\pi^2-4z^2}+\frac{8z}{(2r+3)^2\pi^2-4z^2}+\ldots$$

§. 149.

Da sich, wie bereits gezeigt worden ist, Ausdrücke finden lassen, in welchen die trigonometrischen Linien wenigstens näherungsweise durch die Kreisbögen, welchen sie zugehören, algebraisch ausgedrückt sind; so ist auch kein Zweifel, daß sich umgekehrt die Kreisbögen als Functionen der trigonometrischen Linien näherungsweise algebraisch darstellen lassen müssen. Wie dieses geschehen könne, dieses soll in den folgenden §. §. gelehrt werden. Wir wollen daselbst die trigonometrische Linie, welche wir als die absolut veränderliche Größe betrachten, durch z, den ihr zugehörigen Bogen aber, welcher als eine Function Z von z betrachtet wird, durch Arc.z bezeichnen. Damit man aber wisse, welche von den verschiedenen trigonometrischen Linien unter z zu verstehen sey; so soll jedesmal dem Buchstaben z der Name dieser Linie mit dem Gleichheitszeichen vorgesetzt werden. Es bedeutet demnach

Arc. (Sin = z) einen Bogen, dessen Sinus = z,
Arc. (Cos = z) " " " Cosinus = z,
Arc. (Tang = z) " " " Tangens = z ist,

u. s. w.

§. 150.

"Es sey der Sinus eines rectificirten Kreisbogens $= z$ und der als eine Function Z "von z betrachtete Kreisbogen heiße Arc. (Sin. $= z$). Es soll gezeigt werden, wie sich "ein Ausdruck finden läßt, in welchem die Abhängigkeit der Function Arc. (Sin. $= z$) von "dem als eine absolut veränderliche Größe z betrachteten Sinus algebraisch darstellen läßt."

1) Man nehme an, es sey der Bogen Z oder

$$\text{Arc.}(\text{Sin.} = z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + \ldots,$$

worin A, B, C ... von z unabhängige und unbestimmte Größen bedeuten und die Anzahl der Glieder unbestimmt groß ist, und untersuche, ob diese Gleichung möglich ist. Daß sie, wenn man A nicht $= 0$ setzt, ganz gewiß unmöglich ist, dieß erhellt sogleich aus der geometrischen Natur der Function $Z = \text{Arc.}(\text{Sin} = z)$. Diese nehmlich muß für $z = 0$ den Werth $= 0$ erhalten, der ihr gleichgesetzte Ausdruck aber wird für $z = 0$ nicht $= 0$, sondern $= A$, also eine wirkliche Größe, wenn man nicht annimmt, A sey $= 0$. Man nehme demnach an, es sey $A = 0$, setze die Function Z oder

$$\text{Arc.}(\text{Sin.} = z) = Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^{2n} + Qz^{2n+1} + \ldots;$$

und untersuche jetzt, ob diese letzte Gleichung möglich ist. Die Untersuchung kann dadurch geschehen, daß man durch eine auf diese Gleichung gegründete Rechnung Gleichungen für die Größen B, C, D ... aufsucht, und nachsieht, ob dieselben auf keine Widersprüche oder imaginäre Werthe der Größen B, C, D ... führen.

2) Diese Rechnung, durch welche man zu Gleichungen für die Größen B, C, D... gelangen könnte, ließe sich auf folgende Art anstellen.

In §. 143. ist erwiesen worden, daß, wenn irgend ein als rectificirt gedachter Kreisbogen durch Z und der für den Halbmesser $= 1$ ihm zugehörige Sinus durch Sin. Z bezeichnet wird,

$$\text{Sin. } Z = Z - \frac{Z^3}{2.3} + \frac{Z^5}{2.3.4.5} - \frac{Z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots \pm \frac{Z^{2n+1}}{2.3 \ldots 2n(2n+1)}$$
$$\mp \frac{Z^{2n+3}}{2.3 \ldots (2n+2)(2n+3)} \pm \ldots$$

seyn muß. Wäre nun die Größe des diesem Kreisbogen Z zugehörigen Sinus $= z$, und mithin $Z = \text{Arc.}(\text{Sin.} = z)$, Z aber wirklich $= Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$, wie wir in Nro. 1) angenommen haben; so müßte auch, wenn man für Z diesen Ausdruck in die vorige Gleichung setzte, die nachstehende Gleichung möglich seyn:

 Sin.

$$\text{Sin.}\,Z = Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots - \frac{(Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^3}{2\,.\,3} + \frac{(Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

$$- \frac{(Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^7}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \ldots \pm \frac{(Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^{2n+1}}{2\,.\,3\ldots 2n\,(2n+1)} \mp \frac{(Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^{2n+3}}{2\,.\,3\ldots(2n+2)(2n+3)} \pm \ldots$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Potenzen der Function $Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$ k'nnte man nun nach §. 31. Nro. 16) gehörig entwickeln, für Sin. Z aber könnte man in derselben z setzen, und hierauf die ganze Gleichung auf 0 reduciren und alle Glieder derselben nach Potenzen von z ordnen. Hierdurch erhielte man eine Gleichung, in welcher, wenn sie möglich seyn sollte, alle Coefficienten der Potenzen von z den Werth = 0 haben müßten (§. 20.). Setzte man nun diese wirklich = 0, so hätte man Gleichungen für die Coefficienten B, C, D, E . . .

3) Die hier angedeutete Rechnung haben wir darum nicht selbst vorgenommen, weil sie ziemlich weitläuftig ist, und unser Zweck auf eine kürzere Art erreicht werden kann. Wenn man nehmlich die aus der angedeuteten Rechnung sich ergebenden Coefficientengleichungen gehörig untersucht, so findet man, daß die Werthe aller der in der angenommenen Function $Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$ stehenden Coefficienten, welche zu **geraden** Potenzen von z gehören, = 0 seyn müssen, und daß nur die den **ungeraden** Potenzen von z zugehörigen Coefficienten **wirkliche** Größen werden. Dieß aber ist ein Beweis, daß die in Nro. 1) angenommene Gleichung nur unter der Bedingung möglich ist, wenn C = 0, E = 0, G = 0 ꝛc. gesetzt wird, und daß also der für Z = Arc. (Sin. = z) mögliche Ausdruck eigentlich dieser ist:

$$Bz + Dz^3 + Fz^5 + Hz^7 + \ldots + Qz^{2n+1} + Rz^{2n+3} + \ldots;$$

Setzt man demnach $\text{Arc.}(\text{Sin.} = z) = Bz + Dz^3 + Fz^5 + Hz^7 + \ldots + Qz^{2n+1} + Sz^{2n+3} \ldots$ und sucht die Werthe für die Coefficienten B, D, F . . .; so wird, weil jetzt die Coefficienten der **geraden** Potenzen von z, welche, wie wir schon erinnert haben, alle = 0 werden müssen, weggelassen sind, die Rechnung beträchtlich kürzer und leichter, als die vorhin angedeutete. Sie ist folgende:

a) Weil $\text{Sin.}\,Z = Z - \frac{Z^3}{2.3} + \frac{Z^5}{2.3.4.5} - \frac{Z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$ ist, so muß auch, wenn Z oder $\text{Arc.}(\text{Sin.} = z) = Bz + Dz^3 + Fz^5 + Hz^7 + \ldots$ gesetzt werden kann,

Sin.

$$\text{Sin. } Z = Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots - \frac{(Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots)^3}{2\ .\ 3}$$

$$+ \frac{(Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots)^5}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5} - \frac{(Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots)^7}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7} + \dots$$

seyn. Nun ist aber, wenn man die Entwickelung der Potenzen der Function $Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots$ gehörig vornimmt,

$$(Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots)^3 = B^3.z^3 + 3B^2.Dz^5 + 3B.D^2.z^7 + D^3.z^9 + 3B^2.Fz^7 + \dots$$

$$(Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots)^5 = B^5.z^5 + 5B^4 Dz^7 + \dots$$

$$(Bz + Dz^3 + Fz^5 + \dots)^7 = B^7.z^7 + \dots \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man diese entwickelten Potenzen in die obige Gleichung, drückt ferner in derselben Sin Z durch z aus, reducirt hernach die Gleichung auf o und ordnet alle Glieder derselben nach Potenzen von z; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l} B & .z + D & z^3 + F & z^5 + H & z^7 + \dots \\ -1 & -\frac{B^3}{2.3} & -\frac{3B^2.D}{2.3} & -\frac{3B^2.F}{2.3} & \\ & & +\frac{B^5}{2.3.4.5} & +\frac{5B^4.D}{2.3.4.5} & \\ & & & -\frac{B^7}{2.3.4.5.6.7} & \end{array}\right\} = 0.$$

b) Da nun diese Gleichung nur alsdann für alle Werthe von $z = 0$ möglich seyn kann, wenn alle Coefficienten der Potenzen von z den Werth $= 0$ haben (§. 20.); so muß man, wenn man ihre Gültigkeit annimmt, auch folgende Gleichungen als gültig annehmen:

$$B - 1 = 0,$$

$$D - \frac{B^3}{2.3} = 0,$$

$$F - \frac{3B^2.D}{2.3} + \frac{B^5}{2.3.4.5} = 0,$$

$$H - \frac{3B^2 F}{2.3} + \frac{5.B^4 D}{2.3.4.5} - \frac{B^7}{2.3\dots7} = 0,$$

u. s. w.

Aus diesen folgt nun:

$$B = 1,$$

$$D = \frac{B^3}{2.3} = \frac{1}{2.3},$$

$$F = \frac{3\,B^2.D}{2.3} - \frac{B^5}{2.3.4.5} = \frac{1.3}{2.4.5},$$

$$H = \frac{3\,B^2.F}{2.3} - \frac{5.B^4.D}{2.3.4.5} + \frac{B^7}{2.3\ldots7} = \frac{1.3.5}{2.4.6.7},$$

u. s. w.

4) Man sieht leicht ein, daß man, wenn man weiter fortrechnet, auch für alle folgenden Coefficienten reelle Werthe erhalten wird und daß nie einer derselben $= 0$ werden kann. Es ist also der in Nro. 3) für die Function $Z = \text{Arc.}(\text{Sin.} = z)$ angenommene Ausdruck möglich, die Anzahl der ihm zugehörigen Glieder aber ist unendlich groß und folglich durch den Calcul unerreichbar. Setzt man die für die ersteren Coefficienten hier berechneten Werthe in den erwähnten Ausdruck; so hat man Z oder

$$\text{Arc.}(\text{Sin.} = z) = z + \frac{z^3}{2.3} + \frac{1.3.z^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.z^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

§. 151.

"Da wir jetzt einen Ausdruck haben, in welchem der Kreisbogen Z durch den ihm "zugehörigen **Sinus** näherungsweise algebraisch ausgedrückt ist; so kann auf eben diese Art "der Kreisbogen Z auch durch eine jede andere trigonometrische Linie ausgedrückt werden."

1) Dieses sieht man sogleich ein, wenn man sich an die Sätze der Trigonometrie erinnert, in welchen gelehrt wird, daß man den **Sinus** durch jede andere trigonometrische Linie ausdrücken kann. Man darf nehmlich nur die in dem vorigen §. angegebene Gleichung nehmen und statt des in ihr stehenden **Sinus**, welcher mit z bezeichnet war, die Ausdrücke setzen, die man erhält, wenn man den **Sinus** $= z$ des Bogens Z durch den **Cosinus**, die **Tangente**, die **Cotangente** u. s. w. ausdrückt; hierdurch muß man alle Ausdrücke erhalten, welche den Bogen Z durch den **Cosinus**, die **Tangente**, die **Cotangente** u. s. w. ausgedrückt darstellen. Diese Ausdrücke wollen wir nun aufsuchen. Damit dieses desto deutlicher werde, so soll in der im vorigen §. Nro. 4) angegebenen Gleichung, die wir jetzt gebrauchen müssen, statt des Buchstabens z der Name der Linie, welche z bezeichnete, geschrieben werden; es sieht demnach die erwähnte Gleichung so aus:

$Z =$

$$Z = \text{Sinus } Z + \frac{\text{Sinus } Z^3}{2 . 3} + \frac{1 . 3 . \text{Sinus } Z^5}{2 . 4 . 5} + \frac{1 . 3 . 5 . \text{Sinus } Z^7}{2 . 4 . 6 . 7} + \ldots$$

2) Es sey also a) Z ein rectificirter Kreisbogen, dessen **Cosinus** = z ist, und mithin z = Cos. Z und Z = Arc. (Cos. = z); es soll Z durch z ausgedrückt werden.

Weil für Sin. tot. = 1, der Sin. Z = $\sqrt{(1 - \text{Cos. } Z^2)}$ oder, wenn man statt Cos. Z dessen Werth = z setzt, = $\sqrt{(1 - z^2)} = (1 - z)^{\frac{1}{2}}$ ist; so muß, wenn in der in Nro. 1) angegebenen Gleichung an die Stelle von Z der Ausdruck $(1 - z)^{\frac{1}{2}}$ gesetzt wird, die Function Z, oder

$$\text{Arc.}(\text{Cos} = z) = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{2 . 3} + \frac{1.3.(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}{2 . 4 . 5} + \frac{1.3.5.(1-z^2)^{\frac{7}{2}}}{2 . 4 . 6 . 7} + \ldots$$

$$= (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \times \left(1 + \frac{1.(1-z^2)}{2 . 3} + \frac{1.3.(1-z^2)^2}{2 . 4 . 5} + \frac{1.3.5((1-z^2)^3}{2 . 4 . 6 . 7} + \ldots\right)$$

werden, und dieß ist nun der Ausdruck, in welchem der Kreisbogen durch seinen **Cosinus** ausgedrückt ist.

b) Es sey Z ein rectificirter Kreisbogen, dessen **Tangente** = z ist, und also z = Tang. Z und Z = Arc. (Tang. = z); man soll Z durch z ausdrücken.

Weil für den Sin. tot. = 1 der Sin. Z = $\frac{\text{Tang. } Z}{\sqrt{(1+\text{Tang. } Z^2)}}$ ist, hieraus aber, wenn man z anstatt Tang. Z setzt, Sin. Z = $\frac{z}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ wird; so ergiebt sich durch die Substitution des für Sin. Z hier angegebenen Ausdruckes aus der in Nro. 1) stehenden Gleichung folgende:

$$\text{Arc.}(\text{Tang.} = z) = \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 . z^3}{2.3.(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 . 3 . z^5}{2.4.5(1+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1 . 3 . 5 . z^7}{2.4.6.7(1+z^2)^{\frac{7}{2}}} + \ldots$$

In dieser aber ist der Kreisbogen durch dessen Tangente ausgedrückt.

c) Es sey Z ein rectificirter Kreisbogen, dessen **Cotangente** = z ist, und also z = Cot. Z und Z = Arc. (Cot. = z); es soll Z durch z ausgedrückt werden.

Weil

Weil für den Sin. tot. = 1 der Sin. Z = $\frac{1}{\sqrt{(1 + \text{Cot. } Z^2)}}$ ist, woraus, wenn man anstatt Cot. Z, z setzt, Sin. Z = $\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ wird; so muß, wenn der für Sin. Z der jetzt angegebene Ausdruck in die Gleichung in Nro. 1) gesetzt wird, Z oder

$$\text{Arc. (Cot.} = z) = \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2.3.(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{2.4.5.(1+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.(1+z^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} \times \left(1 + \frac{1}{2.3.(1+z^2)} + \frac{1.3}{2.4.5.(1+z^2)^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.(1+z^2)^3} + \ldots\right)$$

werden, in welcher Gleichung der Kreisbogen durch seine *Cotangente* ausgedrückt ist.

d) Ferner sey Z ein rectificirter Kreisbogen, dessen **Secante** z heißt, und also z = Sec. Z und Z = Arc. (Sec. = z); es soll Z durch z ausgedrückt werden.

Für den Sin. tot. = 1 ist bekanntlich Sin. Z = $\frac{\sqrt{(\text{Sec. } Z^2 - 1)}}{\text{Sec. } Z}$ woraus, wenn man z statt Sec. Z, setzt, Sin. Z = $\frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z}$ wird. Setzt man nun diesen für Sin. Z hier angegebenen Ausdruck in die Gleichung in Nro. 1); so erhält man Z oder

$$\text{Arc. (Sec.} = z) = \frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z} + \frac{1.(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}{2.3.z^3} + \frac{1.3.(z^2-1)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5.z^5} + \frac{1.3.5.(z^2-1)^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7.z^7} + \ldots$$

$$= \frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z} \times \left(1 + \frac{1.(z^2-1)}{2.3.z^2} + \frac{1.3.(z^2-1)^2}{2.4.5.z^4} + \frac{1.3.5.(z^2-1)^3}{2.4.6.7.z^6} + \ldots\right)$$

e) Ferner sey Z ein rectificirter Kreisbogen, dessen **Cosecante** z heißt und also z = Cosec. Z und Z = Arc. (Cosec. = z); es soll Z durch z ausgedrückt werden.

Weil für den Sin. tot. = 1 der Sin. Z = $\frac{1}{\text{Cosec. } Z}$ ist, woraus,

aus, wenn man z statt Cosec. Z setzt, Sin. Z $= \frac{1}{z}$ wird; so muß, wenn jetzt in der in Nro. 1) stehenden Gleichung statt Sin. Z der Ausdruck $\frac{1}{z}$ gesetzt wird,

$$\text{Arc.}(\text{Cosec.} = z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2.3.z^3} + \frac{1.3}{2.4.5.z^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.z^7} + \ldots$$

werden, und in dieser Gleichung ist der Kreisbogen durch dessen Cosecante ausgedrückt.

Nach dem bisher beobachteten Verfahren kann man auch die Ausdrücke angeben, in welchen der Bogen Z durch den ihm zugehörigen **Sinus versus** oder **Cosinus versus** ausgedrückt ist.

§. 152.

1) Zu Ausdrücken, in welchen die Kreisbögen als Functionen der trigonometrischen Linien näherungsweise algebraisch dargestellt werden, kann man auch noch auf einem andern Wege gelangen, als auf dem, welchen wir im vorhergehenden §. gegangen sind. Man kann nehmlich solche Ausdrücke auf eben die Art erhalten, wie der Ausdruck in §. 150. erhalten wurde, in welchem der Kreisbogen durch seinen Sinus ausgedrückt ist. Wir wollen dieses durch ein Beyspiel zeigen.

Gesetzt man wollte den Kreisbogen Z durch die ihm zugehörige Tangente, welche hier wiederum durch z bezeichnet werden soll, ausdrücken. Hier dürfte man nur die in §. 145. Nro. 1) angegebene Gleichung zu Hülfe nehmen, nach welcher, wenn der Kreisbogen durch Z bezeichnet wird,

$$\text{Tang. } Z = Z + \frac{2.Z^3}{2.3} + \frac{16.Z^5}{2.3.4.5} + \frac{272.Z^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{7936.Z^9}{2.3.4\ldots9} + \ldots$$

seyn muß, dürfte alsdann die Hypothese machen, es sey $Z = Bz + Cz^3 + Dz^5$ $Ez^7 + \ldots$ und diesen Ausdruck statt Z in die vorige Gleichung setzen. Entwickelte man hierauf die Potenzen von $Bz + Cz^3 + Dz^5 + \ldots$ in der durch die erwähnte Substitution erhaltenen neuen Gleichung, setzte in derselben statt Tang. Z den Werth z, reducirte die Gleichung auf o und ordnete endlich alle Glieder nach Potenzen von z; so ergäbe sich eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten der Potenzen von z den Werth = o haben müßten, wenn dieselbe für alle Werthe von z richtig seyn sollte (§. 20.). Setzte

man sie nun wirklich $= 0$, so erhielte man Gleichungen für die unbestimmt angenommenen Größen B, C, D ꝛc., und aus diesen würde man finden:

$$B = 1;\ C = \frac{-1}{3};\ D = \frac{1}{5};\ E = \frac{-1}{7};\ F = \frac{1}{9};\ G = \frac{-1}{11};\ \text{u. s. w.}$$

Dieß wäre ein Beweis, daß der Kreisbogen, dessen Tangente $= z$ ist, wirklich $= Bz$ $Cz^3 + Dz^5 + Ez^7 + \ldots$ gesetzt werden kann, und daß die Werthe der Größen B, C, D ꝛc. welche dieser Gleichung für einen jeden Werth von z ein Genüge leisten, die gefundenen Werthe seyn müssen. Man hätte demnach

$$\text{Arc.}(\text{Tang.} = z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 - \frac{1}{11}z^{11} + \ldots.$$

2) Man sieht, daß der für Arc. (Tang. $= z$) so eben angegebene Ausdruck, welchen man auf dem andern Wege erhalten kann, einfachere Glieder hat und bequemer ist, als der auf dem Wege in §. 151. Nro. 2) b) gefundene. So könnte man nun auf diesem andern Wege auch Ausdrücke für Arc. (Cot. $= z$), Arc. (Sec. $= z$) ꝛc. suchen. Beyde bereits gezeigten Wege sind zwar leicht, weil sie die wenigsten Vorkenntniße voraussetzen, aber sie haben die Unbequemlichkeit, daß sich das allgemeine Gesetz, nach welchem die Glieder der auf ihnen gefundenen Ausdrücke formirt werden müssen, nicht erweisen läßt. Darum verdienen andere Wege, welche zu eben solchen Ausdrücken führen, vor ihnen den Vorzug. Keiner von diesen aber konnte von uns gewählt werden, weil dieselben Lehren voraussetzen, welche erst in der Folge vorkommen.

§. 153.

Vermittelst der vorhin angegebenen Ausdrücke, in welchen die trigonometrischen Linien als Functionen der Kreisbögen näherungsweise algebraisch ausgedrückt sind, hätten sich diese Linien und ihre Logarithmen viel leichter berechnen lassen, als es von den ersten Verfertigern der trigonometrischen Tafeln, die mit den Kunstgriffen der Analysis noch nicht so bekannt waren, geschehen ist. Das Verfahren, dessen sich diese bedienten, ist aus der Trigonometrie bekannt. Das Verfahren aber, welches man beobachten müßte, wenn man sich der erwähnten Ausdrücke zur Berechnung der trigonometrischen Tafeln mit Vortheil bedienen wollte, soll in den folgenden §. §. gezeigt werden. Zwar liegt dieses ausser den Gränzen, welche wir uns vorgeschrieben und blos auf die Betrachtung der Formen der trigonometrischen Functionen eingeschränkt hatten, in so ferne die Kenntniß derselben für den Differenzial- und Integralcalcul nothwendig ist; zu dem scheint der hieraus entspringende Nutzen

sehr

sehr gering zu seyn, weil es nicht mehr nöthig ist, trigonometrische Tafeln zu verfertigen. Allein wir glauben, daß es dem Anfänger nicht unangenehm seyn wird, wenn wir ihm gelegentlich zeigen, wie viel leichter jetzt, da wir in der mathematischen Analysis so weit vorgerückt sind, ein Werk zu Stande gebracht werden könnte, dessen Verfertigung den ersten Verfertigern desselben in der That keine geringe Anstrengung gekostet haben mag. Ueberdieß aber ist es auch gar nicht so unnütz, als es dem ersten Augenblicke nach zu seyn scheint, wenn man weis, wie sich geschwind und leicht eine trigonometrische Linie oder der ihr zugehörige Logarithmus berechnen läßt, denn man kann Anlaß finden, an der Richtigkeit dieser und jener Zahlen in den trigonometrischen Tafeln zu zweifeln und die in Zweifel gestellten Zahlen selbst nachzurechnen, zumal da die **vollkommene** Richtigkeit der genannten Tafeln noch sehr in Zweifel zu stellen ist.

A) Von der Berechnung der trigonometrischen Linien.

---

§. 154.

Da die Trigonometrie lehrt, daß die trigonometrischen Linien aller Kreisbögen, welche über 90° hinausgehen, angegeben werden können, wenn man dieselben für alle Bögen, welche zwischen 0° und 90° fallen, anzugeben weis; so haben wir auch blos die Berechnung dieser Linien für die zwischen 0° und 90° liegenden Kreisbögen zu zeigen nöthig. Hierbey wird es aber wiederum hinreichend seyn, wenn wir dieselbe nur für alle Bögen von 0° bis 45 zeigen, weil bekanntlich die **Sinus** der Bögen unter 45° die **Cosinus** der Bögen über 45°, und die **Cosinus** der Bögen unter 45° die **Sinus** der Bögen über 45° sind, und der ähnliche Satz auch von allen übrigen Linien gilt.

§. 155.

"Es soll gezeigt werden, wie man die Ausdrücke, welche für Sin. z und Cos. z an-
"gegeben worden sind, auf eine bequemere Art zur Berechnung der **Sinus** und **Cosinus**
"aller zwischen 0° und 45° enthaltenen Kreisbögen gebrauchen kann."

1) Wenn die als rectificirt gedachten Kreisbögen, deren **Sinus** und **Cosinus** berechnet werden sollen, durch z bezeichnet werden; so muß nach §. 143. und §. 144. für den Sin. tot. = 1 seyn:

 Sin.

$$\text{Sin. } z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\text{Cos. } z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

2) Bezeichnet man nun die Zahl, welche andeuten soll, wie viele Bogengrade ein Kreisbogen enthält, ganz allgemein durch v (wo v eine **ganze** oder **gebrochene** Zahl bedeutet, deren Einheiten oder Theile der Einheit sich jedesmal auf Bogengrade beziehen) und drückt die rectificirte und durch den Halbmesser oder Sin. tot. = 1 ausgemessene halbe Kreislinie durch π aus; so muß die Länge eines jeden v Bogengrade enthaltenden rectificirten Kreisbogens, welche in den obigen Gleichungen durch z bezeichnet ist, $= \frac{v^{\circ}}{360^{\circ}}.2\pi = \frac{v\pi}{180}$ seyn. Wird dieser letztere Ausdruck in den beyden vorigen Gleichungen an die Stelle von z gesetzt, so erhält man:

$$\text{Sin. } v^{\circ} \text{ oder Sin. } \frac{v\pi}{180} = \frac{v.\pi}{180} - \frac{v^3.\pi^3}{2.3.180^3} + \frac{v^5.\pi^5}{2.3.4.5.180^5} - \frac{v^7.\pi^7}{2.3\ldots7.180^7} + \ldots$$

$$\text{Cos. } v^{\circ} \text{ oder Cos. } \frac{v\pi}{180} = 1 - \frac{v^2.\pi^2}{2.180^2} + \frac{v^4.\pi^4}{2.3.4.180^4} - \frac{v^6.\pi^6}{2.3.4.5.6.180^6} + \ldots$$

3) Diese für Sin. v° und Cos. v° so formirten Ausdrücke nun, welche ohne Ende fortlaufende Reihen sind, würden allerdings zur bequemen Berechnung der **Sinus** und **Cosinus** der Kreisbögen tauglich seyn, wenn folgende Bedingungen Statt fänden:

a) Wenn man angeben könnte, wie groß die Länge π der halben Kreisperipherie seyn muß, wenn man sich dieselbe als rectificirt und mit dem zur Einheit angenommenen Halbmesser des Kreises ausgemessen vorstellt.

b) Wenn es sich zeigen ließe, daß die für Sin. v° und Cos. v° formirten Reihen **convergirende**, d. i. solche Reihen sind, in welchen ein jedes folgende Glied kleiner wird, als das vorhergehende Glied.

c) Wenn man darthun könnte, daß diese Reihen **geschwind** convergiren, d. h., daß man nur nöthig hat, wenige Glieder derselben auszurechnen, um den **Sinus** oder **Cosinus** in sehr kleinen Theilen des Halbmessers oder Sin. tot. = 1 ausgedrückt zu erhalten.

4) Die

4) Die hier angeführten Bedingungen aber finden in der That alle Statt, welches jetzt gezeigt werden soll.

a) Aus der Elementargeometrie weis man schon die Größe von π; wird nehmlich der Halbmesser des Kreises $= 1$ gesetzt, so muß die rectificirte halbe Kreisperipherie 3,14 ... mal den Halbmesser enthalten. Wäre aber auch die Größe π nicht aus der Elementargeometrie bekannt, so könnte man sie doch auf verschiedene Weise vermittelst der Ausdrücke, in welchen die Kreisbögen durch die trigonometrischen Linien ausgedrückt sind, sehr leicht berechnen. Ob wir nun gleich diese Berechnung hier nicht vorzunehmen brauchen, weil wir einmal aus der Elementargeometrie wissen, daß $\pi = 3,14\ldots$ seyn muß; so soll dennoch, damit nichts fehle, auch diese in der Folge vorgenommen werden.

b) Daß aber die für Sin. v° und Cos. v° angegebenen Reihen in der Rechnung, in welcher sie gebraucht werden sollen, wirklich convergirend sind, dieses erhellet so: Der größte Werth, welchen v bey der Berechnung der Sinus und Cosinus aller zwischen 0° und 45° liegenden Bögen, für welche wir blos die Berechnung dieser Linien nöthig haben (§. 154.), erhalten kann, ist $= 45^\circ$. Da nun $\pi = 3,14\ldots$ ist, so ist in dem Ausdrucke $\frac{v\pi}{180}$, das Maximum des Zählers $v\pi = 45 \cdot 3,14\ldots = 141,3\ldots$, und also gewiß nicht > 142. Demnach muß der Ausdruck $\frac{v\pi}{180}$ für alle die Werthe von v, welche v bey der Berechnung der Sinus und Cosinus erhält, ein ächter Bruch seyn, der den Bruch $\frac{142}{180}$ nie übersteigt, sondern vielmehr desto kleiner ist, je kleiner v genommen wird.

Wenn aber $\frac{v\pi}{180}$ jedesmal einen ächten Bruch bedeutet, so müssen gewiß auch die Potenzen $\left(\frac{v\pi}{180}\right)^3$, $\left(\frac{v\pi}{180}\right)^5$, $\left(\frac{v\pi}{180}\right)^7$ ꝛc. ächte Brüche, und zwar desto kleinere ächte Brüche seyn, je größer der Potenzenexponent ist.

Drückt man nun die für Sin. v° und Cos. v° in Nro. 2) stehenden Reihen auf folgende Art aus:

$$\text{Sin. } v^\circ = \frac{v\pi}{180} - \frac{1}{2.3}\cdot\left(\frac{v.\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\cdot\left(\frac{v.\pi}{180}\right)^5 - \frac{1}{2.3\ldots7}\cdot\left(\frac{v.\pi}{180}\right)^7 + \ldots,$$

$$\text{Cos. } v^\circ = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v.\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4}\cdot\left(\frac{v.\pi}{180}\right)^4 - \frac{1}{2.3\ldots7}\cdot\left(\frac{v.\pi}{180}\right)^6 + \ldots;$$

 so —

so sieht man deutlich, daß ein doppelter Grund vorhanden ist, warum jedes folgende Glied immer kleiner wird, als das vorhergehende. Es werden nehmlich nicht nur die Potenzen des ächten Bruches $\frac{v\pi}{180}$ desto kleiner, je höher ihre Exponenten steigen, sondern es sind auch in den beyden Reihen die mit den Potenzen von $\frac{v\pi}{180}$ multiplicirten Coefficienten ächte Brüche, welche immer größere Nenner bekommen und mithin ebenfalls immer kleiner werden.

c) Daß endlich die Reihen auch ziemlich geschwind convergiren, dieses läßt sich so einsehen:

Man berechne in der Reihe für Sin. v° das vierte Glied, welches

$$= \frac{1}{2.3.4.5.6.7} \times \left(\frac{v\pi}{180}\right)^7 = 0{,}0001984 \ldots \times \left(\frac{v\pi}{180}\right)^7$$

ist, und zwar für den Fall, wenn v am größten ist, und also der ächte Bruch $\frac{v\pi}{180}$ den größten Werth unter allen den Werthen hat, welche er überhaupt bey der Berechnung der Sinus erhalten kann. Wenn der Bogen $v = 45°$ ist, so wird der Bruch $\frac{v\pi}{180} = \frac{45 \times 3{,}141\ldots}{180} = \frac{3{,}141\ldots}{4} = 0{,}785\ldots$ und also noch nicht $= 0{,}786$. Demnach wird auch für eben diesen Werth von v die Potenz $\left(\frac{v.\pi}{180}\right)^7$ noch nicht $= (0{,}786)^7 = 0{,}184\ldots.$ Daraus sieht man, daß, wenn der Bruch $\frac{v\pi}{180}$ auch seinen größten Werth hat, dennoch das vierte Glied $0{,}0001984\ldots \times \left(\frac{v.\pi}{180}\right)^7$ noch kleiner, als die Zahl $0{,}0001984\ldots \times 0{,}184\ldots$ seyn muß, welche $= 0{,}0000365\ldots$ ist und erst in der Stelle der Hunderttausendtheilchen anfängt.

Man berechne ferner für einen Fall, wo der Bogen v ziemlich klein ist, z. E. für $v = \frac{1}{60}$ Grad = 1 Minute, den Sinus. Für diesen Werth von v wird das erste Glied $\frac{v\pi}{180}$ der Sinusreihe $= \frac{\frac{1}{60} \times 3{,}14\ldots}{180} = \frac{3{,}14}{10800} = 0{,}000298882\ldots$ Weil nun hier, wenn man weiter rechnet, die übrigen Glieder der Sinusreihe auch in der eilften Decimalstelle noch keine bedeutliche Ziffer geben; so kann man sogleich die durch Berechnung des ersten Gliedes erhaltene Zahl für den Sin. 1′ annehmen, und hierbey macht man noch keinen Fehler, der sich in der zehnten Decimalstelle der gefundenen Zahl zeigen könnte.

Aus

Aus den bisher angestellten Betrachtungen über die Sinusreihe ergiebt sich von selbst, daß auch die Cosinusreihe geschwind convergirt.

Es sind also die für Sin. v° und Cos. v° in Nro. 2) angegebenen Reihen für die Berechnung aller **Sinus** und **Cosinus** der Bögen, welche zwischen 0° und 45° liegen, nicht nur wirklich tauglich, sondern auch sehr bequem.

5) Noch bequemer für die geschwindere Rechnung lassen sich dieselben auf folgende Weise einrichten:

a) Ein jeder von den Kreisbögen, welche von 0° bis zu 45° folgen, läßt sich als ein aliquoter Theil des Quadranten ausdrücken, und der Bruch $\frac{m}{n}$, welcher andeutet, was für ein aliquoter Theil von 90° ein solcher Bogen ist, kann allemal gefunden werden, wenn die Anzahl v der Grade, welche der Kreisbogen enthält, gegeben ist. Setzt man nehmlich $v^\circ = \frac{m}{n}.90^\circ$, so muß auch $\frac{v}{90} = \frac{m}{n}$ seyn. Ist also $v = 2^\circ$, so ist $\frac{m}{n} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$; ist ferner $v = 40^\circ$, so muß $\frac{m}{n} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$ seyn; für $v = 45^\circ$ folgt $\frac{m}{n} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$ u. s. w.

b) Drückt man nun in den beyden in Nro. 4) b) für Sin. v° und Cos. v° angegebenen Ausdrücken die Zahl v durch $\frac{m}{n}$ 90° aus; so wird

der Ausdruck $\frac{v\pi}{180} = \frac{\frac{m}{n}.90.\pi}{180} = \frac{m.\pi}{2n}$, und also auch

$$\left(\frac{v\pi}{180}\right)^2 = \left(\frac{m.\pi}{2.n}\right)^2 = \frac{m^2.\pi^2}{2^2.n^2},$$

$$\left(\frac{v\pi}{180}\right)^3 = \left(\frac{m.\pi}{2.n}\right)^3 = \frac{m^3.\pi^3}{2^3.n^3},$$

$$\left(\frac{v\pi}{180}\right)^4 = \left(\frac{m.\pi}{2.n}\right)^4 = \frac{m^4.\pi^4}{2^4.\pi^4},$$

u. s. w.

Dem-

Demnach ist nun der Sin. v° oder Sin. $\frac{m}{n} 90°$

$$= \frac{m\pi}{2n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{m^3 . \pi^3}{2^3 . n^3} + \frac{1}{120} \cdot \frac{m^5 . \pi^5}{2^5 . n^5} - \frac{1}{5040} \cdot \frac{m^7 . \pi^7}{2^7 . n^7} + \ldots$$

$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{\pi^3}{6 . 2^3} + \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{\pi^5}{120 . 2^5} - \frac{m^7}{n^7} \cdot \frac{\pi^7}{5040 . 2^7} + \ldots$$

Und ebenso wird der Cos. v° oder Cos. $\frac{m}{n} 90°$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 . \pi^2}{2^2 . n^2} + \frac{1}{24} \cdot \frac{m^4 . \pi^4}{2^4 . n^4} - \frac{1}{720} \cdot \frac{m^6 . \pi^6}{2^6 . n^6} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{2 . 2^2} + \frac{m^4}{n^4} \cdot \frac{\pi^4}{24 . 2^4} - \frac{m^6}{n^6} \cdot \frac{\pi^6}{720 . 2^6} + \ldots$$

e) Weil nun $\pi = 3,14159265358 \ldots$ und $\frac{\pi}{2} = 1,57079632679 \ldots$ ist, so muß $\frac{\pi^3}{6 . 2^3}$ oder $\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 : 6 = \frac{1,57079632679^3}{6} = 0,64596409751 \ldots$ werden, und auf diese Art kann man auch alle übrigen Größen berechnen, welche in den vorigen Gleichungen in die Potenzen von $\frac{m}{n}$ multiplicirt sind. So erhält man äusserst bequeme Ausdrücke für die Berechnung des Sinus und Cosinus, welche wir hier hersetzen wollen.

Es ist Sin. v° oder Sin. $\frac{m}{n} 90°$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{m}{n} . 1,57079632679 \ldots \\ \frac{m^5}{n^5} . 0,07969262625 \ldots \\ \frac{m^9}{n^9} . 0,00016044118 \ldots \\ \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0,00000005692 \ldots \\ \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0,00000000000 \ldots \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{m^3}{n^3} . 0,64596409751 \ldots \\ \frac{m^7}{n^7} . 0,00468175414 \ldots \\ \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0,00000359884 \ldots \\ \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,00000000067 \ldots \\ \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0,00000000000 \ldots \end{Bmatrix}$$

u. s. w.

Ferner

Ferner ist $\text{Cos.}\ v^{\circ}$ oder $\text{Cos.}\ \frac{m}{n}\ 90^{\circ}$

$$= 1 + \left\{\begin{array}{l} \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}25366950790 \ldots \\ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00091926027 \ldots \\ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000047109 \ldots \\ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000000007 \ldots \\ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000000000 \ldots \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} \frac{m^2}{n^2} \cdot 1{,}23370055014 \ldots \\ \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}02086348076 \ldots \\ \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00002520204 \ldots \\ \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000000639 \ldots \\ \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}00000000000 \ldots \end{array}\right\}$$

u. s. w.

5) Wir wollen jetzt den Gebrauch der angegebenen Formeln, bey welchem man zu merken hat, daß $\frac{m}{n} = \frac{v}{90}$ ist und $\frac{m}{n}$ nie über $\frac{45}{90} = \frac{1}{2}$ wächst, weil v nicht $> 45^{\circ}$ genommen zu werden braucht, durch wirkliche Anwendung derselben verdeutlichen.

a) Es soll der Sin. 9° berechnet werden. Hier ist $v = 9$ und also $\frac{m}{n} = \frac{9}{90} = 0{,}1$, $\frac{m^3}{n^3} = 0{,}001$, $\frac{m^5}{n^5} = 0{,}00001$, $\frac{m^7}{n^7} = 0{,}0000001$. Multiplicirt man nun diese vier Potenzen von $\frac{m}{n}$ in die in der Sinusgleichung bey diesen Potenzen stehenden Zahlen, so erhält man folgende zwey positive und zwey negative Glieder:

0,157079632679 ...	− 0,000645964097 ...
0,000000796926 ...	− 0,000000000468 ...,

deren Summen aber sind:

0,157080429605 ..., − 0,000645964565 ...

Hieraus ergiebt sich nun schon hinlänglich genau der Sin. 9° = 0,15643446504.

b) Es soll die Berechnung des Cos. 30°, 30′ (= Sin. 59° 30′) angegeben werden. Hier ist $v = 30^{\circ},\ 30' = (30 + \frac{1}{2})^{\circ} = \frac{61^{\circ}}{2}$, und folglich $\frac{m}{n} = \frac{v}{90} = \frac{\frac{61}{2}}{90} = \frac{61}{180}$. Man berechne also die geraden Potenzen von $\frac{61}{180}$, multiplicire sie gehö-

rig in die Zahlen, welche in der vorigen für Cos v° angegebenen Gleichung stehen, und nehme hierauf alles gehörig zusammen, dann wird man Cos. 30°, 31′ erhalten.

§. 156.

"Es soll gezeigt werden, wie sich die Ausdrücke, welche wir im Vorhergehenden für "Tang. z und Cot. z angegeben haben, bequem zur Berechnung der **Tangenten** und "**Cotangenten** aller zwischen 0° und 45° liegenden Kreisbögen gebrauchen lassen."

1) Wenn der als rectificirt vorgestellte Kreisbogen, dessen **Tangente** und **Cotangente** berechnet werden soll, z heißt, so muß nach §. 145.

$$\text{Tang. } z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{3.5} + \frac{17z^7}{3.5.7.3} + \frac{62.z^9}{3.5.7.9.3} + \ldots$$

$$\text{Cot. } z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{3.5.3} - \frac{2z^5}{3.5.7.9} - \frac{z^7}{3.5.7.9.5} - \ldots$$

seyn, und zwar für Sin. tot. = 1. Bezeichnet man nun die Anzahl der Bogengrade, welche der Kreisbogen enthält, dessen durch Rectification erhaltene Länge z heißen soll, durch v, die durch den Halbmesser = 1 ausgemessene rectificirte halbe Kreisperipherie aber durch π; so muß $z = \frac{v^\circ}{360^\circ} . 2\pi = \frac{v\pi}{180}$ seyn. Es werden also, wenn man diesen Ausdruck statt z in den vorigen Gleichungen gebraucht, dieselben folgende:

$$\text{Tang. } v^\circ \text{ oder Tang. } \frac{v\pi}{180} = \frac{v\pi}{180} + \frac{v^3.\pi^3}{3.180^3} + \frac{2v^5.\pi^5}{3.5.180^5} + \frac{17.v^7.\pi^7}{3.5.7.3.180^7} + \ldots$$

$$\text{Cot. } v^\circ \text{ oder Cot. } \frac{v\pi}{180} = \frac{180}{v\pi} - \frac{v.\pi}{3.180} - \frac{v^3.\pi^3}{3.5.3.180^3} - \frac{2.v^5.\pi^5}{3.5.7.9.180^5} - \ldots$$

2) Nimmt man nun in diesen für Tang. v° und Cot v° hier angegebenen Ausdrücken den Bogen v nie über 45°, so steigt gewiß der Quotient $\frac{v\pi}{180}$ nie über $\frac{45 \times 3,14\ldots}{180}$ oder, 0,785 . . . und er bleibt mithin für alle übrigen zwischen 0° und 90° fallenden Werthe des Bogens v ein ächter Bruch. Daraus aber sieht man, daß die Ausdrücke, welche ohne Ende fortlaufende Reihen bilden, für alle zwischen 0° und 45° enthaltenen Werthe der Bögen v in ihren Gliedern **convergiren** und folglich wirklich zur Berechnung der **Tangenten** und **Cotangenten** dieser Bögen tauglich sind. Aber so bequem für die Rechnung sind diese Ausdrücke doch nicht, wie die, welche wir im vorigen §. für die Berechnung der **Sinus** und **Cosinus** angaben, denn sie convergiren, wie man leicht sieht, nicht so geschwin-

geschwind, als jene Ausdrücke. In Nro. 4, c) des vorigen §. wurde für $v = 45°$ das vierte Glied der Sinusreihe berechnet und der Werth dieses Gliedes war $= 0{,}0000365\ldots$, fieng also in der Stelle der Hunderttausendtheile an: berechnet man aber hier, und zwar ebenfalls für $v = 45°$, das vierte Glied der Tangentenreihe; so erhält man den Werth $= 0{,}0096\ldots$, welcher schon in der Stelle der Tausendtheile seinen Anfang nimmt.

3) Weil die bisher betrachteten Ausdrücke nicht geschwind genug convergiren, so bedient man sich der andern in §. 148. für Tang. z und Cot. z gesuchten Gleichungen, welche diese waren:

$$\text{Tang. } z = \frac{8z}{\pi^2-4z^2} + \frac{8z}{3^2\pi^2-4z^2} + \frac{8z}{5^2.\pi^2-4z^2} + \frac{8z}{7^2.\pi^2-4z^2} \ldots$$
$$\frac{8z}{(2r+1)^2.\pi^2-4z^2} + \frac{8z}{(2r+3)^2.\pi^2-4z^2} + \ldots;$$

$$\text{Cot. } z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2-z^2} - \frac{2z}{2^2.\pi^2-z^2} - \frac{2z}{3^2.\pi^2-z^2} - \frac{2z}{4^2.\pi^2-z^2} - \ldots$$
$$\frac{2z}{(2r)^2.\pi^2-z^2} - \frac{2z}{(2r+1)^2.\pi^2-z^2} - \ldots$$

Die Art aber, wie man sich dieser Gleichungen am vortheilhaftesten zur Berechnung der **Tangenten und Cotangenten** aller zwischen 0° und 45° enthaltenen Kreisbögen bedienen kann, ist folgende:

a) Man kann hier eben so, wie im vorigen §. den zwischen 0° und 45° fallenden und aus v Graden bestehenden Kreisbogen als einen aliquoten Theil des Quadranten ausdrücken, also $= \frac{m}{n} 90°$ setzen, und $\frac{m}{n}$ muß dann allemal $= \frac{v}{90}$ seyn. Setzt man nun wirklich $v° = \frac{m}{n} 90°$, so wird der Ausdruck $\frac{v\pi}{180}$ des Bogens v, welcher die durch Rectification erhaltene Länge z dieses Bogens angiebt,

$$= \frac{\frac{m}{n}.90.\pi}{180} = \frac{m.\pi}{2n}.$$

Für $z = \frac{m\pi}{2n}$ aber erhält man aus der ersten der beyden Gleichungen diese Gleichung:

I) Tang.

I) Tang. v° oder Tang. $= \frac{m}{n} \cdot 90°$

$$= \frac{4.mn}{(n^2-m^2)\pi} + \frac{4mn}{(3^2.n^2-m^2)\pi} + \frac{4mn}{(5^2.n^2-m^2)\pi} + \frac{4mn}{(7^2.n^2-m^2)\pi} + \ldots$$

$$+ \frac{4mn}{((2r+1)^2n^2-m^2)} + \frac{4mn}{((2r+3)^2.n^2-m^2)} + \ldots$$

$$= \left[\frac{m.n}{n^2-m^2} + \frac{m.n}{3^2.n^2-m^2} + \frac{m.n}{5^2.n^2-m^2} + \frac{m.n}{7^2.n^2-m^2} + \ldots + \frac{m.n}{(2r+1)^2.n^2-m^2}\right.$$

$$\left. + \frac{m.n}{(2r+3)^2.n^2-m^2} + \ldots\right] \cdot \frac{4}{\pi}.$$

Aus der zweyten der beyden obigen Gleichungen ergiebt sich ferner für $z = \frac{m.\pi}{2n}$ folgende Gleichung:

II) Cot. v° oder Cot. $\frac{m}{n}$ 90°

$$= \frac{2n}{m.\pi} - \frac{4m.n}{(2^2.n^2-m^2).\pi} - \frac{4m.n}{(2^2.2^2.n^2-m^2).\pi} - \frac{4m.n}{(2^2.3^2.n^2-m^2).\pi} - \frac{4m.n}{(2^2.4^2n^2-m^2).\pi} - \ldots$$

$$- \frac{4mn}{(2^2(2r)^2.n^2-m^2).\pi} - \frac{4mn}{(2^2.(2r+1)^2.n^2-m^2).\pi} - \ldots$$

$$= \left[\frac{n}{2m} - \frac{mn}{2^2.n^2-m^2} - \frac{mn}{2^2.2^2.n^2-m^2} - \frac{mn}{2^2.3^2.n^2-m^2} - \frac{mn}{2^2.4^2.n^2-m^2} - \ldots\right.$$

$$\left. - \frac{mn}{2^2(2r)^2.n^2-m^2} - \frac{mn}{2^2.(2r+1)^2.n^2-m^2} - \ldots\right] \cdot \frac{4}{\pi}.$$

b) In diesen beyden Gleichungen I) und II) nun sind alle Glieder der in den Klammern stehenden Ausdrücke Quotienten, von welchen sich ein jeder durch Division in eine Reihe verwandeln läßt. Wir wollen diese Verwandlung hier vornehmen:

Durch die Division erhält man überhaupt aus einem Quotienten von der Form $\frac{mn}{w^2.n^2-m^2}$ folgende Reihe:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{w^2} + \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{1}{w^4} + \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{1}{w^6} + \frac{m^7}{n^7} \cdot \frac{1}{w^8} + \frac{m^9}{n^9} \cdot \frac{1}{w^{10}} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}} \cdot \frac{1}{w^{2\varrho}} + \ldots,$$

deren

deren Gesetz leicht eingesehen werden kann. Hieraus ergiebt sich aber für $w = 2$, $w = 3$, $w = 4$, $w = 5$ ꝛc.

$$\frac{m\,n}{2^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{2^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{2^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{2^6} + \frac{m^7}{n^7} . \frac{1}{2^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}} . \frac{1}{2^{2\varrho}} + \ldots$$

$$\frac{m\,n}{3^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{3^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{3^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{3^6} + \frac{m^7}{u^7} . \frac{1}{3^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}} . \frac{1}{3^{2\varrho}} + \ldots$$

$$\frac{m\,n}{4^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{4^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{4^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{4^6} + \frac{m^7}{n^7} . \frac{1}{4^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}} . \frac{1}{4^{2\varrho}} + \ldots$$

$$\frac{m\,n}{5^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{5^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{5^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{5^6} + \frac{m^7}{n^7} . \frac{1}{5^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}} . \frac{1}{5^{2\varrho}} + \ldots$$

$$\frac{m\,n}{6^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{6^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{6^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{6^6} + \frac{m^7}{n^7} . \frac{1}{6^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{m^{2\varrho-1}} . \frac{1}{6^{2\varrho}} + \ldots$$

$$\frac{m\,n}{7^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{7^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{7^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{7^6} + \frac{m^7}{n^7} . \frac{1}{7^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{m^{2\varrho-1}} . \frac{1}{7^{2\varrho}} + \ldots$$

$$\frac{m\,n}{8^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{8^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{8^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{8^6} + \frac{m^7}{n^7} . \frac{1}{8^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}} . \frac{1}{8^{2\varrho}} + \ldots$$

$$\frac{m\,n}{9^2 . n^2 - m^2} = \frac{m}{n} . \frac{1}{9^2} + \frac{m^3}{n^3} . \frac{1}{9^4} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{1}{9^6} + \frac{m^7}{n^7} . \frac{1}{9^8} + \ldots + \frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}} . \frac{1}{9^{2\varrho}} + \ldots$$

u. s. w.

c) Nimmt man nun die Gleichung I) in Nro. a), behält das erste Glied des in den Klammern stehenden Ausdruckes unverändert bey, und setzt statt der übrigen Glieder die in Nro. b) für sie angegebenen Reihen; so ergiebt sich bey gehöriger Regulirung der Glieder die Gleichung:

I) Tang. v° oder Tang. $\frac{m}{n}.90^\circ$

$$
= \left\{
\begin{array}{l}
\frac{mn}{n^2 - m^2} \cdot \frac{4}{\pi} \\
+ \frac{m}{n} \cdot \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
+ \frac{m^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
+ \frac{m^5}{n^5} \cdot \left[\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
+ \frac{m^7}{n^7} \cdot \left[\frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
+ \frac{m^9}{n^9} \cdot \left[\frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{9^{10}} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
+ \frac{m^{2s-1}}{n^{2s-1}} \left[\frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{5^{2s}} + \frac{1}{7^{2s}} + \frac{1}{9^{2s}} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi}
\end{array}
\right.
$$

Nimmt man ferner die Gleichung II) in Nro. a), behält das erste und zweyte Glied des in den Klammern stehenden Ausdruckes unverändert bey, und setzt statt der folgenden Glieder die in Nro. b) angegebenen Reihen gehörig; so ergiebt sich die Gleichung:

II) Cos.

II) Cot. v° oder Cot. $\frac{m}{n}$ 90°

$$
= \left\{
\begin{array}{l}
\frac{m}{n} \cdot \frac{2}{\pi} - \frac{mn}{4n^2 - m^2} \cdot \frac{4}{\pi} \\
- \frac{m}{n \cdot 2^2} \cdot \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
- \frac{m^5}{n^5 \cdot 2^4} \cdot \left[\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
- \frac{m^6}{n^6 \cdot 2^6} \cdot \left[\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
- \frac{m^7}{n^7 \cdot 2^8} \cdot \left[\frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
- \frac{m^9}{n^9 \cdot 2^{10}} \cdot \left[\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi} \\
- \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
- \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
- \frac{m^{2s-1}}{n^{2s-1} \cdot 2^{2s}} \cdot \left[\frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{4^{2s}} + \frac{1}{5^{2s}} + \ldots \right] \cdot \frac{4}{\pi}
\end{array}
\right.
$$

d) Werden nun die Glieder der Zahlenreihen in den beyden Gleichungen I) und II) in Decimalstellen aufgelöst, alsdann aber die Decimalbrüche gehörig summirt und die Summen mit $\frac{4}{\pi} = \frac{4}{3{,}14159265358\ldots}$ multiplicirt; so erhält man sehr bequeme Gleichungen für die Berechnung der **Tangenten** und **Cotangenten**, welche den Gleichungen, die im vorigen §. für die Berechnung der **Sinus** und **Cosinus** angegeben wurden, ähnlich sind. Diese Gleichungen sind folgende:

Tang.

$$\text{Tang. } v^\circ \text{ oder Tang. } \frac{m}{n} \cdot 90^\circ$$

$$= \frac{mn}{n^2 - m^2} \cdot 1{,}27323954473 \ldots$$

$$+ \frac{m}{n} \cdot 0{,}29755678205 \ldots$$

$$+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}01868865027 \ldots$$

$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}00184247520 \ldots$$

$$+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}00019758007 \ldots$$

$$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}00002169772 \ldots$$

$$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}00000240113 \ldots$$

$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}00000026641 \ldots$$

$$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}00000002958 \ldots$$

$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}00000000328 \ldots$$

$$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}00000000036 \ldots$$

$$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0{,}00000000004 \ldots$$

$$+ \ldots$$

$$\text{Cot. } v^\circ \text{ oder Cot. } \frac{m}{n} \cdot 90^\circ$$

$$= \frac{m}{n} \cdot 0{,}63661977236 \ldots - \frac{mn}{4n^2 - m^2} \cdot 1{,}27323954473 \ldots$$

$$- \frac{m}{n} \cdot 0{,}20528888941 \ldots$$

$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}00655107478 \ldots$$

$$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}00034502925 \ldots$$

$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}00002027910 \ldots$$

$$- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}00000123665 \ldots$$

$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}00000007649 \ldots$$

$$- \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}00000000475 \ldots$$

$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}00000000029 \ldots$$

$$- \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}00000000018 \ldots$$

$$- \ldots$$

§. 151.

§. 157.

"Es soll gezeigt werden, wie sich die **Secanten** und **Cosecanten** aller zwischen 0° "und 45° fallenden Kreisbögen berechnen lassen."

1) Auch für diese Linien könnte man vermittelst der Ausdrücke, welche im Vorhergehenden angegeben worden sind, neue Ausdrücke formiren, nach welchen sich die Berechnung dieser Linien auf eine bequeme Art vornehmen ließe. Wir haben aber dergleichen Ausdrücke nicht nöthig, weil uns die Trigonometrie lehrt, daß man, wenn einmal die **Tangenten** und **Cotangenten** berechnet sind, aus diesen die **Secanten** und **Cosecanten** durch eine bloße Subtractionsoperation auf eine sehr leichte Art berechnen kann. Wir können daher die Anweisung, wie sich die für Sec. z und Cosec. z angegebenen Ausdrücke bequem zur Berechnung dieser Linien gebrauchen lassen, übergehen. Dagegen wollen wir hier die trigonometrischen Gleichungen hersetzen, vermittelst deren sich die **Secanten** und **Cosecanten** aus den **Tangenten** und **Cotangenten** für den Sin. tot. = 1 berechnen lassen.

2) Die eine Gleichung, welche wir hierzu nöthig haben, ist schon in §. 148. Nro. 4) da gewesen, woselbst auch die Ableitung derselben angegeben ist; sie ist folgende:

$$\text{Cosec. } 2A = \text{Cot. } A - \text{Cot. } 2A.$$

Setzen wir hier $2A = v$ und also $A = \frac{1}{2}v$, so erhalten wir die Gleichung

$$\text{Cosec. } v = \text{Cot. } \tfrac{1}{2}v - \text{Cot. } v,$$

nach welchen die **Cosecanten** aller Kreisbögen v leicht gefunden werden können.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nun auch sogleich die, nach welcher sich die **Secanten** aus den **Tangenten** und **Cotangenten** berechnen lassen. Man setze, um Verwirrung zu vermeiden, in der letzten Gleichung statt v den Buchstaben B, dann hat man die Gleichung:

$$\text{Cosec. } B = \text{Cot. } \tfrac{1}{2}B - \text{Cot. } B. \quad (\mathfrak{h})$$

Nun stelle man sich unter B einen Kreisbogen vor, welcher um irgend einen beliebigen Kreisbogen, dessen Gradzahl v zwischen 0° und 90° fällt, kleiner als 90° ist, so daß $B = 90° - v$ gesetzt werden kann. Diesen für B festgesetzten Ausdruck setze man jetzt in die Gleichung ($\mathfrak{h}$), dadurch verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$\text{Cosec. } (90° - v) = \text{Cot. } \tfrac{1}{2}(90° - v) - \text{Cot. } (90° - v)$$

Weil nun bekanntlich Cosec. $(90° - v)$ = Sec. v und Cot. $(90° - v)$ = Tang. v seyn muß, so folgt aus der vorigen Gleichung diese:

 Sec.



$$\text{Sec. } v = \text{Cot. } (45^\circ - \tfrac{1}{2} v) - \text{Tang. } v.$$

Nach dieser können die **Secanten** aller von 0° bis 45° auf einander folgenden Kreisbögen v berechnet werden.

§. 158.

Hiermit ist nun das gezeigt, was wir wollten, nehmlich: wie man die trigonometrischen Linien auf einem viel leichteren Wege hätte berechnen können, als der ist, welchen die ersten Berechner derselben betraten. Noch wollen wir hier an die Sätze der Trigonometrie erinnern, in welchen gezeigt wird, daß man die **Sinus**, **Cosinus**, **Tangenten** und **Cotangenten** aller Kreisbögen, welche größer als 30° sind, aus den **Sinus**, **Cosinus**, **Tangenten** und **Cotangenten** der zwischen 0° und 30° fallenden Kreisbögen durch blose Addition und Subtraction finden kann, wodurch die Berechnung der trigonometrischen noch mehr erleichtert wird.

Wir brauchten in unsern Formeln den Werth der rectificirten und durch ihren Halbmesser = 1 ausgemessenen halben Kreisperipherie π und entlehnten denselben aus der Geometrie. Wenn aber auch dieser noch nicht aus der Geometrie bekannt gewesen wäre, so würde uns dieses doch gar nicht an der Berechnung der trigonometrischen Linien gehindert haben, denn wir hätten uns denselben vermittelst mehrerer von den Formeln, die wir bisher kennen gelernt haben, sehr leicht berechnen können.

§. 159.

"Es soll gezeigt werden, wie man auf verschiedene Art zur Berechnung des Werthes "π der als rectificirt vorzustellenden und durch ihren Halbmesser = 1 ausgemessenen hal"ben Kreislinie gelangen kann."

1) In §. 150. und §. 151. haben wir gezeigt, daß sich die Länge eines jeden Kreisbogens, welchen man als rectificirt und durch seinen Halbmesser = 1 ausgemessen sich vorstellt, durch die Länge z einer jeden der ihm zugehörigen trigonometrischen Linien näherungsweise algebraisch ausdrücken läßt. Man kann also die Länge eines jeden als rectificirt vorgestellten Kreisbogens näherungsweise berechnen, wenn man die Länge irgend einer der ihm zugehörigen trigonometrischen Linien weis. Nun ist aber aus der Trigonometrie bekannt, daß, wenn man den Sin. tot. = 1 setzt,

$$\text{Sin. } 30^\circ = \tfrac{1}{2}; \text{ Cos. } 30^\circ = \sqrt{[1 - \text{Sin. } 30^{\circ 2}]} = \sqrt{[1 - \tfrac{1}{4}]} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Tang.

Tang. 30° $= \frac{\text{Sin. } 30°}{\text{Cos. } 30} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; Tang. 45° = Sin. tot. = 1 rc. ist; also kann man gewiß die Längen der Kreisbögen 90°, 45°, 30° angeben, und zwar für den Halbmesser = 1. Da aber diese Bögen bestimmte aliquote Theile der ganzen Kreislinie sind, so muß sich auch vermittelst der ihnen zugehörigen berechneten Längen die Länge π der halben Kreislinie angeben lassen.

Wir wollen jetzt mehrere Formeln für π, zu welchen man auf dem hier angedeuteten Wege gelangen kann, angeben.

a) Wenn man in der in §. 150. Nro. 4) angegebenen Gleichung

$$\text{Arc.}(\text{Sin.} = z) = z + \frac{z^3}{2.3} + \frac{1.3.z^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.z^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.z^9}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

für z die Länge des Sin. 90° = 1 setzt, so erhält man folgende Gleichung:

$$\text{Arc.}(\text{Sin.} = 1) = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} + \ldots,$$

welche die Länge des rectificirten Quadranten angiebt, also die Länge von $\frac{1}{2}\pi$. Es folgt also daraus

$$\pi = 2\left[1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} + \ldots\right].$$

Setzt man hingegen in der obigen Gleichung statt z den Sin. 30°, welcher = $\frac{1}{2}$ ist; so erhält man die Gleichung:

$$\text{Arc.}(\text{Sin.} = \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \ldots,$$

welche die Länge des zwölften Theils der ganzen oder des sechsten Theils der halben Kreislinie, mithin den Werth von $\frac{1}{6}\pi$ angiebt. Aus ihr folgt

$$\pi = 6\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + 1 + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9^9} + \ldots\right].$$

b) Wenn man in der in §. 152. angegebenen Gleichung

$$\text{Arc.}(\text{Tang.} = z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{13}}{13} - \frac{z^{15}}{15} + \ldots$$

für z die Länge der Tang. 45° = 1 setzt, so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\text{Arc.}(\text{Tang.} = 1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

Diese Gleichung nun giebt die Länge des achten Theils der ganzen und mithin die Länge des vierten Theils der halben Kreisperipherie $= \frac{1}{4}\pi$ an; es ist demnach

$$\pi = 4 . \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots\right]$$

Wenn man aber in der obigen Gleichung statt z die Länge der Tang. $30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.} = \frac{1}{3}.\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{(\sqrt{3})^5}{5 \cdot 3^5} - \frac{(\sqrt{3})^7}{7 \cdot 3^7} + \frac{(\sqrt{3})^9}{9 \cdot 3^9} - \frac{(\sqrt{3})^{11}}{11 \cdot 3^{11}} + \ldots,$$

welche den zwölften Theil der Länge der ganzen und folglich den sechsten Theil der Länge der halben Kreisperipherie $= \frac{1}{6}\pi$ ausdrückt. Aus ihr folgt:

$$\pi = 6\left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{(\sqrt{3})^5}{5 \cdot 3^5} - \frac{(\sqrt{3})^7}{7 \cdot 3^7} + \frac{(\sqrt{3})^9}{9 \cdot 3^9} - \frac{(\sqrt{3})^{11}}{11 \cdot 3^{11}} + \ldots\right]$$

oder

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot 3^4} - \frac{2\sqrt{3}}{11 \cdot 3^5} + \ldots$$

2) Aber auch noch auf anderen Wegen kann man Ausdrücke erhalten, durch welche sich π berechnen läßt.

a) Wenn man die in §. 156. Nro. 3) angegebene Gleichung I) nimmt, welche diese war:

Tang. $v°$ oder Tang. $\frac{m}{n} . 90°$

$$= \left[\frac{mn}{n^2 - m^2} + \frac{mn}{3^2.n^2 - m^2} + \frac{mn}{5^2.n^2 - m^2} + \frac{mn}{7^2.n^2 - m^2} + \ldots + \frac{mn}{(2r+1)^2.n^2 - m^2} + \frac{mn}{(2r+3)^2.n^2 - m^2} \ldots\right]\frac{4}{\pi}$$

und in derselben $v° = 30°$ setzt; so wird $\frac{m}{n} = \frac{v}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ und also

also m = 1, n = 3. Weil nun Tang. 30° $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, so ergiebt sich durch Substitution folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \left[\frac{3}{3^2-1} + \frac{3}{3^2.3^2-1} + \frac{3}{5^2.3^2-1} + \frac{3}{7^2.3^2-1} + \ldots + \frac{3}{(2r+1)^2.3^2-1} + \frac{3}{(2r+3)^2.3^2-1} + \ldots\right]\frac{4}{\pi}.$$

Daraus folgt aber

$$\pi = 12.\sqrt{3}\left[\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{3^2.3^2-1} + \frac{1}{5^2.3^2-1} + \frac{1}{7^2.3^2-1} + \ldots + \frac{1}{(2r+1)^2.3^2-1} + \frac{1}{(2r+3)^2.3^2-1} + \ldots\right].$$

Setzt man hingegen in der obigen Gleichung v° = 45°; so wird $\frac{m}{n} = \frac{v}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$, also m = 1, n = 2. Da nun Tang. 45° = 1 ist, so erhält man durch Substitution diese Gleichung:

$$1 = \left[\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2.2^2-1} + \frac{2}{5^2.2^2-1} + \frac{2}{7^2.2^2-1} + \ldots + \frac{2}{(2r+1)^2.2^2-1} + \frac{2}{(2r+3)^2.2^2-1} + \ldots\right]\frac{4}{\pi}.$$

Hieraus folgt aber

$$\pi = 8\left[\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2.2^2-1} + \frac{1}{5^2.2^2-1} + \frac{1}{7^2.2^2-1} + \ldots + \frac{1}{(2r+1)^2.2^2-1} + \frac{2}{(2r+3)^2.2^2-1} + \ldots\right]$$

b) Ferner läßt sich auch auf folgende Art ein Ausdruck für π formiren. Es ist bekanntlich Tang. $(\alpha+\beta) = \frac{\text{Tang.}\,\alpha + \text{Tang.}\,\beta}{1 - \text{Tang.}\,\alpha\,.\,\text{Tang.}\,\beta}$ und hieraus folgt, wenn man $\alpha + \beta = 45°$ setzt, Tang. 45° oder

$$1 = \frac{\text{Tang.}\,\alpha + \text{Tang.}\,\beta}{1 - \text{Tang.}\,\alpha\,.\,\text{Tang.}\,\beta}.$$

Es ist also für $\alpha + \beta = 45^\circ$ auch diese Gleichung richtig:

$$1 - \text{Tang.}\,\alpha\,.\,\text{Tang.}\,\beta = \text{Tang.}\,\alpha + \text{Tang.}\,\beta,$$

aus welcher $1 - \text{Tang.}\,\alpha\,.\,\text{Tang.}\,\beta - \text{Tang.}\,\beta = \text{Tang.}\,\alpha$, mithin auch

$$-(\text{Tang}\,\alpha + 1)\,\text{Tang.}\,\beta = \text{Tang.}\,\alpha - 1 \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\,\beta = \frac{1 - \text{Tang.}\,\alpha}{1 + \text{Tang.}\,\alpha}$$

folgt. Setzt man nun hier $\text{Tang}\,\alpha = \frac{1}{2}$, so wird

$$\text{Tang.}\,\beta = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}.$$

Da nun, wenn man in der in §. 152. angegebenen Gleichung

$$\text{Arc.}(\text{Tang.} = z) = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{13}}{13} - \frac{z^{15}}{15} + \ldots$$

$z = \frac{1}{2}$ setzt, die Länge eines rectificirten Bogens α, oder

$$\text{Arc.}(\text{Tang.} = \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}}$$
$$+ \frac{1}{13.2^{13}} - \frac{1}{15.2^{15}} + \ldots$$

seyn muß; da ferner, wenn man $z = \frac{1}{3}$ setzt, die Länge eines rectificirten Kreisbogens β oder

$$\text{Arc.}(\text{Tang.} = \tfrac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{1}{11.3^{11}}$$
$$+ \frac{1}{13.2^{13}} - \frac{1}{15.2^{15}} + \ldots$$

wird: so ergiebt sich, wenn man noch dazu nimmt, daß die Summe der Bogengrade $\alpha + \beta = 45$ seyn soll, und daß also die Summe der Längen beyder rectificirter Bögen $= \frac{1}{4}\pi$ seyn muß, die nachstehende Gleichung:

$$\frac{1}{4}\pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \ldots \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{1}{11.3^{11}} + \ldots \end{array} \right\},$$

woraus sich nun der Werth von π bestimmen läßt.

3) Auf

3) Ausser den bisher angegebenen Ausdrücken lassen sich noch mehrere andere Ausdrücke finden, welche zur bequemen und genauern Berechnung des Werthes von π theils mehr, theils weniger brauchbar sind. Ueber die Anwendung der bisher angegebenen Ausdrücke wollen wir noch folgendes beyfügen:

a) Die in Nro. 1. a) angegebenen Ausdrücke sind zur Berechnung des Werthes von π darum nicht wohl tauglich, weil man eine große Anzahl ihrer Glieder berechnen müßte, wenn man π mit einiger Genauigkeit daraus finden wollte.

b) Dieses gilt auch von dem ersten der beyden in Nro. 1. b) stehenden Ausdrücke, welchen Ausdruck für π **Leibnitz** in einer Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus angiebt. Man findet diese Abhandlung in den Actis erudit. vom Jahr 1682. S. 41. u. f. und auch im dritten Theile der Genfer Ausgabe der leibnitzischen Werke S. 140. u. f. Noch das fünfte Glied des Ausdrucks giebt Zehntel des Halbmessers, und nach der Erinnerung, welche **Euler** in den Comm. Ac. Petrop. T. IX. p. 226. über diesen Ausdruck macht, müßte man 10^{60} Glieder desselben berechnen, wenn man aus ihm den Werth von π bis auf 100 Decimalstellen richtig erhalten wollte. Dieß würde, sagt **Kästner**, eine Ewigkeit erfordern! **Leibnitz** hat a. a. O. diesen Ausdruck für π auch gar nicht in der Absicht angegeben, um wirklich daraus den Werth von π zu berechnen, sondern blos, um zu zeigen, daß sich π durch eine Reihe rationaler Glieder ausdrücken läßt, deren Gesetz äusserst einfach und leicht ist. Uebrigens kann man hier merken, daß nicht **Leibnitz** der Erfinder dieses Ausdruckes ist, wie **Euler** meint, sondern **Jacob Gregory**, wie **Moseres** im IIIten B. der Scriptores logarithmici p. 169. erinnert.

Mehr bequem ist schon der zweyte in Nro. 1. b) angegebene Ausdruck für die Berechnung des Werthes von π, ob gleich auch nach diesem die Rechnung noch immer sehr mühsam bleibt, theils wegen der Irrationalität der Glieder, für welche man die $\sqrt{3}$ auf sehr viele Decimalstellen berechnen muß, wenn man π in vielen Decimalstellen berechnen will, theils aber auch deswegen, weil die Glieder nicht geschwind genug abnehmen, indem ein jedes folgende Glied ohngefähr nur dreymal kleiner wird, als das ihm zunächst vorhergehende. Man hat mit vieler Mühe nach diesem Ausdrucke π bis auf 72 Decimalstellen berechnet. Die Art, wie man bey dieser Rechnung zu verfahren hat, wollen wir hier zeigen, indem wir den Werth von π bis auf 12 Decimalstellen berechnen.

Man

Man bestimme in der Gleichung

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3\,.\,3} + \frac{2\sqrt{3}}{5\,.\,3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7\,.\,3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9\,.\,3^4} - \frac{2\sqrt{3}}{11\,.\,3^5} + \frac{2\sqrt{3}}{13\,.\,3^6} - \frac{2\sqrt{3}}{15\,.\,3^7} + \ldots$$

zuerst den Werth von $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ bis auf so viel Decimalstellen, als in wie viel Decimalstellen π berechnet werden soll, also hier bis auf zwölf. Hieraus erhält man $\sqrt{12} = 3{,}464101615138$. Diese Zahl dividire man nun mit den Potenzen der Zahl 3; dieses aber geschieht leicht, wenn man den ersten Quotienten $= \frac{2\sqrt{3}}{3}$ mit 3, den zweyten $= \frac{2\sqrt{3}}{3^2}$ wieder mit 3, den dritten $= \frac{2\sqrt{3}}{3^3}$ abermals mit 3 u. s. f. dividirt. So ergeben sich die Zahlen, welche in der nachstehenden Tafel die Vertikalreihe A der Ordnung nach in sich begreift. Eine jede dieser Zahlen dividire man alsdann mit der Zahl der Vertikalreihe B, welche gerade neben ihr steht: hierdurch ergeben sich alle Quotienten der Vertikalreihe C.

A)	B)	C)	
$\frac{2\sqrt{3}}{1} = 3{,}464101615138$	1	3,464101615138	
$\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}154700538379$	3		0,384900179460
$\frac{2\sqrt{3}}{3^2} = 0{,}384900179560$	5	0,076980035892	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^3} = 0{,}123800059830$	7		0,018328579974
$\frac{2\sqrt{3}}{3^4} = 0{,}042766686607$	9	0,004751854072	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^5} = 0{,}014255562202$	11		0,001295960200
$\frac{2\sqrt{3}}{3^6} = 0{,}004751854067$	13	0,000365527236	
$\frac{1\sqrt{3}}{3^7} = 0{,}001583951356$	15		0,000105596757
$\frac{2\sqrt{3}}{3^8} = 0{,}000527983785$	17	0,000031057870	

$2\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{3}}{3^{9}}$ = 0,000175994595	19		0,000009262873
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{10}}$ = 0,000058664865	21	0,000002793565	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{11}}$ = 0,000019555955	23		0,000000850215
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{12}}$ = 0,000006518318	25	0,000000260733	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{13}}$ = 0,000002172773	27		0,000000080473
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{14}}$ = 0,000000724258	29	0,000000024974	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{15}}$ = 0,000000241419	31		0,000000007788
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{16}}$ = 0,000000080473	33	0,000000002438	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{17}}$ = 0,000000026824	35		0,000000000766
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{18}}$ = 0,000000008641	37	0,000000000242	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{19}}$ = 0,000000002980	39		0,000000000076
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{20}}$ = 0,000000000993	41	0,000000000024	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{21}}$ = 0,000000000331	43		0,000000000008
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{22}}$ = 0,000000000110	45	0,000000000002	
$\frac{2\sqrt{3}}{3^{23}}$ = 0,000000000037	47		0,000000000001

In dieser gehört eigentlich dem letzten Quotienten 0,000000000001 in der zwölften Stelle noch keine geltende Ziffer zu, sondern erst die dreyzehnte Stelle bekommt, wie man bey der Berechnung desselben findet, die Ziffer 7 und könnte beynahe 8 bekommen. Dafür haben wir aber, weil dieses ohne großen Fehler geschehen kann, in der zwölften Stelle eine 1 gesetzt. Aus einem ähnlichen Grunde ist auch das letzte Glied in der Vertikalreihe A etwas anders ausgedrückt, als es eigentlich bey der Berechnung desselben heraus kommt. Diese Glieder der Vertikalreihe C nun sind, wie man leicht einsehen kann, die Werthe, welche den ersten 24 Gliedern des Ausdrucks für π der Ordnung nach zugehören, und zwar stehen linker Hand in der Vertikalreihe C die Werthe der 12 bejahten, rechter Hand aber die Werthe der 12 verneinten von den berechneten 24 Gliedern. Man summire nun die Werthe der bejahten und eben so auch die Werthe der verneinten Glieder, man erhält

für die bejahte Summe die Zahl   3,546233172186,
für die verneinte Summe die Zahl − 0,404640518591.

Jetzt nehme man die Totalsumme, welche = 3,141592653595 ist; diese drückt den Werth von π bis auf 12 Decimalstellen aus. Es erhellet aber leicht, daß hier die letzteren Ziffern unrichtig seyn können, welches auch wirklich der Fall ist, denn der Werth von π muß nach der Berechnung, bey welcher man $2\sqrt{3}$ in sehr vielen Decimalstellen ausgedrückt und wobey man also auch die Zahlen der Vertikalreihen A genauer bestimmen kann, = 3,141592653989 . . . seyn.

Man könnte auch, wenn man aus der Gleichung

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9.3^4} - \frac{2\sqrt{3}}{11.3^5} + \frac{2\sqrt{3}}{13.3^6} - \frac{2\sqrt{3}}{15.3^7} + \frac{2\sqrt{3}}{17.3^8} - \frac{2\sqrt{3}}{19.3^9} + \ldots$$

den Werth von π noch bequemer berechnen wollte, erst die Gleichung anders einrichten, indem man jede zwey zunächst neben einander stehende Glieder auf einerley Benennung brächte und auf eine schickliche Art formirte. Auf diese Art könnte man folgende Gleichung erhalten:

$$\pi = \frac{1}{1.3}.\left(\frac{16.\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{5.7}.\left(\frac{16.\sqrt{3}}{3^3}\right) + \frac{3}{9.11}.\left(\frac{16.\sqrt{3}}{3^5}\right) + \frac{4}{13.15}.\left(\frac{16.\sqrt{3}}{3^7}\right)$$
$$\frac{5}{17.19}.\left(\frac{16.\sqrt{3}}{3^9}\right) + \ldots,$$

in

in welcher die in Klammern stehenden Größen so beschaffen sind, daß eine aus der andern abgeleitet werden kann.

Wenn man nehmlich die erste dieser Größen = A, die zweyte = B, die dritte = C rc. setzt; so ist $B = \frac{A}{9}$, $C = \frac{B}{9}$, $D = \frac{C}{9}$ rc. Man könnte demnach ferner die vorige Gleichung so ausdrücken:

$$\pi = \frac{1}{1.3}.\overset{A}{\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)} + \frac{2}{5.7}.\overset{B}{\left(\frac{A}{9}\right)} + \frac{3}{9.11}.\overset{C}{\left(\frac{B}{9}\right)} + \frac{4}{13.15}.\overset{D}{\left(\frac{C}{9}\right)}$$
$$+ \frac{5}{17.19}.\overset{E}{\left(\frac{D}{9}\right)} + \frac{6}{21.23}.\overset{F}{\left(\frac{E}{9}\right)} + \frac{7}{25.27}.\overset{G}{\left(\frac{F}{9}\right)} + \ldots$$

Und hiernach ließe sich, weil sich dieser Ausdruck sehr schnell nähert, der Werth von π sehr leicht und geschwind näherungsweise berechnen.

c) Die Ausdrücke für π, welche in Nro. 2. a) angegeben wurden, sind ebenfalls zu der wirklichen Berechnung des Werthes von π wenig brauchbar, weil sie nicht schnell genug abnehmen. Dagegen ist der Ausdruck in Nro. 2. b) zu dieser Berechnung weit vortheilhafter, als der, welchen wir so eben in Nro. b) betrachtet haben, zumal wenn man jede zwey zunächst neben einander stehenden Glieder unter einerley Benennung bringt und addirt, hernach aber alle so erhaltenen Glieder auf eine geschickte Weise formirt, wodurch man einen Ausdruck erhält, dessen Glieder äusserst geschwind abnehmen. Der Ausdruck, von welchem wir hier sprechen, ist der, welchen **Euler** in der Introd. in Analys. infinit. L. I §. 142. angiebt. **Vega** bedient sich des Eulerischen Weges und der von uns so eben erwähnten Reductionsmethode, gebraucht aber dabey andere Zahlen, als **Euler**, und findet einen Ausdruck für π, welcher ebenfalls sehr vortheilhaft für die Berechnung des Werthes von π ist: man findet denselben in dessen Vorlesungen über die Math. B. II. Vorles. IV. §. 453.

Dieses war das, was wir hier über die von uns angegebenen Ausdrücke für π erinnern wollten.

d) Zu dem, was bisher über die Berechnung des Werthes von π gesagt worden ist, kann man noch folgendes merken. **Machin** hat π in 100, **Lagny** aber in 127 Decimalstellen berechnet, und zwar durch einen Kunstgriff, welcher bis jetzt noch unbekannt geblieben ist. **Vega** giebt in seinem Thesaurus I. B. 308. und in seinen loga-

garithmisch trigonometrischen Tafeln den Werth von π in 140 Decimalstellen ausgedrückt an. Der in 127 Decimalstellen ausgedrückte Werth von π wird in der Eulerischen Abhandlung: De variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi, Comm. Petrop. T. IX. §. 2., so angegeben:

3,141592 653989 793238 462643 383279,
502884 197169 399375 105820 974944,
592307 816406 286208 998628 034825,
342117 067982 148086 513272 306647,
0938446 . . .,

Nach der Erinnerung aber, welche Kästner in der fünften Ausgabe seiner Anfangsgründe der Arith. u. Geomet. (Satz 43. Anmerk.) macht, und auch nach dem, was Vega gefunden hat, ist die Abtheilung 513272 der hier angegebenen Lagnischen Zahlen verschrieben und muß 513282 heißen.

Ueber die verschiedenen Bemühungen der Mathematiker, den wahren Werth von π zu bestimmen, giebt Kästner in seinen geometrischen Abhandlungen, Samm. II. (1791) Abh. 20. weitere Nachrichten. Auch verdient hier bemerkt zu werden: Klügel, welcher in dem Hindenburgischen Archiv der Math. im Vten Hefte arithmetische Zusammensetzungen des Kreises aus seinen Elementen und ebendaselbst im VIIten Hefte Formeln zur leichten Berechnung des Umfanges des Kreises liefert.

Die Längen aller als rectificirt vorgestellten Kreisbögen, so wie sie von 1° bis 360° von Grad zu Grad auf einander folgen, findet man alle bis auf 27 Decimalstellen berechnet in Lamberts Zusätzen rc. Tab. XIII. S. 146—148, und die Längen aller Bögen durch alle Minuten und Secunden hindurch sind ebendaselbst S. 149. angegeben. Eben diese Zahlen findet man auch in den neuen Schulzischen Tafeln.

B) Von der Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Linien.

§. 160.

Für die Logarithmen der trigonometrischen Linien lassen sich Ausdrücke angeben, vermittelst welcher man diese Logarithmen auf eine sehr leichte Art berechnen kann, ohne daß es nöthig ist, die Längen der Linien selbst zu kennen. Wir werden dergleichen Ausdrücke hier aufsuchen. Hierbey werden wir uns blos auf die Ausdrücke für die Berechnung der Logarithmen der Si-

Sinus und Cosinus einlassen, denn es ist genug, wenn man die Logarithmen dieser Linien finden kann, da bekanntlich die Logarithmen aller übrigen trigonometrischen Linien auf eine sehr leichte Art aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus abgeleitet werden können. Es beruht aber zunächst die Deduction der Ausdrücke für die Logarithmen der Sinus und Cosinus darauf, daß man die für Sin. z und Cos. z in §. 143. und §. 144. angegebenen Ausdrücke in Factoren zu zerfällen wisse, und dieses soll nun zuerst gelehrt werden.

§. 161.

"Es soll der Weg gezeigt werden, auf welchem man dazu gelangt, den für Sin. z in "§. 143. angegebenen Ausdruck

$$z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots \pm \frac{z^{2n-3}}{2.3\ldots(2n-4)(2n-3)}$$

$$\mp \frac{z^{2n-1}}{2.3\ldots(2n-2)(2n-1)} \pm \frac{z^{2n+1}}{2.3\ldots2n(2n+1)} \mp \ldots$$

"als ein Product aus einer unerreichbar großen Anzahl von Factoren darzustellen."

1) Damit nichts undeutlich sey, so wollen wir hier zuerst bemerken, daß bey dem angeführten Ausdrucke das Zeichen $\mp \ldots$, durch welches angedeutet werden sollte, daß in dem Ausdrucke von einem letzten Glied die Rede nicht seyn könne, weggelassen werden kann, wenn man sich unter n eine Zahl denkt, die unerreichbar groß ist, und also unter dem Gliede $\frac{z^{2n+1}}{2.3\ldots2n(2n+1)}$ dasjenige Glied versteht, welches nie erreicht werden kann, man mag auch in der Reihe der dem Ausdrucke zugehörigen unzählbar vielen Glieder so weit fortschreiten, als man will.

2) Zunächst fällt nun bey dem angeführten Ausdrucke in die Augen, daß sich von einem jeden Gliede desselben der Factor z trennen und demnach der ganze Ausdruck in der Form eines Productes aus zwey Factoren auf folgende Weise darstellen läßt:

$$z\Big[1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \ldots \pm \frac{z^{2n-4}}{2.3\ldots(2n-4)(2n-3)}$$

$$\mp \frac{z^{2n-2}}{2.3\ldots(2n-2)(2n-1)} \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots2n(2n+1)}\Big]$$

Soll aber derselbe nun noch weiterhin in Factoren zerlegt werden können, so muß es möglich seyn, den hier in Klammern stehenden Ausdruck als ein Product vorzustellen. Daran ist aber kein Zweifel, welches so erhellt:

Der in den Klammern stehende Factor nehmlich, welchen wir mit F bezeichnen wollen, ist eine Function von z, deren Form von der Form einer **ganzen** Function von z sich blos durch die unerreichbar große Anzahl der ihr zugehörigen Glieder und der ihrem Gradexponenten 2n zugehörigen Einheiten unterscheidet. Wäre nun hier die Anzahl der Glieder von F und der Einheiten von 2n erreichbar groß, so müßte man wegen §. 42. Nro. 4) behaupten, daß F ein Product, und zwar ein Product aus 2n einfachen Functionen von z sey. Fragt man aber, ob diese Behauptung nicht auch noch richtig bleiben könnte, wenn man sich unter 2n eine Zahl vorstellt, welche, wie groß sie auch immerhin gedacht worden seyn mag, doch allemal noch nicht groß genug gedacht ist, und stellt über die Beantwortung dieser Frage die gehörigen Untersuchungen an; so wird man finden, daß auch bey dieser Vorstellung des Gradexponenten 2n behauptet werden kann, F sey ein Product aus 2n einfachen Functionen von z. Also muß nun auch F einer Zerlegung in solche Factoren fähig seyn.

3) Diese würde man vornehmen können, wenn man die 2n Wurzeln der Function F, aus welchen sich ihre einfachen Factoren bilden lassen müssen, angeben könnte. Zwar würde man mit derselben, wenn man auch die Wurzeln wüßte und die Bildung der einfachen Factoren von F unternähme, nie zu Ende kommen, weil, so viele Factoren man auch immerhin formirt hätte, wegen der unerreichbar großen Anzahl 2n derselben doch allemal noch mehrere formirt werden könnten, und mithin bey der Zusammenstellung der formirten Factoren zu einem Producte nie behauptet werden könnte, daß nun F durch alle seine Factoren vollständig ausgedrückt sey; aber so viele Factoren von F, als man wollte, könnte man doch angeben und so F wenigstens näherungsweise als ein Product aus einfachen Factoren darstellen. Es kommt also, wenn wir F so in Factoren zerlegen wollen, darauf an, daß wir nachsehen, ob sich von den unzählbar vielen Wurzeln, welche F zugehören, so viele angeben lassen, als man will.

4) Wenn man die einer **ganzen** Function von z oder einer Function F von z, von welcher eben das gelten muß, was von **ganzen** Functionen als gültig erwiesen ist, zugehörigen Wurzeln wissen will; so muß man zuerst die Function nehmen, sie = 0 setzen und die dabey erhaltene Gleichung gehörig reguliren; hernach aber muß man die so erhaltene Gleichung auflösen. Thun wir nun ersteres mit der Function F, so erhalten wir die Gleichung:

$$1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \ldots \pm \frac{z^{2n-4}}{2.3\ldots(2n-4)(2n-3)}$$

$$\mp \frac{z^{2n-2}}{2.3\ldots(2n-2)(2n-1)} \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots 2n\,(2n+1)} = 0,$$

aus welcher, wenn wir alle Glieder mit $2.3\ldots 2n\,(2n+1)$ multipliciren, damit z^{2n} von seinem Coefficienten befreyt werde, die Gleichung:

$$2.3\ldots 2n\,(n+1)\,.\,F = 0$$

oder

$$2.3\ldots 2n\,(2n+1) - 4.5\ldots 2n\,(2n+1)z^2 + 6.7\ldots 2n\,(2n+1)\,z^4$$
$$- 8.9\ldots 2n(2n+1)\,z^6 + \ldots \pm (2n-2)(2n-1)(2n)(2n+1)\,z^{2n-4} \mp 2n(2n+1)\,z^{2n-2} \pm z^{2n} = 0$$

folgt, die ferner, wenn wir alle ihre Glieder in umgekehrter Ordnung stellen, so aussihet:

$$\pm z^{2n} \mp 2n(2n+1)\,z^{2n-2} \pm (2n-2)(2n-1)(2n)(2n+1)\,z^{2n-4} \pm \ldots - 8.9\ldots 2n\,(2n+1)z^6$$
$$+ 6.7\ldots 2n\,(2n+1)\,z^4 - 4.5\ldots 2n(2n+1)z^2 + 2.3\ldots 2n\,(2n+1) = 0. \quad (C)$$

Das letzte Glied derselben fängt mit $2 = 2.1$, also mit dem Duplo der zu den **ungeraden** Zahlen gehörenden 1 an und ist **bejaht**; das vorletzte Glied ferner fängt mit $4 = 2.2$, folglich mit dem Duplo der **geraden** Zahl 2 an und ist **verneint**, u. s. w. Daraus erhellt, daß bey den Gliedern vor welchen ein doppeltes Zeichen steht, jedesmal das Zeichen ($+$) gültig ist, wenn man sich n als eine **gerade**, das Zeichen ($-$) aber, wenn man sich n als eine **ungerade** Zahl vorstellt.

Hier haben wir nun die aus der Function F, deren Wurzeln gesucht werden sollen, formirte Gleichung. Man sieht aber sogleich, daß diese Gleichung schon darum, weil ihr eine unerreichbare Anzahl von Gliedern zugehört, der gewöhnlichen Auflösung nicht fähig ist. — Ob uns nun gleich eine aus F formirte Gleichung nicht zur Kenntniß der Wurzeln von F leiten kann, so bleiben uns dennoch diese Wurzeln nicht verborgen, denn es kommt uns der Umstand zu Hülfe, daß F ein Factor der Function Sin. z ist, deren Wurzeln alle bekannt sind, wie wir sogleich zeigen werden.

5) Die Trigonometrie lehrt, daß, wenn π die in Graden ausgedrückte halbe Kreislinie und n eine unerreichbar große Zahl bedeutet, die **Sinus** aller der unzählig vielen in den Reihen

$$(h)\begin{cases} 0, & \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad -4\pi, \ldots \quad n.\pi, \\ & -\pi, \quad -2\pi, \quad -3\pi, \quad -4\pi, \ldots -n.\pi, \end{cases}$$

enthal-

enthaltenen bejahten und verneinten Kreisbögen den Werth = o haben müssen. Nun drückt aber der Ausdruck

$$z\left[1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \ldots \pm \frac{z^{2n-4}}{2.3\ldots(2n-4)(2n-3)} \mp \frac{z^{2n-2}}{2.3\ldots(2n-2)(2n-1)} \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots2n(2n+1)}\right]$$

den Werth des Sinus eines jeden Kreisbogens aus, dessen Länge = z ist; es muß also dieser Ausdruck für eine jede der Längen z, die man erhält, wenn man sich die in den Reihen (h) enthaltenen Kreisbogen als rectificirt und durch den Halbmesser = 1 ausgemessen vorstellt, = o werden. Läßt man demnach von jetzt an in den Reihen (h) π die Länge der durch den Halbmesser = 1 ausgemessenen halben Kreislinie bedeuten, so sind in den Reihen (h) lauter Wurzeln des für Sin. z angegebenen Ausdruckes enthalten. Es enthalten aber auch die Reihen (h) alle Wurzeln des genannten Ausdruckes, welches sich so einsehen läßt:

Bey der Deduction des Ausdruckes ist vorausgesetzt worden, daß z die Länge eines wirklichen durch den Halbmesser = 1 ausgemessenen Kreisbogens bedeuten solle, und blos unter der Bedingung, daß z diese Bedeutung habe, kann der Ausdruck für Sin. z gefunden und, wenn er gefunden ist, angenommen werden als ein Ausdruck, welcher = Sin. z ist. — Nun ist aber eine jede Länge z eines durch den Halbmesser = 1 ausgemessenen Kreisbogens eine reelle Größe. Also kann in dem für Sin. z angegebenen Ausdrucke, so lange er wirklich das seyn soll, als was er gesucht ist, die Größe z nie einen imaginären Werth enthalten; denn sobald man z einen imaginären Werth beylegte, so behandelte man zwar den Ausdruck als eine Function von z, nicht aber als diejenige Function, welche = Sin. z ist. — Es kann demnach bey dem erwähnten Ausdrucke nicht die Rede seyn von imaginären Werthen von z, für welche er = o wird, sobald er ein Ausdruck seyn soll, welcher = Sin. z ist, d. h. der für Sin. z angegebene Ausdruck hat keine imaginären Wurzeln. Also sind alle Wurzeln dieses Ausdruckes reell. Diese aber können keine anderen seyn, als Werthe der Längen derjenigen Kreisbögen, deren Sinus = o sind, und alle diese Kreisbögen sind durch die Reihen (h) angedeutet, denn es kann ausser dieser kein einziger Kreisbogen aufgewiesen werden, dessen Sinus = o wären. Daraus ergiebt sich ohne Widerrede, daß die Reihen (h), wenn man sich in denselben unter π die Längen des durch den Halbmesser = 1 ausgemessenen Halbkreises vorstellt, alle Wurzeln desjenigen Ausdrucks enthalten, welcher = Sin. z ist.

6) Da

6) Da wir nun alle Wurzeln des Ausdruckes für Sin. z angeben können, so müssen sich auch die Wurzeln unserer Gleichung in Nro. 4), welche aus einem Factor F des erwähnten Ausdruckes formirt wurden, bestimmen lassen. Dieser Ausdruck besteht nehmlich aus den beyden Factoren z und F, und es muß, da der Factor z blos durch die erste der in den Reihen (k) enthaltenen Wurzeln den Werth = 0 erhalten kann, der Factor F für alle übrigen dieser Wurzeln = 0 werden. Also sind alle in den Reihen

$$\pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi, \; \ldots \quad n.\pi,$$
$$-\pi, \quad -2\pi, \quad -3\pi, \quad -4\pi, \; \ldots \quad -n.\pi,$$

enthaltenen Werthe Wurzeln des Factors F und der daraus formirten Gleichung. Es sind aber auch dieses, in so ferne F ein Factor des für Sin. z geltenden Ausdruckes seyn soll, die Wurzeln alle (Nro. 5.).

Die Anzahl und Beschaffenheit der für F hier angegebenen Wurzeln stimmt vollkommen mit der Natur der aus F formirten Gleichung überein. Diese Gleichung nehmlich ist vom 2nten d. h. hier, wo n eine unerreichbar große Zahl bedeuten soll (Nro. 1.), von einem unerreichbar hohen Grade, die Anzahl 2n ihrer Wurzeln muß also unendlich groß seyn: ferner aber kommt in ihr die unbestimmte Größe z mit lauter geraden Potenzenexponenten vor, es muß daher nach der Lehre von den höhern Gleichungen für eine jede bejahte Wurzel, die ihr zugehört, auch eine eben so große verneinte Wurzel für sie geben. Die beyden Reihen von Wurzeln nun, die wir angegeben haben, enthalten wirklich n bejahte und n ebenso große verneinte, also zusammen 2n Wurzeln, und diese Anzahl ist auch unendlich groß, denn es bedeutet n hier ebenfalls eine unerreichbar große Zahl (Nro. 5).

7) Da wir nun alle Wurzeln unserer aus F formirten und ordentlich regulirten Gleichung kennen, so werden wir auch alle Factoren des auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden und in der Form einer ganzen Function von z dargestellten Ausdruckes aus diesen Wurzeln nach §. 67. formiren können, denn daß hier der Exponent 2n eine unerreichbar große Zahl ist, dieses kann uns, wie sich leicht einsehen läßt, daran nicht hindern. Wir wollen also jetzt die Formation der Factoren vornehmen.

Wir sehen, daß wir die einfachen Factoren des in der Gleichung (C) in Nro. 4) stehenden Ausdruckes

$$\pm z^{2n} \mp 2n(2n+1)z^{2n-2} \pm (2n-2)(2n-1)(2n)(2n+1)z^{2n-4} \mp \ldots - 8.9\ldots 2n(2n+1)z^{6}$$
$$+ 6.7\ldots 2n(2n+1)z^{4} - 4.5\ldots 2n(2n+1)z^{2} + 2.3\ldots 2n(2n+1),$$

in welchem die Potenzen von z von der Linken gegen die Rechte abnehmen und also das

 ab-

absolute Glied den Ausdruck rechter Hand schließt, nach der Form $z - a$ formiren müssen (§. 67.). Thun wir nun dieses, so erhalten wir aus den **bejahten** Wurzeln a, welche hier $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots n\pi$ heißen, die einfachen Factoren: $z - \pi$, $z - 2\pi$, $z - 3\pi, \ldots z - n\pi$; aus den verneinten Wurzeln a aber, welche hier $-\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots -n\pi$ heißen, erhalten wir die Factoren: $z + \pi$, $z + 2\pi$, $z + 3\pi, \ldots, z + n\pi$. Demnach ist der Ausdruck

$$\pm z^{2n} \mp 2n(2n+1)z^{2n-2} \pm (2n-2)(2n-1)(2n)(2n+1)z^{2n-4} \mp \ldots - 8.9\ldots 2n(2n+1)z^6$$
$$+ 6.7\ldots 2n(2n+1)z^4 - 4.5\ldots 2n(2n+1)z^2 + 2.3\ldots 2n(2n+1)$$
$$= (z-\pi)(z+\pi)(z-2\pi)(z+2\pi)(z-3\pi)(z+3\pi) \times \ldots \times (z-n\pi)(z+n\pi)$$

8) Nun können wir auch die Factoren von F bestimmen. Der vorige Ausdruck, welchen wir in seinen einfachen Factoren dargestellt haben, ist nach Nro. 4), wo wir unsere Gleichung aus F formirten, $= 2.3.4.5\ldots 2n(2n+1)F$.; folglich muß, wie man leicht einsehen kann,

$$F = \frac{(z-\pi)(z+\pi)(z-2\pi)(z+2\pi)(z-3\pi)(z+3\pi) \times \ldots \times (z-n.\pi)(z+n.\pi)}{1.2.3.4.5\ldots 2n.(2n+1)}$$

seyn. Statt des in dem hier angegebenen Ausdrucke stehenden Nenners können wir aber einen andern setzen. Dieser Nenner nehmlich ist das absolute Glied unserer Gleichung in Nro. 4) und das absolute Glied einer regulirten Gleichung muß bekanntlich so groß seyn, als das Product aus allen Wurzeln der Gleichung; nehmen wir also die unserer regulirten Gleichung in Nro. 4) zugehörigen Wurzeln aus Nro. 6), und multipliciren sie durch einander, so erhalten wir für $1.2.3.4.5\ldots 2n(2n+1)$ die gleichgeltende Größe:

$$(-\pi).\pi.(-2\pi).2\pi.(-3\pi).3\pi \times \ldots \times (-n\pi).n\pi.$$

Setzen wir nun diese an die Stelle des in dem obigen Ausdrucke stehenden Nenners, so erhalten wir:

$$F = \frac{(z-\pi)(z+\pi)(z-2\pi)(z+2\pi)(z-3\pi)(z+3\pi) \times \ldots \times (z-n\pi)(z+n\pi)}{(-\pi).\pi.(-2\pi)2\pi.(-3\pi)3\pi \times \ldots \times (-n\pi)n\pi}$$

$$= \left(\frac{-z}{\pi}+1\right)\left(\frac{z}{\pi}+1\right)\left(\frac{-z}{2\pi}+1\right)\left(\frac{z}{2\pi}+1\right)\left(\frac{-z}{3\pi}+1\right)\left(\frac{z}{3\pi}+1\right) \times \ldots$$
$$\times \left(\frac{-z}{n\pi}+1\right)\left(\frac{z}{n\pi}+1\right)$$

$= (1 -$

$$= \left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right) \times \ldots$$
$$\times \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n\pi}\right)$$

8) Weil nun Sin. z = z . F ist (Nro. 2), so hat man folgende Gleichung:

$$\text{Sin. } z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right) \times \ldots$$
$$\times \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n\pi}\right),$$

und hiermit ist jetzt gezeigt, daß sich der für Sin. z in §. 143. aufgesuchte Ausdruck als ein Product aus einer unerreichbar großen Anzahl einfacher Factoren darstellen läßt. Man kann in der vorigen Gleichung auch jedesmal zwey von den in den Klammern stehenden Factoren in einander multipliciren, und so Sin. z als ein Product aus lauter doppelten Factoren darstellen. Thut man dieses, so hat man:

$$\text{Sin. } z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{z}{n^2 . \pi^2}\right).$$

§. 161.

"Es soll gezeigt werden, daß man auch den für Cos. z in §. 144. angegebenen Aus-"druck

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \pm \frac{z^{2n-4}}{2.3\ldots(2n-5)(2n-4)}$$
$$\mp \frac{z^{2n-2}}{2.3\ldots(2n-3)(2n-2)} \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots(2n-1)\,2n} \mp \ldots$$

"als ein Product aus unzählig vielen Factoren darstellen kann."

1) Wir wollen uns hier kürzer fassen, als im vorigen §., denn wir hoffen, daß unser Leser auf dem Wege der Untersuchung, auf welchem wir ihn im vorigen §. leiteten, hinlänglich vorbereitet worden seyn wird, alle Anstöße aus dem Wege zu räumen, welchen er jetzt mit uns gehen soll. Wir lassen also, indem wir uns wiederum unter 2n eine unerreichbar große Zahl vorstellen, das Zeichen ∓ . . . in dem für Cos. z angegebenen Ausdrucke weg, setzen denselben = 0 und erhalten so die Gleichung:

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \dots \pm \frac{z^{2n-4}}{2.3\dots(2n-5)(2n-4)}$$

$$\mp \frac{z^{2n-2}}{2.3\dots(2n-3)(2n-2)} \pm \frac{z^{2n}}{2.3\dots(2n-1).2n} = 0.$$

Diese multipliciren wir jetzt, um den Coefficienten von z^{2n} wegzuschaffen, mit $2.3\dots(2n-1)2n$, dann ergiebt sich folgende Gleichung:

$$2.3\dots(2n-1)2n - 3.4\dots(2n-1)2n.z^2 + 5.6\dots(2n-1)2n.z^4$$
$$- 7.8\dots(2n-1)2n.z^6 \pm (2n-3)(2n-2)(2n-1)2n.z^{2n-4} \mp (2n-1)2n.z^{2n-2} \pm z^{2n} = 0,$$

welche, wenn wir alle Glieder derselben in umgekehrter Ordnung stellen, so aussieht:

$$\pm z^{2n} \mp (2n-1)2n.z^{2n-2} \pm (2n-3)(2n-2)(2n-1)2n.z^{2n-4} \mp \dots - 7.8\dots(2n-1)2n z^6$$
$$+ 5.6\dots(2n-1)2n.z^4 - 3.4\dots(2n-1)2n.z^2 + 2.3\dots(2n-1).2n = 0 \quad (C).$$

Hierin gilt das obere oder das untere Zeichen, jenachdem n als gerad oder als ungerad gedacht wird.

Diese Gleichung könnte nun dienen, die Wurzeln des für Cos. z angegebenen Ausdruckes, die wir wissen müssen, wenn wir die ihm zugehörigen Factoren finden wollen, zu entdecken; allein sie ist so beschaffen, daß man sie nicht auflösen kann. Dennoch können wir die Wurzeln dieser Gleichung angeben.

2) Die Trigonometrie lehrt, daß, wenn π die in Graden ausgedrückte halbe Kreislinie und r eine unerreichbar große Zahl bedeutet, die Cosinus aller der unzählig vielen bejahten und verneinten Kreisbögen, welche in folgenden Reihen

$$(h)\begin{cases} \frac{1}{2}\pi, & \frac{3}{2}\pi, & \frac{5}{2}\pi, & \frac{7}{2}\pi, & \dots - \frac{2r-1}{2}\pi; \\ -\frac{1}{2}\pi, & -\frac{3}{2}\pi, & -\frac{5}{2}\pi, & -\frac{7}{2}\pi, & \dots - \frac{2r-1}{2}\pi; \end{cases}$$

enthalten sind, den Werth $= 0$ haben müssen. Da nun der Ausdruck

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \dots \pm \frac{z^{2n}}{2.3\dots(2n-1)2n}$$

den Werth des Cosinus eines jeden Kreisbogens angiebt, dessen Länge durch den Halbmesser $= 1$ ausgemessen z heißt, für alle die in den Reihen (h) enthaltenen Kreisbögen aber die Cosinus $= 0$ werden müssen; so wird der erwähnte Ausdruck für alle Längen z, die man erhält, wenn man die in den Reihen (h) enthaltenen Kreisbögen als rectificirt und

und durch den Halbmesser $= 1$ ausgemessen sich vorstellt, den Werth $= 0$ erhalten. Man stelle sich also unter π von jetzt an die durch den Halbmesser $= 1$ ausgemessene halbe Kreislinie vor, so enthalten die Reihen (h) lauter Wurzeln des für Cos. z angegebenen Ausdruckes und der daraus formirten Gleichung (C). Es sind aber auch diese in den Reihen (h) begriffenen Wurzeln alle Wurzeln, die überhaupt die Gleichung (C) nur haben kann. **Wirkliche** Kreisbögen nehmlich, für welche der **Cosinus** $= 0$ seyn muß, giebt es ausser denen, welche in den Reihen (h) begriffen sind, keine mehr, und die Gleichung (C) hat also ausser den in den Reihen (h) enthaltenen Wurzeln weiter keine reellen. — **Imaginäre** Wurzeln aber kann sie gar nicht haben, weil sie aus dem für Cos. z angegebenen Ausdrucke abgeleitet ist, in welchem z jedesmal die Länge eines **wirklichen** Kreisbogens, mithin jedesmal eine reelle Größe bedeutet, und der, ohne diese Bedeutung von z vorauszusetzen, gar nicht deducirt werden kann. —

Diese für unsere Gleichung (C) in den Reihen (h) enthaltenen Wurzeln stimmen auch der Zahl und Beschaffenheit nach mit der Form der Gleichung überein. Diese muß, nach der Lehre von den Gleichungen, wegen des Graderponenten $2n$, welcher eine unerreichbar große Zahl ist, und wegen der blos geraden Potenzen der unbestimmten Größe z eine unerreichbar große Anzahl $2n$ **bejahter** und **verneinter** Wurzeln haben, und für eine jede **bejahte** muß eine von den **verneinten** Wurzeln vorhanden seyn, welche der Größe nach der **bejahten** gleich ist.

3) Aus den Wurzeln der Gleichung (C) lassen sich nun leicht die einfachen Factoren des in ihr stehenden und in der Form einer **ganzen** Function von z dargestellten Ausdruckes nach §. 67. formiren, denn daß hier $2n$ eine unerreichbar große Zahl ist, dieses kann nicht im Wege stehen. — Nehmen wir die Formation nach der Form $z - a$ (§. 67.) vor, so erhalten wir für die **bejahten** Wurzeln a, welche hier $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, ... $\frac{2r-1}{2}\pi$ heißen, die einfachen Factoren: $z - \frac{1}{2}\pi$, $z - \frac{3}{2}\pi$, $z - \frac{5}{2}\pi$, ..., $z - \frac{2r-1}{2}\pi$; für die verneinten Wurzeln a aber, welche hier $-\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{5}{2}\pi$, ..., $-\frac{2r-1}{2}.\pi$ heißen, erhalten wir die einfachen Factoren $z + \frac{1}{2}\pi$, $z + \frac{3}{2}\pi$, $z + \frac{5}{2}\pi$, ... $z + \frac{2r-1}{2}.\pi$. Demnach muß nun seyn:

$$\pm z^{2n} \mp (2n-1)2n.z^{2n-2} \pm (2n-3)(2n-2)(2n-1)2n.z^{2n-4} \mp \ldots - 7.8\ldots(2n-1)2n.z^6$$
$$+ 5.6\ldots(2n-1)2n.z^4 - 3.4\ldots(2n-1)2n.z^2 + 2.3\ldots(2n-1)2n$$
$$=(z -$$

$$= \left(z - \frac{1}{2}\pi\right)\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)\left(z + \frac{3}{2}\pi\right)\left(z - \frac{5}{2}\pi\right)\left(z + \frac{5}{2}\pi\right) \times \ldots$$

$$\times \left(z - \frac{2r-1}{2}\pi\right)\left(z + \frac{2r-1}{2}\pi\right).$$

4) Weil der in seinen einfachen Factoren hier ausgedrückte Ausdruck unserer Gleichung

$$= 2.3\ldots(2n-1)2n\left[1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots(2n-1)2n}\right]$$

ist (Nro. 1), so muß nun auch, wie man leicht einsehen kann, folgende Gleichung Statt haben:

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots(2n-1)2n}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(z - \frac{1}{2}\pi\right)\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)\left(z + \frac{3}{2}\pi\right)\left(z - \frac{5}{2}\pi\right)\left(z + \frac{5}{2}\pi\right) \times \ldots \\ \times \left(z - \frac{2r-1}{2}\pi\right)\left(z + \frac{2r-1}{2}\pi\right)\end{array}\right\}}{2.3\ldots(2n-1)2n}$$

Es ist aber der Divisor im letzterem Ausdrucke das absolute Glied der regulirten Gleichung (C), und dieses muß bekanntlich dem Producte aus allen Wurzeln der regulirten Gleichung gleich seyn. Es kann daher statt des erwähnten Divisors das Product der Wurzeln der Gleichung (C), welches so heißt:

$$\left(-\frac{1}{2}\pi\right).\left(\frac{1}{2}\pi\right).\left(-\frac{3}{2}\pi\right).\left(\frac{3}{2}\pi\right).\left(-\frac{5}{2}\pi\right).\left(\frac{5}{2}\pi\right) \times \ldots$$

$$\times \left(-\frac{2r-1}{2}\pi\right).\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)$$

gebraucht werden. Thut man dieses, so erhält man:

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \pm \frac{z^{2n}}{2.3\ldots(2n-1)2n}$$

$= (z -$

$$= \frac{(z-\frac{1}{2}\pi)(z+\frac{1}{2}\pi)(z-\frac{3}{2}\pi)(z+\frac{3}{2}\pi)(z-\frac{5}{2}\pi)(z+\frac{5}{2})\ldots}{(-\frac{1}{2}\pi).(\frac{1}{2}\pi).(-\frac{3}{2}\pi).(\frac{3}{2}\pi).(-\frac{5}{2}\pi).(\frac{5}{2}\pi)\ldots}$$

$$\times \frac{(z-\frac{2r-1}{2}\pi)(z+\frac{2r-1}{2}\pi)}{(-\frac{2r-1}{2}\pi).(\frac{2r-1}{2}\pi)}$$

$$= (-\frac{2z}{\pi}+1)(\frac{2z}{\pi}+1)(-\frac{2z}{3\pi}+1)(\frac{2z}{3\pi}+1)(-\frac{2z}{5\pi}+1)(\frac{2z}{5\pi}+1)\times\ldots$$

$$\times(-\frac{2z}{(2r-1)\pi}+1)(\frac{2z}{(2r-1)\pi}+1)$$

$$= (1-\frac{2z}{\pi})(1+\frac{2z}{\pi})(1-\frac{2z}{3\pi})(1+\frac{2z}{3\pi})(1-\frac{2z}{5\pi})(1+\frac{2z}{5\pi})\times\ldots$$

$$\times(1-\frac{2z}{(2r-1)\pi})(1+\frac{2z}{(2r-1)\pi})$$

$$= (1-\frac{4z^2}{\pi^2})(1-\frac{4z^2}{9\pi^2})(1-\frac{4z^2}{25\pi^2})\times\ldots\times(1-\frac{4z^2}{(2r-1)^2.\pi^2})$$

§. 163.

Die in den beyden vorigen §. §. gezeigte Zerfällung findet man zuerst bey **Joh. Bernoulli**, Oper. Tom. IV. Nro. 152., welcher der Erfinder dieser Zerfällung ist. Er macht a. a. O. Schol. 2. Schwierigkeiten in Rücksicht der Bestimmung der Anzahl der Wurzeln, die den für Sin. z und Cos. z angegebenen Ausdrücken zugehören. Eben dieses bemerkt **Kästner** in seinen Anfangsgründen der **Analys. des Unendl.** 3te Ausgabe, §. 337., welcher zwar diese Zerfällung etwas anders vorträgt, als **Bernoulli**, aber hierdurch die **Bernoullischen** Zweifel nicht hebt, wie auch Hr. **Langsdorf** in seinen **Erläuterungen** über die Kästnerische Analys. des Unendl. S. 285. erinnert. Hr. **Langsdorf** hat deswegen an **Kästnern** geschrieben und das erhaltene Antwortschreiben seinen Erläuterungen beygefügt; aus diesem erhellt aber, daß **Kästner** auch dießmal die Schwierigkeiten nicht heben konnte. In dem Versuch einer neuen Summationsmethode von Hrn. **Pfaf**, S. 97. u. folg. findet man ebenfalls Erinnerungen gegen die Evidenz der erwähnten

ten Zerfällung. Noch bemerken wir, daß Euler in seiner Introd. in Analys. infinit. Tom. I. §. 194. eben diese Factorenformeln für Sin. z und Cos. z angiebt und dieselben auf einem ganz andern Wege findet, als der ist, auf welchen wir dieselben gefunden haben. Wir wollen nun zeigen, wie Euler die genannten Factorenformeln bequem zur Berechnung der Logarithmen der **Sinus** und **Cosinus** einrichtet.

§. 164.

"Es sollen die für Sin. z und Cos. z angegebenen Factorenformeln zur bequemen Be-"rechnung der Logarithmen der **Sinus** und **Cosinus** eingerichtet werden."

1) In den beyden nachstehenden und mit I) und II) bezeichneten Gleichungen:

$$\text{I)}\quad \text{Sin. } z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2.\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4^2.\pi^2}\right) \times \ldots$$

$$\text{II)}\quad \text{Cos. } z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2.\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{5^2.\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{7^2.\pi^2}\right) \times \ldots$$

bedeutet z die Länge eines als rectificirt vorgestellten und durch den Halbmesser = 1 ausgemessenen Kreisbogens. Es ist aber, wenn die Anzahl der Grade, welche ein Kreisbogen enthält, durch v bezeichnet wird, und π die **Ludolphische** Zahl bedeutet, diese Länge $z = \frac{v\pi}{180}$. Da man nun nicht einmal für alle zwischen 0° und 90° fallenden Kreisbögen die Berechnung der Logarithmen ihrer **Sinus** und **Cosinus** nöthig hat, so darf man die Zahl $v = \frac{m}{n}.90°$ setzen, wo dann $\frac{v}{90} = \frac{m}{n}$ und die Länge z oder $\frac{v.\pi}{180} = \frac{m}{n}.90.\frac{\pi}{180} = \frac{m\pi}{2n}$ wird. Setzt man demnach $\frac{m\pi}{2n}$ statt z in den beyden Gleichungen I) und II), so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$\text{III)}\ \text{Sin. } v° \text{ oder Sin. } \frac{m}{n}90° = \frac{m\pi}{2n}\left(1 - \frac{m^2}{2^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{4^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{6^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{8^2.n^2}\right) \times \ldots$$

$$\text{IV)}\ \text{Cos. } v° \text{ oder Cos. } \frac{m}{n}90° = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{3^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{5^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{7^2.n^2}\right) \times \ldots$$

2) Aus diesen beyden Gleichungen aber folgen, wenn man von beyden Seiten derselben die Logarithmen nimmt, diese:

$$\text{V)}\ \text{log. Sin. } v° \text{ oder log. Sin. } \frac{m}{n}.90° = \text{log. } m + \text{log. } \pi - \text{log. } 2 - \text{log. } n$$

$$+ \text{log.}\left(1 - \frac{m^2}{2^2.n^2}\right) + \text{log.}\left(1 - \frac{m^2}{4^2.n^2}\right) + \text{log.}\left(1 - \frac{m^2}{6^2.n^2}\right) + \text{log.}\left(1 - \frac{m^2}{8^2.n^2}\right) + \ldots$$

VI) log.

VI) log. Cos. v° oder log. Cos. $\frac{m}{n} . 90°$ = log. $(1 - \frac{m^2}{n^2})$ + log. $(1 - \frac{m^2}{3^2 . n^2})$

+ log. $(1 - \frac{m^2}{5^2 . n^2})$ + log. $(1 - \frac{m^2}{7^2 . n^2})$ + log. $(1 - \frac{m^2}{9^2 . n^2})$ + ...

3) Diese nun richtet **Euler** auf folgende Art ein:

a) Die Gleichung V). In dieser steht das Glied log. $(1 - \frac{m^2}{2^2 . n^2})$. Weil aber der Ausdruck $1 - \frac{m^2}{2^2 . n^2} = \frac{2^2 . n^2 - m^2}{2^2 . n^2} = \frac{2n - m}{2n} \times \frac{2n + m}{2n}$ ist; so muß auch

log. $(1 - \frac{m^2}{2^2 . n^2})$ = log. $(\frac{2n - m}{2n} \times \frac{2n + m}{2n})$ = log. $\frac{2n - m}{2n}$ + log. $\frac{2n + m}{2n}$

= log. $(2n - m)$ — log. n — log. 2 + log. $(2n + m)$ — log. n — log. 2

= log. $(2n - m)$ + log. $(2n + m)$ — 2 log. n — 2 log. 2 seyn.

Diesen letzten Ausdruck setzt **Euler** statt des Gliedes log. $(1 - \frac{m^2}{2^2 . n^2})$. Die folgenden Glieder aber löst er in Reihen auf. Nach §. 136. Nro. 2) nehmlich muß, wenn z einen bejahten ächten Bruch bedeutet,

$$\text{log. nat. } (1 - z) = - z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{6} z^6 - \ldots \text{ (h)}$$

seyn. Da nun, wenn man die Logarithmen der **Sinus** und **Cosinus** berechnen will, diese Berechnung nur für alle Kreisbögen von 0° bis 45° nöthig ist, und also bey der ganzen Berechnung die Gradzahl v nicht über 45° steigt; so bleibt $\frac{m}{n} = \frac{v}{90}$ (Nro. 1) gewiß bey dieser Berechnung ein **ächter** Bruch, es bedeuten also auch gewiß die Größen $\frac{m^2}{2^2 . n^2}$, $\frac{m^2}{6^2 . n^2}$, $\frac{m^2}{8^2 . n^2}$ rc. **ächte** Brüche. Darum kann man diese Größen statt z in der Gleichung (h) gebrauchen und so die Glieder log. $(1 - \frac{m^2}{4^2 . n^2})$, log. $(1 - \frac{m^2}{6^2 . n^2})$ u. s. w., welche in der Gleichung V) dem Gliede log. $(1 - \frac{m^2}{2^2 . n^2})$ nachfolgen, in Reihen auflösen. Nach diesem Verfahren aber ergiebt sich die nachstehende Gleichung:

$$\log.\ \mathrm{nat.\ Sin.}\ v^\circ \text{ oder } \log.\ \mathrm{nat\ Sin.}\ \frac{m}{n}.90^\circ$$

$$= \log.\,\mathrm{nat.}\,m + \log.\,\mathrm{nat.}\,(2n - m) + \log.\,\mathrm{nat.}\,(2n + m) - 3\,\log.\,\mathrm{nat.}\,n$$

$$- 3.\,\log.\,\mathrm{nat.}\,2 + \log.\,\mathrm{nat.}\,\pi$$

$$- \frac{m^2}{n^2}\left[\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right]$$

$$- \frac{m^4}{2n^4}\left[\frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right]$$

$$- \frac{m^6}{3n^6}\left[\frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right]$$

$$- \frac{m^8}{4n^8}\left[\frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \frac{1}{10^8} + \ldots\right]$$

b) Die Gleichung VI). Diese behandelt **Euler** auf ähnliche Art wie die Gleichung V), und er erhält hierdurch folgende Gleichung:

$$\log.\ \mathrm{nat.\ Cos.}\ v^\circ \text{ oder } \log.\ \mathrm{nat.\ Cos.}\ \frac{m}{n}.90^\circ$$

$$= \log.\,\mathrm{nat.}\,(n - m) + \log.\,\mathrm{nat.}\,(n + m) - 2\,\log.\,\mathrm{nat.}\,n$$

$$- \frac{m^2}{n^2}\left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right]$$

$$- \frac{m^4}{2n^4}\left[\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots\right]$$

$$- \frac{m^6}{3n^6}\left[\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \ldots\right]$$

$$- \frac{m^8}{4n^8}\left[\frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \ldots\right]$$

u. s. w.

4) Werden die Glieder der Zahlenreihen, die sich in den beyden für log. nat. Sin. v° und log. nat. Cos. v° jetzt angegebenen Gleichungen befinden, in Decimalbrüche aufgelöst und summirt, die Summen aber durch die Zahlen dividirt, mit welchen die Nenner der Potenzen von $\frac{m}{n}$ multiplicirt sind; so erhält man folgende für die Berechnung der natürlichen Logarithmen der **Sinus** und **Cosinus** äusserst bequeme Gleichungen:

log.

$$\log.\ \text{nat. Sin. } v^\circ \text{ oder } \log.\ \text{nat. Sin. } \frac{m}{n}\,90^\circ$$

$$= \log.\ \text{nat. } m + \log.\ \text{nat. } (2n - m) + \log.\ \text{nat. } (2n + m) - 3 \log.\ \text{nat. } n - 3.\log.\ \text{nat. } 2 + \log.\ \text{nat. } \pi$$

$-\frac{m^2}{n^2}.0{,}16123351671 \ldots$	$-\frac{m^{10}}{n^{10}}.0{,}00000019425 \ldots$
$-\frac{m^4}{n^4}.0{,}00257260105 \ldots$	$-\frac{m^{12}}{n^{12}}.0{,}00000001001 \ldots$
$-\frac{m^6}{n^6}.0{,}00009032844 \ldots$	$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.0{,}00000000053 \ldots$
$-\frac{m^8}{n^8}.0{,}00000398179 \ldots$	$-\frac{m^{16}}{n^{16}}.0{,}00000000002 \ldots$

u. s. w.

$$\log.\ \text{nat. Cos. } v^\circ \text{ oder } \log.\ \text{nat. Cos. } \frac{m}{n}\,90^\circ$$

$$\log.\ \text{nat. } (n - m) + \log.\ \text{nat. } (n + m) - 2 \log.\ \text{nat. } n$$

$-\frac{m^2}{n^2}.0{,}23370055013 \ldots$	$-\frac{m^{12}}{n^{12}}.0{,}00000031430 \ldots$
$-\frac{m^4}{n^4}.0{,}00733901580 \ldots$	$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.0{,}00000002989 \ldots$
$-\frac{m^6}{n^6}.0{,}00048235888 \ldots$	$-\frac{m^{16}}{n^{16}}.0{,}00000000290 \ldots$
$-\frac{m^8}{n^8}.0{,}00003879475 \ldots$	$-\frac{m^{18}}{n^{18}}.0{,}00000000028 \ldots$
$-\frac{m^{10}}{n^{10}}.0{,}00000340827 \ldots$	$-\frac{m^{20}}{n^{20}}.0{,}00000000002 \ldots$

u. s. w.

5) Multiplicirt man aber diese Zahlen mit dem Modul des **Briggischen** Logarithmensystems, welcher bekanntlich = 0,434294481 ... ist; so erhält man die Gleichungen, nach welchen sich die **Briggischen** Logarithmen der **Sinus** und **Cosinus** auf eine sehr bequeme Art berechnen lassen. Sie sind folgende:

log.

$$\log.\ \text{Brigg. Sin.}\ v^\circ \text{ oder } \log.\ \text{Brigg. Sin.}\ \frac{m}{n}\,90^\circ$$

$$= \log.\ \text{Br. } m + \log.\ \text{Br. } (2n - m) + \log.\ \text{Br. } (2n + m) - 3 \log.\ \text{Br. } n$$
$$- 3 . \log.\ \text{Br. } 2 - \log.\ \text{Br. } \pi$$

$$\begin{array}{l|l}
- \frac{m^2}{n^2} . 0{,}07002282660 \ldots & - \frac{m^{10}}{n^{10}} . 0{,}00000008436 \ldots \\
- \frac{m^4}{n^4} . 0{,}00111726644 \ldots & - \frac{m^{12}}{n^{12}} . 0{,}00000000434 \ldots \\
- \frac{m^6}{n^6} . 0{,}00003922914 \ldots & - \frac{m^{14}}{n^{14}} . 0{,}00000000023 \ldots \\
- \frac{m^8}{n^8} . 0{,}00000172927 \ldots & - \frac{m^{16}}{n^{16}} . 0{,}00000000001 \ldots
\end{array}$$

u. s. w.

$$\log.\ \text{Brigg. Cos.}\ v^\circ \text{ oder } \log.\ \text{Brigg. Cos.}\ \frac{m}{n}\,90^\circ$$

$$= \log.\ \text{Br. } (n - m) + \log.\ \text{Br. } (n + m) - 2 \log.\ \text{Br. } n$$

$$\begin{array}{l|l}
- \frac{m^2}{n^2} . 0{,}10149485934 \ldots & - \frac{m^{12}}{n^{12}} . 0{,}00000013650 \ldots \\
- \frac{m^4}{n^4} . 0{,}00318729406 \ldots & - \frac{m^{14}}{n^{14}} . 0{,}00000001298 \ldots \\
- \frac{m^6}{n^6} . 0{,}00020948580 \ldots & - \frac{m^{16}}{n^{16}} . 0{,}00000000126 \ldots \\
- \frac{m^8}{n^8} . 0{,}00001684834 \ldots & - \frac{m^{18}}{n^{18}} . 0{,}00000000012 \ldots \\
- \frac{m^{10}}{n^{10}} . 0{,}00000148019 \ldots & - \frac{m^{20}}{n^{20}} . 0{,}00000000001 \ldots
\end{array}$$

u. s. w.

Die bisher angegebenen Formeln gelten, wie sich von selbst versteht, für den Sin. tot. = 1, und also für log. Sin. tot. d. h. log. 1 = 0. Sollen daher die bey den für log. Brigg. Sin. v° und log. Brigg. Cos. v° angegebenen Formeln die in den trigonometrischen Tafeln stehenden Logarithmen geben, in welchen der Sin. tot. = 10000000000 und

und log. Brigg. Sin. tot. d. h. log. Brigg. 10000000000 = 10 ist; so muß man noch zu beyden Formeln diesen Logarithmus addiren, also eine jede derselben um 10 vermehren.

§. 165.

Dergleichen Formeln, wie vorhin für die Berechnung der Logarithmen der **Sinus** und **Cosinus** gesucht worden sind, könnten auch für die Berechnung der Logarithmen der **Tangenten** und **Cotangenten** gefunden werden, wenn sie nöthig wären. Man kann aber dieselben darum entbehren, weil sich bekanntlich die Logarithmen der **Tangenten** und **Cotangenten** durch eine bloße Subtractionsoperation aus den Logarithmen der **Sinus** und **Cosinus** berechnen lassen. Es ist nehmlich für den Sin. tot. = 1

$$\text{Tang. } v^\circ = \frac{\text{Sin. } v^\circ}{\text{Cos. } v^\circ} \text{ und } \text{Cot. } v^\circ = \frac{\text{Cos. } v^\circ}{\text{Sin. } v^\circ},$$

darum muß nun

$$\text{log. Tang. } v^\circ = \text{log.} \left(\frac{\text{Sin. } v^\circ}{\text{Cos. } v^\circ}\right) = \text{log. Sin. } v^\circ - \text{log. Cos. } v^\circ,$$

$$\text{log. Cot. } v^\circ = \text{log.} \left(\frac{\text{Cos. } v^\circ}{\text{Sin. } v^\circ}\right) = \text{log. Cos. } v^\circ - \text{log. Sin. } v^\circ \text{ seyn.}$$

§. 166.

"Nun soll auch noch gezeigt werden, wie man auf eine leichte Art den **natürlichen** "und den **Briggischen** Logarithmus der **Ludolphischen** Zahl π berechnen kann."

1) Dieses kann vermittelst der beyden Gleichungen III) und IV), welche im vorigen §. angegeben worden sind, geschehen. Es war dort

$$\text{Sin. } v^\circ \text{ oder Sin. } \frac{m}{n} 90^\circ = \frac{m\pi}{2n}\left(1 - \frac{m^2}{2^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{4^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{6^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{8^2.n^2}\right) \times \ldots,$$

$$\text{Cos. } v^\circ \text{ oder Cos. } \frac{m}{n} 90^\circ = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{3^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{5^2.n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{7^2.n^2}\right) \times \ldots,$$

und daraus folgt für $v = 45^\circ$, wo $\frac{m}{n} = \frac{v}{90} = \frac{1}{2}$, folglich $m = 1$, $n = 2$ wird,

$$\text{Sin. } 45^\circ = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{2^2.2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2.2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2.2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{8^2.2^2}\right) \times \ldots$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{4^2-1}{4^2}\right) \times \left(\frac{8^2-1}{8^2}\right) \times \left(\frac{12^2-1}{12^2}\right) \times \left(\frac{16^2-1}{16^2}\right) \times \ldots$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{(4-1)\,(4+1)}{4\,.\,4}\right) \left(\frac{(8-1)\,(8+1)}{8\,.\,8}\right) \left(\frac{(12-1)(12+1)}{12\,.\,12}\right) \left(\frac{(16-1)(16+1)}{16\,.\,16}\right) \times \ldots$$

$$= \frac{\pi\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15\,.\,17\,.\,19\,.\,21\,.\,23\,.\,25 \times \ldots}{4\,.\,4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12\,.\,16\,.\,16\,.\,20\,.\,20\,.\,24\,.\,24 \times \ldots};$$

$$\text{Cos. } 45^\circ = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2.2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2.2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2.2^2}\right) \times \ldots$$

$$= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right) \times \left(\frac{6^2-1}{6^2}\right) \times \left(\frac{10^2-1}{10^2}\right) \times \left(\frac{14^2-1}{14^2}\right) \times \ldots$$

$$= \left(\frac{(2-1)\,(2+1)}{2\,.\,2}\right) \left(\frac{(6-1)\,(6+1)}{6\,.\,6}\right) \left(\frac{(10-1)(10+1)}{10\,.\,10}\right) \left(\frac{(14-1)(14+1)}{14\,.\,14}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15\,.\,17\,.\,19\,.\,21\,.\,23\,.\,25 \times \ldots}{2\,.\,2\,.\,6\,.\,6\,.\,10\,.\,10\,.\,14\,.\,14\,.\,18\,.\,18\,.\,22\,.\,22\,.\,26 \times \ldots}$$

2) Dividirt man nun den Cos. 45° in den Sin. 45°, so erhält man, weil $\frac{\text{Sin } 45^\circ}{\text{Cos. } 45^\circ}$ = Tang. 45°, Tang. 45° aber = 1 ist,

$$1 = \frac{\dfrac{\pi\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15\,.\,17\,.\,19\,.\,21\,.\,23\,.\,25 \times \ldots}{4\,.\,4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12\,.\,16\,.\,16\,.\,20\,.\,20\,.\,24\,.\,24 \times \ldots}}{\dfrac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15\,.\,17\,.\,19\,.\,21\,.\,23\,.\,25 \times \ldots}{2\,.\,2\,.\,6\,.\,6\,.\,10\,.\,10\,.\,14\,.\,14\,.\,18\,.\,18\,.\,22\,.\,22\,.\,26 \times \ldots}}$$

d. h.

$$1 = \frac{\pi\,.\,2\,.\,2\,.\,6\,.\,6\,.\,10\,.\,10\,.\,14\,.\,14\,.\,18\,.\,18\,.\,22\,.\,22\,.\,26 \times \ldots}{4\,.\,4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12\,.\,16\,.\,16\,.\,20\,.\,20\,.\,24\,.\,24 \times \ldots}$$

$$= \frac{\pi\,.\,1\,.\,1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\,.\,9\,.\,9\,.\,11\,.\,11\,.\,13 \times \ldots}{2\,.\,2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,.\,8\,.\,8\,.\,10\,.\,10\,.\,12\,.\,12 \times \ldots}$$

Hieraus folgt nun

$$\pi = \frac{2\,.\,2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,.\,8\,.\,8\,.\,10\,.\,10\,.\,12\,.\,12\,.\,13 \times \ldots}{1\,.\,1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\,.\,9\,.\,9\,.\,11\,.\,11\,.\,12\,.\,12 \times \ldots}$$

wofür man auch setzen kann:

$$\pi = \frac{4}{1} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{120}{121} \cdot \frac{143}{144} \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{4}{1}\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{5^2-1}{5^2}\right)\left(\frac{7^2-1}{7^2}\right)\left(\frac{9^2-1}{9^2}\right)\left(\frac{11^2-1}{11^2}\right)\left(\frac{13^2-1}{13^2}\right) \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{4}{1}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\left(1-\frac{1}{13^2}\right) \text{ u. s. w.}$$

3) Nimmt man jetzt von beyden Seiten der letztern Gleichung die Logarithmen, so erhält man:

$$\log. \pi = \log. 4 + \log.\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + \log.\left(1-\frac{1}{5^2}\right) + \log.\left(1-\frac{1}{7^2}\right)$$
$$+ \log.\left(1-\frac{1}{9^2}\right) + \log.\left(1-\frac{1}{11^2}\right) + \log.\left(1-\frac{1}{13^2}\right) + \ldots$$

4) Weil aber nach §. 136. Nro. 2), wenn z einen bejahten ächten Bruch bedeutet,

$$\log. \text{nat.} (1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6 - \ldots$$

seyn muß; so kann nach der hier angegebenen Gleichung, wenn man unter den Logarithmen die natürlichen versteht, ein jedes von den Gliedern $\log.\left(1-\frac{1}{3^2}\right)$, $\log.\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$ $\log.\left(1-\frac{1}{7^2}\right)$ rc. in eine Reihe aufgelöst werden. Thut man dieses, so verwandelt sich die für $\log. \pi$ in Nro. 4) angegebene Gleichung in folgende:

$$\log. \text{nat.} \pi = \log. \text{nat.} 4$$
$$-\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2.3^4} + \frac{1}{3.3^6} + \frac{1}{4.3^8} + \frac{1}{5.3^{10}} + \ldots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{2.5^4} + \frac{1}{3.5^6} + \frac{1}{4.5^8} + \frac{1}{5.5^{10}} + \ldots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{2.7^4} + \frac{1}{3.7^6} + \frac{1}{4.7^8} + \frac{1}{5.7^{10}} + \ldots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{2.9^4} + \frac{1}{3.9^6} + \frac{1}{4.9^8} + \frac{1}{5.9^{10}} + \ldots\right)$$

u. s. w.

Diese

Diese aber ist, wie man leicht einsieht, äusserst bequem für die Berechnung des log. nat. π. Löst man die Glieder der Zahlenreihen in Decimalbrüche auf und berechnet so die Werthe derselben, zieht alsdann die Summe dieser Werthe von log. nat. 4 ab; so erhält man:

$$\log.\ \text{nat.}\ \pi = 1{,}1447298858494 0017414 \ldots$$

5) Aus log. nat. π erhält man den log. Brigg. π, wenn man den ersten mit dem Modul des Briggischen Systems = 0,434294481 . . . multiplicirt. Es ist

$$\log.\ \text{Brigg.}\ \pi = 0{,}4971498726941338 5435 \ldots$$

Fünfter Abschnitt.

Von der Form desjenigen allgemeinen algebraischen Ausdruckes, welcher die algebraischen Ausdrücke aller Arten der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe in sich begreift.

---

§. 167.

In den vorigen Abschnitten sind die Functionen einer einzigen veränderlichen Größe gehörig eingetheilt und für eine jede besondere Art derselben sind gewisse Grundformen angegeben worden, auf welche sich die algebraischen Ausdrücke derselben jedesmal reduciren lassen müssen, wenn sie nicht schon die Grundform haben, es mögen ihre Formen beschaffen seyn, wie sie wollen. Auch sind die Regeln gezeigt worden, nach welchen die Reductionen, wenn sie nöthig sind, vorgenommen werden müssen. Es ist also eigentlich nichts mehr von dem zu leisten übrig, was in der Ueberschrift zu dem ersten Hauptstücke angesagt wurde. Die Untersuchungen aber, welche wir in dem folgenden Hauptstücke anzustellen haben, machen es nöthig, daß wir den vorigen Abschnitten noch einen neuen Abschnitt beyfügen und in demselben untersuchen, ob sich nicht auch ein algebraischer Ausdruck angeben läßt, dessen Form so allgemein ist, daß er die algebraischen Ausdrücke aller Arten der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe ohne Ausnahme in sich begreift. Läßt sich ein solcher Ausdruck angeben, so darf man nur bey den Untersuchungen, die in dem folgenden Hauptstücke über die Natur der Functionen angestellt werden sollen, jedesmal,

mal, wenn es auf die Betrachtung der algebraischen Ausdrücke der Functionen ankommt, den erwähnten allgemeinen algebraischen Ausdruck zum Grund legen, und es muß dann das Resultat der Untersuchung für **alle** Functionen einer einzigen veränderlichen Größe gültig werden. Daß aber wirklich ein solcher Ausdruck angebbar seyn und welche Form derselbe haben muß, dieses ergiebt sich ohne vieles Nachdenken sogleich, wenn man die in den vorigen Abschnitten für eine jede Art der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe angegebenen Grundformen zusammenstellt und mit einander vergleicht. Wir wollen denselben in dem folgenden §. angeben und ganz kurz von ihm zeigen, daß er wirklich die algebraischen Ausdrücke **aller** Functionen einer einzigen veränderlichen Größe in sich begreift.

§. 168.

"Wenn man sich in dem nachstehenden algebraischen Ausdrucke

$$Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots + Mz^m + Nz^n + \ldots \quad (\odot)$$

"die Anzahl der Glieder beliebig, also endlich oder auch unendlich groß vorstellt, wenn man "ferner die Coefficienten A, B, C ... und die Exponenten a, b, c ... beliebige von "z unabhängige Größen bedeuten läßt, die selbst den Werth = 0 erhalten können; so ist "der Ausdruck ein solcher, welcher **alle** algebraischen Ausdrücke der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe in sich begreift, und also ein ganz **allgemeiner** algebraischer "Ausdruck dieser Functionen genannt werden kann."

1) Die Functionen einer einzigen veränderlichen Größe sind entweder **algebraisch** oder **transcendentisch**. Die algebraischen aber werden in **rationale** und **irrationale** eingetheilt, und hiervon sind die ersten wiederum entweder **ganz** oder **gebrochen**, die letzten aber entweder **entwickelt** oder **verwickelt**.

2) Nun sind nach §. 34. die algebraischen Ausdrücke aller **ganzen** Functionen unter dem Ausdrucke: $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Nz^n$ enthalten, denn auf die Form dieses Ausdruckes lassen sich die algebraischen Ausdrücke aller **ganzen** Functionen reduciren; ferner aber lassen sich auch alle **gebrochenen** Functionen nach §. 79. in Reihen auflösen. — Daraus ist schon klar, daß der Ausdruck ($\odot$) die algebraischen Ausdrücke aller **rationalen** Functionen unter sich begreift.

Was aber die **irrationalen** Functionen anbelangt, so weis man von den **entwickelten** derselben aus §. 114., daß sich die algebraischen Ausdrücke derselben alle auf die Form des Ausdruckes: $az^{\frac{\mu}{\nu}} + bz^{\frac{\xi}{\omega}} + cz^{\frac{\pi}{\rho}} + dz^{\frac{\sigma}{\tau}} + \ldots$ bringen lassen müssen

sen, daß also dieser Ausdruck die algebraischen Ausdrücke aller **entwickelten** irrationalen Functionen unter sich begreift; ferner aber sieht man auch an den Formen der algebraischen Ausdrücke, die man erhält, wenn man die verwickelten Functionen, welche eine Entwickelung zulassen, entwickelt darstellt, daß sie sich auf die Form des Ausdruckes (⊙) reduciren lassen müssen. — Es begreift also der Ausdruck (⊙) auch die algebraischen Ausdrücke **aller irrationalen** Functionen, die entweder wirklich entwickelt sind, oder doch eine Entwickelung zulassen, unter sich.

3) Nach Nro. 2) und 3) ist also der Ausdruck (⊙) ein **allgemeiner** Ausdruck, welcher die algebraischen Ausdrücke **aller algebraischen** Functionen, für welche sich entwickelte algebraische Ausdrücke angeben lassen, unter sich begreift. Daß aber auch der Ausdruck (⊙) ein eben solcher Ausdruck in Beziehung auf die **transcendentischen** Functionen sey, dieses sieht man sogleich aus dem Ausdrucke $A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots + Uz$, auf dessen Form sich nach §. 127. die algebraischen Ausdrücke aller transcendentischen Functionen reduciren lassen müssen.

Zwey-

Zweytes Hauptstück.

Von den Differenzen, Differentialien und den ersten Begriffen der Integralien der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

Erster Abschnitt.

Von den Differenzen derselben.

§. 169.

"Wenn die absolut veränderliche Größe z, von welcher irgend eine beliebige Function "y abhängig ist, um einen gewissen aliquoten Theil $\frac{1}{n}z$ zunimmt, wenn also "durchaus in der Function y die Größe z in $z + \frac{1}{n}z$ übergeht; so muß hierdurch die "Function y eine Abänderung leiden und in eine Function F übergehen, welche sich von "der Function y dadurch unterscheidet, daß sie für einen jeden Werth von z einen Werth "erhält, der von demjenigen Werthe, welchen für den eben so großen Werth von z die "Function y erhalten müßte, verschieden ist."

Der hier angeführte Satz ist das Princip, von welchem wir in den Untersuchungen die in diesem Hauptstücke angestellt werden sollen, ausgehen, und worauf der ganze sogenannte höhere Theil der mathematischen Analysis beruht. Er ist für einen Jeden ausser Zweifel, der den richtigen Begriff von einer Function (§. 8.) gefaßt hat, und ist auch schon öfters in dem vorigen Hauptstücke angewendet worden. Wenn z. E. die Function $y = z^3 - 5z^2$ ist, und es wird in derselben $z + \frac{1}{3}z$ statt z gesetzt; so verwandelt

sich diese Function y in eine Function $F = (z + \frac{1}{3} z)^5 - 5 (z + \frac{1}{3} z)^2$; diese aber ist gewiß für einen jeden Werth der Größe z von der Function y verschieden.

§. 170.

"Derjenige aliquote Theil $\frac{1}{n} z$ der absolut veränderlichen Größe z, um welchen man "diese Größe zunehmen läßt, damit aus einer Function y eine Function F erzeugt werde, "soll die **Differenz** der absolutveränderlichen Größe z genannt und dadurch bezeichnet "werden, daß wir dem Zeichen z den griechischen Buchstaben Δ vorsetzen."

Es bedeutet also von nun an Δz einen beliebigen aliquoten Theil von z und wird **Differenz** von z ausgesprochen, und Δz muß, welches sich von selbst versteht, bejaht seyn, wenn z bejaht ist, verneint aber, wenn z verneint ist.

§. 171.

"Diejenige Function F, welche erzeugt wird, wenn man bey einer Function y von "z die absolut veränderliche Größe z in $z + \Delta z$ übergehen läßt, soll die der Function y "zugehörige **Aenderungsfunction** genannt und durch y' bezeichnet werden."

Bey der Function $y = az$ z. E. ist die Aenderungsfunction $y' = a(z + \Delta z) = az + a\Delta z$; bey der Function $y = az^2 + bz + c$ ferner ist $y' = a(z + \Delta z)^2 + b(z + \Delta z) + c = az^2 + 2az\Delta z + a\Delta z^2 + bz + b\Delta z + c$.

§. 172.

"Diejenige bejahte oder verneinte Größe, welche für einen jeden Werth der absolut "veränderlichen Größe z anzeigt, um wie viel sich die aus einer Function y von z er- "zeugte Aenderungsfunction y' von der Function y unterscheidet, soll die der Fun- "ction y zugehörige Differenz genannt und dadurch bezeichnet werden, daß wir dem "Zeichen der Function den griechischen Buchstaben Δ vorsetzen."

Δy also bedeutet in der Folge immer die Differenz $y' - y$ und muß daher bejaht seyn, wenn $y' > y$, verneint aber, wenn $y' < y$ ist. Ist diese Differenz bejaht, so ist sie im eigentlichen Sinne eine Zunahme, welche die Function y durch den Uebergang der Größe z in $z + \Delta z$ leidet; ist sie aber verneint, so ist sie im eigentlichen Sinne eine Abnahme der Function y. Man kann aber, wie wir auch immer thun werden, Δy stets als

als eine Zunahme der Function y betrachten, weil jede Abnahme eine verneinte Zunahme genannt werden kann.

Für die Function $y = az$ z. E. war $y' = az + a\Delta z$ (§. 171.), und es muß also hier unserer Erklärung gemäß Δy oder $y' - y = az + a\Delta z - az = a\Delta z$ seyn. Für die Function $y = az^2 + bz + c$ ferner war $y' = az^2 + 2az\Delta z + a\Delta z^2 + bz + b\Delta z + c$ (§. 171.), es muß daher Δy oder $y' - y = 2az\Delta z + a\Delta z^2 + b\Delta z$ seyn.

§. 173.

Die Untersuchung über die Natur der den Functionen y von z zugehörigen Differenz Δy ist das, womit wir uns in diesem Hauptstücke beschäftigen werden. Bey dieser Untersuchung wollen wir zuerst setzen, eine jede Function y von z sey durch einen algebraischen Ausdruck von der Form $A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$, auf welche sich die algebraischen Ausdrücke aller nur immer denkbaren Functionen y von z zurückführen lassen (§. 168.) dargestellt, und wollen untersuchen, was unter dieser Voraussetzung den Differenzen Δy für allgemeine Eigenschaften zukommen müssen. Nach Vollendung dieser Untersuchung wollen wir auch die speciellen Formen der algebraischen Ausdrücke der Functionen y von z in Betrachtung ziehen und die damit in Verbindung stehenden Eigenschaften der Differenzen Δy auszumitteln suchen.

§. 174.

"Es soll ein für eine jede Function y von z gültiger Ausdruck gesucht werden, wel-"cher die der Function y zugehörige Aenderungsfunction y' entwickelt darstellt."

1) Da eine jede Function y von z, ganz allgemein genommen, gewiß durch die Gleichung:

$$y = A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$$

dargestellt werden kann, aus y aber y' wird, wenn man z in $z + \Delta z$ übergehen läßt; so muß die Gleichung:

$$y' = A + B(z + \Delta z)^b + C(z + \Delta z)^c + D(z + \Delta z)^d + \ldots$$

eine Gleichung seyn, welche ganz allgemein eine jede Aenderungsfunction y', die irgend einer Function y von z zugehören mag, darstellt.

2) In dieser Gleichung entwickele man nach §. 26. Nro. 3) die Potenzen der zweytheiligen Größe $z + \Delta z$, multiplicire alsdann die aus jeder Potenz entspringenden Glieder gehörig mit dem Coefficienten, der bey der Potenz in der Gleichung steht, und ordne hernach alle hierbey erhaltenen Größen nach Potenzen von Δz; dann erhält man folgende Gleichung:

$$y' = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} A & & & \\ + B z^b + \frac{b}{1} . B z^{b-1} & \Delta z + \frac{b(b-1)}{1 . 2} . B z^{b-2} & \Delta z^2 + \frac{b(b-1)(b-2)}{1 . 2 . 3} . B z^{b-3} & \Delta z^3 + \ldots \\ + C z^c + \frac{c}{1} . C z^{c-1} & + \frac{c(c-1)}{1 . 2} . C z^{c-2} & + \frac{c(c-1)(c-2)}{1 . 2 . 3} . C z^{c-3} & \\ + D z^d + \frac{d}{1} . D z^{d-1} & + \frac{d(d-1)}{1 . 2} . D z^{d-2} & + \frac{d(d-1)(d-2)}{1 . 2 . 3} . C z^{d-3} & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right.$$

Dieses nun ist ein allgemeiner Ausdruck, welcher die Aenderungsfunction y' einer jeden Function y von z entwickelt darstellt.

§. 175.

„Nun sollen die der Aenderungsfunction y' zukommenden allgemeinen Eigenschaften, „so wie sich dieselben theils unmittelbar aus dem Begriffe von der Art der Erzeugung dieser „Functionen (§. 171.), theils mittelbar aus dem im vorigen §. für sie gefundenen allgemei„nen Ausdrucke ergeben, angegeben werden."

1) Eben dieselben von der absolut veränderlichen Größe z unabhängigen und daher constanten Glieder, welche die Function y enthält, müssen auch in der ihr zugehörigen Aenderungsfunction y' vorkommen. Da nehmlich y' aus der Function y erzeugt wird, wenn man in letzterer z in $z + \Delta z$ übergehen läßt, durch diese Operation aber blos diejenigen Glieder der Function y umgeändert werden können, welche z enthalten; so müssen alle von z unabhängigen Glieder in y' noch ebenso vorkommen, wie sie in y enthalten waren. Daher enthält auch der im vorigen §. für y' angegebene allgemeine Ausdruck das Glied A ebenso, wie der für die Function y angenommene Ausdruck.

2) Statt aller in der Function y vorkommenden von z abhängigen Glieder muß die Aenderungsfunction y' Glieder enthalten, die von z und Δz zugleich abhängen. Weil nehm,



nehmlich y' aus der Function y erhalten wird, wenn man in den veränderlichen Gliedern derselben z in $z + \Delta z$ übergehen läßt; so muß aus einem jeden Gliede derselben für die Function y' ein Glied erzeugt werden, welches eine Function von z und Δz zugleich ist. Der im vorigen §. für y' angegebene allgemeine Ausdruck enthält auch ebenso viele horizontalfortlaufende Reihen, von denen eine jede aus einem veränderlichen Gliede der Function y entsprungen ist, als wie viel die Function y veränderliche Glieder hat, und diese Reihen können als die der Function y' zugehörigen veränderlichen Glieder, die von z und Δz zugleich abhängen, angesehen werden.

3) Eine jede einer Function y von z zugehörige Aenderungsfunction y' läßt sich, da jede Functiou y von z in der Form $A + B z^b + C z^c + \ldots$ dargestellt werden kann, durch einen Ausdruck darstellen, der die Eigenschaften des im vorigen §. angegebenen Ausdruckes hat, welche folgende sind:

a) Es enthält der Ausdruck so viele in horizontalen Reihen fortlaufende und von z und Δz zugleich abhängige Ausdrücke, als der Function y veränderliche Glieder zugehören. Diese Ausdrücke aber sind entwickelte Potenzen des Binomiums $z + \Delta z$, deren Glieder nach dem Binomialgesetze fortlaufen und mit dem Coefficienten desjenigen Gliedes der Function y, aus dem die Potenz von $z + \Delta z$ entsprungen ist, multiplicirt sind. Daher fangen auch die Ausdrücke mit demjenigen Gliede der Function y an, aus welchem sie entsprungen sind, und laufen ohne Ende fort, wenn der Potenzenexponent von z in dem genannten Gliede der Function y keine **bejahte ganze** Zahl ist, sie enthalten aber, wenn der genannte Potenzenexponent wirklich eine **bejahte ganze** Zahl ist, eine **endlich** große Anzahl von Gliedern, und mithin ein Glied mehr, als dieser Exponent Einheiten hat. —

b) In dem Ausdrucke sind ferner alle Glieder der horizontalfortlaufenden Ausdrücke so unter einander geordnet, daß die erste Vertikalreihe alle der Function y zugehörigen Glieder in sich begreift und daher $= y$ gesetzt werden kann, daß ferner eine jede von den folgenden Vertikalreihen eine Function von z bildet, deren Glieder nach einem leicht einzusehenden Gesetze formirt und mit einer Potenz von Δz multiplicirt sind.

c) Durch diese Anordnung der Glieder hat der Ausdruck eine Form, vermöge welcher man sich denselben sehr kurz und dennoch ganz bestimmt und deutlich vorstellen kann. Man kann nehmlich die zweyte in Δz multiplicirte Vertikalreihe durch α, die dritte in Δz^2 multiplicirte Vertikalreihe durch β, und so der Ordnung nach die folgenden

genden Vertikalreihen durch γ, δ, ε ... bezeichnen und sich also ganz kurz vorstellen, es sey die Aenderungsfunction

$$y' = y + \alpha \Delta z + \beta \Delta z^2 + \gamma \Delta z^3 + \varepsilon \Delta z^4 + \ldots$$

Von diesem Ausdrucke weis man dann, daß die Anzahl der Glieder unendlich groß seyn muß, so bald nicht in den Gliedern der Function y alle Exponenten von z **bejahte ganze** Zahlen sind, daß hingegen der Ausdruck, wenn die genannten Exponenten wirklich alle **bejahte ganze** Zahlen sind, **endlichviele** Glieder, und zwar ein Glied mehr haben muß, als der höchste von den genannten Exponenten Einheiten enthält (Nro. a). Ferner weis man, daß die Coefficienten α, β, γ ... Functionen von z sind, welche **endlichviele** Glieder enthalten, wenn die Function y nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält, **unendlichviele** aber, wenn bey den Gliedern der Function y der entgegengesetzte Fall Statt findet.

§. 176.

"Es soll ein für eine jede Function y von z gültiger Ausdruck gesucht werden, welcher die der Function y zugehörige Differenz Δy entwickelt darstellt."

Wir haben einen allgemeinen Ausdruck für eine jede Function y von z in §. 174. zum Grund gelegt, und daraus einen allgemeinen Ausdruck abgeleitet, welcher die einer jeden Function y von z zugehörige Aenderungsfunction y' entwickelt darstellt. Da nun die Differenz einer Function y von z d. h. $\Delta y = y' - y$ ist (§. 172.), so darf man nur von dem in §. 174. für y' angegebenen allgemeinen Ausdrucke den Ausdruck für die Function y abziehen, d. h. aber, man darf nur in jenem Ausdrucke die erste Vertikalreihe weglassen (§. 175. Nro. 3. b), und man erhält hierdurch einen allgemeinen Ausdruck, welcher die Differenz Δy einer jeden Function y von z entwickelt darstellt. Es ist demnach

$$\Delta y = \left\{\begin{array}{l} \frac{b}{1}.Bz^{b-1} \\ + \frac{c}{1}.Cz^{c-1} \\ + \frac{d}{1}.Dz^{d-1} \\ \vdots \end{array}\right\}\Delta z + \left\{\begin{array}{l} \frac{b(b-1)}{1.2}.Bz^{b-2} \\ + \frac{c(c-1)}{1.2}.Cz^{c-2} \\ + \frac{d(d-1)}{1.2}.Dz^{d-2} \\ \vdots \end{array}\right\}\Delta z^2 + \left\{\begin{array}{l} \frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3}.Bz^{b-3} \\ + \frac{c(c-1)(c-2)}{1.2.3}.Cz^{c-3} \\ + \frac{d(d-1)(d-2)}{1.2.3}.Dz^{d-3} \\ \vdots \end{array}\right\}\Delta z^3 + \ldots$$

§. 177.

§. 177.

"Jetzt sollen auch die einer jeden Differenz Δy zukommenden allgemeinen Eigenschaf-"ten, so wie sich dieselben theils unmittelbar aus der Art, wie eine solche Differenz ge-"funden wird, theils mittelbar aus dem für sie angegebenen allgemeinen Ausdrucke erge-"ben, angegeben werden."

1) Eine jede einer Function y von z zugehörige Differenz Δy ist ganz allein von den veränderlichen Gliedern der Function y abhängig und die constanten Glieder derselben können auf die Differenz gar keinen Einfluß haben. Es enthält nehmlich die Aenderungsfunction y' die constanten Glieder der Function y ebenso, wie sie in y selbst vorhanden waren (§. 175. Nro. 1); wenn man also von der Aenderungsfunction y' die Function y abzieht, so heben sich alle constanten Glieder in der Differenz $y' - y = \Delta y$ gegen einander auf.

Darum kann eine und dieselbe Differenz Δz zu sehr vielen Functionen y von z gehören, die zwar einerley veränderliche Glieder haben müssen, in Rücksicht der constanten Glieder aber so sehr, als man will, von einander verschieden seyn können. Wenn also die Rede davon ist, daß eine gewisse Differenz Δz einer Function y zugehöre; so ist eigentlich unter dem Ausdrucke: **Function**, die Summe der veränderlichen Glieder der Function y, welche man den **veränderlichen Theil** der Function nennen kann, zu verstehen.

2) Eine jede einer Function y von z zugehörige Differenz Δy läßt sich, da sich eine jede Function y von z in der Form $A + Bz^b + Cz^c + \ldots$ darstellen läßt, durch einen Ausdruck darstellen, welcher die Form des Ausdruckes in §. 176. hat, und der kurz so ausgedrückt werden kann:

$$\alpha \Delta z + \beta \Delta z^2 + \gamma \Delta z^3 + \delta \Delta z^4 + \ldots$$

Von diesem Ausdrucke aber gilt alles das, was §. 175. Nro. 3. c), wo er noch das Glied y bey sich hatte, bemerkt worden ist.

3) Eine jede Differenz Δy einer Function y von z muß demnach eine Function von z und Δz zugleich seyn, und nur in dem einzigen Falle, wenn alle Potenzenexponenten b, c, $d \ldots$ in einer in der Form $A + Bz^b + Cz^c + \ldots$ dargestellten Function y den Werth $= 1$ haben, wo dann $\beta = 0$, $\gamma = 0$ rc. α aber eine von z unabhängige Größe $B + C + D \ldots$ wird, ist sie eine Function von Δz allein.

4) Eine jede einer Function y von z zugehörige Differenz Δy läßt sich durch den ganz kurzen Ausdruck $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ darstellen, worin der Coefficient α eine Größe bedeutet, die von Δz ganz unabhängig und entweder constant oder eine Function von z ist, ψ aber entweder den Werth $= 0$ haben, oder eine constante Größe, oder eine Function von z und Δz seyn kann.

Drückt man nehmlich die Gleichung: $\Delta y = \alpha.\Delta z + \beta.\Delta z^2 + \gamma.\Delta z^3 + \delta.\Delta z^4 + \ldots$ so aus:

$$\Delta y = \alpha.\Delta z + (\beta + \gamma.\Delta z + \delta.\Delta z^2 + \varepsilon.\Delta z^3 + \ldots)\Delta z^2,$$

und bezeichnet nun den Factor $\beta + \gamma.\Delta z + \delta.\Delta z^2 + \varepsilon.\Delta z^3 + \ldots$ durch ψ; so erhält man:

$$\Delta y = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2.$$

Wenn nun nicht alle Potenzenexponenten b, c, d ... in der Function $y = A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ **ganze bejahte** Zahlen sind, so erhält der Ausdruck $\alpha.\Delta z + \beta.\Delta z^2 + \gamma.\Delta z^3 + \ldots$ **unendlich** viele Glieder (§. 175. Nro. 3. c), und α ist dann gewiß eine Function von z, ψ aber eine Function von z und Δz zugleich. Sind hingegen alle Potenzenexponenten b, c, d ... in der Function y **ganze bejahte** Zahlen, so ist die Anzahl der dem Ausdrucke $\alpha.\Delta z + \beta.\Delta z^2 + \gamma.\Delta z^3 + \ldots$ zugehörigen Glieder **endlich** groß, und zwar muß dieselbe nach §. 175. Nro. 3. c), weil jetzt dem Ausdrucke das Glied y fehlt, so groß seyn, als die Anzahl der Einheiten, die der größte unter den Potenzenexponenten b, c, d ... in sich begreift. Ist demnach der größte dieser Exponenten $= 1$, so ist $\Delta y = \alpha.\Delta z$, und dann muß $\alpha = B + C + D + \ldots$, also eine constante Größe, und $\psi = 0$ seyn: ist ferner der größte dieser Exponenten $= 2$, so ist $\Delta y = \alpha.\Delta z + \beta.\Delta z^2$ und α muß dann eine Function von z, ψ aber ist eine constante Größe $= \beta = B + C + D + \ldots$ seyn: ist endlich der höchste der erwähnten Exponenten $= 3$, so ist $\Delta y = \alpha.\Delta z + \beta.\Delta z^2 + \gamma.\Delta z^3$, α ist wiederum eine Function von z, ψ aber ist $= \beta + \gamma.\Delta z$ und also, weil jetzt β eine Function von z seyn muß, eine Function von z und Δz zugleich. Ebenso muß nun auch für alle folgenden ganzen bejahten Werthe des höchsten von den Exponenten b, c, d, ... die Größe α eine Function von z und die Größe ψ eine Function von z und Δz zugleich seyn.

§. 178.

Wir haben jetzt von den allgemeinen Eigenschaften der Differenz Δy diejenigen deutlich angegeben, welche in der Art, wie diese Differenzen aus den Functionen entspringen, und in dem Umstande, daß sich die algebraischen Ausdrücke aller Functionen y von z in der Form $A + Bz^b + Cz^c + \ldots$ darstellen lassen müssen, ihren Grund haben. Nun sollen

sollen auch diejenigen Eigenschaften der Differenzen Δy untersucht werden, die sich ergeben, wenn man die verschiedenen möglichen Arten der algebraischen Ausdrücke, welche Functionen y von z bezeichnen können, vornimmt, für eine jede Art insbesondere einen allgemeinen Ausdruck sucht, welcher die Differenzen Δy darstellt, und die so erhaltenen verschiedenen Differenzenausdrücke gehörig betrachtet und unter einander vergleicht. Damit aber die Differenzenausdrücke den gehörigen Grad der Deutlichkeit erhalten mögen, so wollen wir, ehe wir mit der Aufsuchung derselben den Anfang machen, eine neue Bezeichnung für den in dem allgemeinen Ausdrucke $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ bey Δz stehenden Coefficienten α einführen.

§. 179.

"Wenn die einer Function y von z zugehörige Differenz Δy in der Form $\alpha \Delta z$ "$+ \psi.\Delta z^2$ dargestellt wird, so soll der bey Δz stehende Coefficient α der **Differenzen**"**coefficient** genannt und dadurch bezeichnet werden, daß man dem Zeichen der Function "den Buchstaben d vorsetzt."

Es bedeutet demnach von nun an dy den einer Function y von z zugehörigen Differenzencoefficienten, also diejenige Größe α, die mit Δz multiplicirt ist, wenn man die der Function y zugehörige Differenz Δy aufsucht und in der Form $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ darstellt. Für die Function $y = az^2 + bz + c$ z. E. ist der ihr zugehörige Differenzencoefficient dy oder $d(az^2 + bz + c) = 2az + b$, denn die dieser Function y zugehörige Differenz Δy ist nach §. 172. $= 2az\Delta z + a\Delta z^2 + b\Delta z$, und diese giebt, wenn man sie in der Form $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ darstellt, den Ausdruck $(2az + b)\Delta z + a.\Delta z^2$.

Diese Bezeichnung des Coefficienten α hat bey den folgenden Rechnungen ihren Nutzen. Kommen z. E, welches in den folgenden Rechnungen öfters der Fall ist, in einer Rechnung zugleich die Differenzen ΔU, ΔV, ΔZ mehrerer Functionen U, V, Z von z vor, und man setzt $\Delta U = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$, $\Delta V = \alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2$, $\Delta Z = \alpha''.\Delta z + \psi''.\Delta z^2$; so weis man zwar, wenn in dem Rechnungsresultate die Größen α, α', α'' mit andern Größen in Verbindung vorkommen, daß $\alpha, \alpha', \alpha''$ Differenzencoefficienten bedeuten, man sieht es ihnen aber bey dieser Bezeichnungsart nicht an, zu welchen von den Functionen U, V, Z ein jeder gehört, welches unbequem ist. Diese Unbequemlichkeit aber fällt weg, wenn man α' durch dU, α durch dV, α'' durch dZ bezeichnet. —

§. 180.

"Es sey I) $y = Az^n$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = AZ^n$ "und Z bedeute eine Function von z: es sollen Ausdrücke für die diesen Functionen zuge"hörigen Differenzen Δy gesucht werden."

I) Wenn

I) Wenn $y = Az^n$ und z absolut veränderlich ist.

1) Für eine jede Function $y = A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \dots$ ist die Differenz Δy in §. 176. entwickelt dargestellt. Hiernach muß für eine Function $y = A + Bz^b$, bey welcher $C = 0$, $D = 0$ rc. ist, die Differenz

$$\Delta y = b.Bz^{b-1}.\Delta z + \frac{b(b-1)}{1.2}Bz^{b-2}.\Delta z^2 + \frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3}Bz^{b-3}\Delta z^3 + \dots$$

seyn. Eben diese Differenz Δy aber muß auch einer Function $y = Bz^b$, in welcher das constante Glied $A = 0$ ist, zugehören (§. 177. Nro. 1). Daraus erhellt, daß die der Function $y = Az^n$ zugehörige Differenz

$$\Delta y = nAz^{n-1}.\Delta z + \frac{n(n-1)}{1.2}Az^{n-2}.\Delta z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}Az^{n-3}.\Delta z^3 + \dots$$

seyn muß, worin die Anzahl der Glieder **endlich** groß ist, wenn n eine **ganze** bejahte Zahl bedeutet, **unendlich** groß aber, wenn das Gegentheil Statt findet.

2) Damit man diesen Ausdruck kürzer und in der Form $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ dargestellt erhalte, so trenne man von dem zweyten Gliede den Factor Δz^2 und bezeichne die Summe der bey dieser Trennung bleibenden Glieder durch φ, dann wird die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(Az^n) = nAz^{n-1}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = AZ^n$ und Z eine Function von z ist.

1) Wenn man annimmt, es sey Z absolut veränderlich, so muß nach Nro. 1)

$$\Delta y = nAZ^{n-1}.\Delta z + \frac{n(n-1)}{1.2}.AZ^{n-2}.\Delta Z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.AZ^{n-3}.\Delta Z^3 + \dots$$

seyn. Da aber Z eine Function von z seyn soll, so muß nach §. 177. Nro. 4) die Differenz $\Delta Z = \alpha\Delta z + \psi.\Delta z^2$ seyn, wo dann $\alpha = dZ$ ist (§. 179.). Setzt man also in dem vorigen Ausdrucke für Δy den Ausdruck $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ statt ΔZ, so wird

$$\Delta y = nAZ^{n-1}(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + \frac{n(n-1)}{1.2}AZ^{n-2}(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}AZ^{n-3}.(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^3,$$

und hieraus folgt ferner, wenn man die Potenzen von $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ entwickelt und alles nach Potenzen von Δz ordnet, der Ausdruck:

nA

$$\Delta y = \left\{ \begin{array}{l} n A Z^{n-1}.\alpha \Delta z + \left. \begin{array}{l} n A Z^{n-1}.\psi \\ + \frac{n(n-1)}{1.2} A Z^{n-2}.\alpha^2 \end{array} \right\} \Delta z^2 + \left. \begin{array}{l} n(n-1).A Z^{n-2}.\alpha\psi \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} A Z^{n-3}.\alpha^3 \\ + \ldots \end{array} \right\} \Delta z^3 + \ldots \end{array} \right.$$

2) Jetzt trenne man von dem zweyten Gliede an von allen Gliedern den Factor Δz^2 und nenne die Summe der bey dieser Trennung bleibenden Glieder φ, den Coefficienten α aber bezeichne man durch dZ, dann erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta (A Z^n) = n A Z^{n-1}.dZ.\Delta z + \varphi \Delta z^2.$$

§. 181.

"Es sey I) $y = Uz$ und der Factor U eine beliebige Function von z, der andere "Factor z aber absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = UV$, wo die beyden Factoren "U und V Functionen von z bedeuten sollen: man soll die Differenzen Δy dieser Fun"ctionen ausdrücken."

I) Wenn $y = Uz$ und also nur der Factor z absolut veränderlich, der Factor U aber eine Function von z ist.

1) Man lasse in dieser Function z in $z + \Delta z$ übergehen, dann verwandele sich der Factor z in $z + \Delta z$, der Factor U aber in die Aenderungsfunction U', für welche man, weil $U' - U = \Delta U$ ist, $U + \Delta U$ setzen kann. Es wird demnach aus der Function $y = Uz$ die Aenderungsfunction

$$y' = (U + \Delta U)(z + \Delta z) = Uz + z.\Delta U + U.\Delta z + \Delta U.\Delta z,$$

und daraus folgt ferner, wenn man die Function $y = U.z$ abzieht, die Differenz

$$\Delta y = z.\Delta U + U.\Delta z + \Delta U.\Delta z.$$

Nun muß aber, weil U eine Function von z seyn soll, die ihr zugehörige Differenz ΔU ganz gewiß $= \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ seyn, wo dann $\alpha = dU$ gesetzt werden kann (§. 179). Setzt man daher diesen Ausdruck statt ΔU in die vorige Gleichung für Δy, so wird:

$$\Delta y = z(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + U.\Delta z + (\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)\Delta z,$$

woraus, wenn alles aufgelöst und nach Potenzen von Δz geordnet wird,

$$\Delta y = (U + z\alpha)\,\Delta z + (z\psi + \alpha)\,\Delta z^2 + \psi.\Delta z^3 \text{ folgt.}$$

3) Trennt man von allen dem ersten Gliede nachfolgenden Gliedern den Factor Δz^2, nennt die Summe der hierbey bleibenden Glieder φ, und bezeichnet α durch dU; so wird

$$\Delta y = (U + z.dU)\,\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = UV$ ist, und beyde Factoren U und V Functionen von z sind.

1) Läßt man hier z in $z + \Delta z$ übergehen, so verwandelt sich der Factor U in $U' = U + \Delta U$, und eben so wird aus dem Factor V die Aenderungsfunction $V' = V + \Delta V$. Es wird also aus der Function $y = UV$ die Aenderungsfunction
$y' = U'.V' = (U + \Delta U)(V + \Delta V) = UV + U.\Delta V + V.\Delta U + \Delta U.\Delta V$, woraus nun, wenn man die Function $y = UV$ abzieht, die Differenz

$$\Delta y = U.\Delta V + V.\Delta U + \Delta U.\Delta V \text{ folgt.}$$

2) Weil aber U und V Functionen von z seyn sollen, so kann man

$$\Delta U = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2 \text{ und } \Delta V = \alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2$$

setzen, wo alsdann $\alpha = dU$, und $\alpha' = dV$ ist (§. 179.). Thut man dieses, so wird
$\Delta y = U(\alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2) + V(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + (\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)(\alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2)$, wofür, wenn man alle Glieder durch die Multiplication auflöst und die einzelnen Producte nach den Potenzen von Δz ordnet, gesetzt werden kann:

$$\Delta y = \left\{\begin{array}{l|l|l|l} U\alpha' & \Delta z + U\psi' & \Delta z^2 + \alpha\psi' & \Delta z^3 + \psi.\psi'.\Delta z^4. \\ + V\alpha & \quad + V\psi & \quad + \alpha'\psi & \\ & \quad + \alpha\alpha' & & \end{array}\right.$$

3) Man trenne hierin von allen Gliedern, welche dem ersten mit Δz multiplicirten Gliede nachfolgen, den Factor Δz^2, bezeichne die Summe der hierbey bleibenden Glieder durch φ und die Größen α und α' durch dU und dV, dann wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(UV) = (U.dV + V.dU).\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

§. 182.

"Es sey I) $y = UV.z$ und die beyden Factoren U und V seyen Functionen von "z, der dritte Factor z aber sey die absolut veränderliche Größe selbst; dann sey auch II)
"y =

"$y = UVZ$ und es seyen die Factoren U, V, Z Functionen von z: es sollen Aus-"drücke für die diesen Functionen y zugehörigen Differenzen Δy gesucht werden."

I) Wenn $y = UVz$ ist und nur die Factoren U und V Functionen von z sind, der dritte Factor z aber absolut veränderlich ist.

1) Wenn man das Product UV schlechthin als eine Function von z ansieht und durch W bezeichnet, so wird $y = Wz$. Hierfür muß nun nach §. 181. Nro. I. 3) seyn:

$$\Delta y = (W + z.dW)\,\Delta z + \varphi'.\Delta z^2.$$

2) Es soll aber $W = UV$ seyn, man muß also statt dW, dUV setzen. Weil nun nach §. 181. Nro. II. 3)

$$\Delta(UV) = (U.dV + V.dU)\,\Delta z + \varphi.\Delta z^2$$

seyn muß, so ist $dW = U.dV + V.dU$ (§. 179.). Setzt man diesen Ausdruck statt dW in den vorigen für Δy angegebenen Ausdruck, so wird

$$\Delta y = \big(W + z(U.dV + V.dU)\big)\,\Delta z + \varphi'.\Delta z^2,$$

oder, wenn statt φ' wiederum schlechthin φ und statt W das Product UV gesetzt wird:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(UVz) = (UV + zU.dV + zV.dU)\,\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = UVZ$ ist und alle drey Factoren Functionen von z sind.

1) Wenn man wiederum das Product UV schlechthin als eine Function von z ansieht und durch W bezeichnet, so wird $y = WZ$. Hierfür aber muß nach §. 181. Nro. II. 3) die Differenz

$$\Delta y = (W.dZ + Z.dW)\,\Delta z + \varphi'.\Delta z^2 \text{ seyn.}$$

2) Nun ist aber $W = UV$ und also $dW = d(UV)$; nimmt man demnach aus der Differenz $\Delta(UV) = (U.dV + V.dU)\,\Delta z + \varphi.\Delta z^2$ in §. 181. Nro. II. 3) den Werth von $d(UV) = U.dV + V.dU$ (§. 179.), und setzt denselben in den vorigen für Δy angegebenen Ausdruck; so erhält man:

$$\Delta y = \big(W.dZ + Z(U.dV + V.dU)\big)\,\Delta z + \varphi'.\Delta z^2.$$

In diesem Ausdrucke setze man nun statt φ' wiederum schlechthin φ, und statt W dessen Werth $= UV$, dann wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(UVZ) = (UV.dZ + UZ.dV + VZ.dU)\,\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

(*) Nun wird es leicht seyn, für eine Function y von z, welche ein Product aus mehr als drey veränderlichen Factoren ist, die Differenzen Δy zu suchen.

§. 183.

§. 183.

„Es sey $y = \frac{Z}{N}$ eine gebrochene Function von z, in welcher der Zähler Z eben so „wohl, als der Nenner veränderlich ist; und zwar sey I) $y = \frac{z}{N}$, also blos der Nen„ner N eine Function von z, der Zähler Z aber die absolut veränderliche Größe z selbst; „dann sey auch II) $y = \frac{Z}{z}$, und blos der Zähler Z eine Function von z, der „Nenner N aber z selbst; endlich sey auch III) $y = \frac{Z}{N}$, worin sowohl Z als N Functio„nen von z sind: es sollen die diesen Functionen y zugehörigen Differenzen ausgedrückt „werden."

I) Wenn $y = \frac{z}{N}$ und also blos der Nenner einer Function von z, der Zähler aber z selbst ist.

1) Läßt man in dieser Function z in $z + \Delta z$ übergehen, so verwandelt sich der Zähler z in $z + \Delta z$, der Nenner N in $N' = N + \Delta N$, und es wird also aus der Function $y = \frac{z}{N}$ die Aenderungsfunction

$$y' = \frac{z + \Delta z}{N + \Delta N}.$$

Hieraus aber folgt, wenn man die Function $y = \frac{z}{N}$ abzieht, die Differenz

$$\Delta y = \frac{z + \Delta z}{N + \Delta N} - \frac{z}{N} = \frac{Nz + N.\Delta z - Nz - z\,\Delta N}{N^2 + N.\Delta N}$$

$$= \frac{N.\Delta z - z.\Delta N}{N^2 + N.\Delta N}.$$

2) Da nun N eine Function von z seyn soll, so muß $\Delta N = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ seyn, wo $\alpha = dN$ ist (§. 179.), und es wird demnach, wenn man diesen Werth von ΔN in der Gleichung für Δy gebraucht,

$$\Delta y = \frac{N.\Delta z - z(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)}{N^2 + N(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)},$$

wofür man auch, wenn man dividirt, setzen kann:

$$\Delta y = \frac{(N - z\alpha)}{N^2}.\Delta z + \frac{(z\alpha - N)(\alpha + \psi.\Delta z) - zN\psi}{N^3 + N^2(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)}.\Delta z^2.$$

3) Man

3) Man bezeichne die Größe α durch dN und die mit Δz^2 multiplicirte Größe durch ϕ, dann hat man kurz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\frac{z}{N}\right) = \frac{N - z.dN}{N^2}.\Delta z + \phi.\Delta z^2$$

II) Wenn $y = \frac{Z}{z}$ und also blos der Zähler Z eine Function von z, der Nenner aber die absolut veränderliche Größe z selbst ist.

1) Läßt man in dieser Function z in $z + \Delta z$ übergehen, so verwandelt sich der Zähler Z in $Z' = Z + \Delta Z$, der Nenner aber wird $= z + \Delta z$; man erhält demnach aus y die Aenderungsfunction

$$y' = \frac{Z + \Delta Z}{z + \Delta z}.$$

Wird aber hiervon die Function $y = \frac{Z}{z}$ abgezogen, so ergiebt sich die Differenz

$$\Delta y = \frac{Z + \Delta Z}{z + \Delta z} - \frac{Z}{z} = \frac{Zz + z.\Delta Z - Zz - Z.\Delta z}{z^2 + z.\Delta z} = \frac{z.\Delta Z - Z.\Delta z}{z^2 + z.\Delta z}.$$

2) Weil aber Z eine Function von z ist, so muß $\Delta Z = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ seyn, wo $\alpha = dZ$ ist (§. 179.), und es wird also, wenn man diesen Ausdruck statt Δz in dem vorigen Ausdrucke für Δy gebraucht,

$$\Delta y = \frac{z(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) - Z.\Delta z}{z^2 + z.\Delta z},$$

welches, wenn man den Nenner in den Zähler $(z\alpha - Z)\Delta z + \psi.\Delta z^2$ dividirt,

$$\Delta y = \frac{z\alpha - Z}{z^2}.\Delta z + \frac{z^2\psi + Z - z\alpha}{z^2 + z.\Delta z}.\Delta z^2$$

giebt. Bezeichnet man jetzt den in Δz^2 multiplicirten Factor durch ϕ und die Größe α durch dZ, so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{z dZ - Z}{z^2}.\Delta z + \phi.\Delta z^2.$$

III) Wenn $y = \frac{Z}{N}$ und nicht nur der Zähler, sondern auch der Nenner eine Function von z ist.

1) läßt man in dieser Function die absolut veränderliche Größe z in $z + \Delta z$ übergehen, so verwandelt sich der Zähler Z in $Z' = Z + \Delta Z$, und der Nenner N in $N' = N + \Delta N$, folglich die Function y in die Aenderungsfunction

$$y' = \frac{Z + \Delta Z}{N + \Delta N}.$$

Hieraus ergiebt sich nun, wenn man die Function $y = \frac{Z}{N}$ subtrahirt, die Differenz

$$\Delta y = \frac{Z + \Delta Z}{N + \Delta N} - \frac{Z}{N}$$

$$= \frac{NZ + N.\Delta Z - NZ - Z.\Delta N}{N^2 + N.\Delta N} = \frac{N.\Delta Z - Z.\Delta N}{N^2 + N.\Delta N}.$$

Weil aber Z und N Functionen von z seyn sollen, so läßt sich $\Delta Z = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ und $\Delta N = \alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2$ setzen, wo dann $\alpha = dZ$, $\alpha' = dN$ ist (§. 179.). Setzt man diese Ausdrücke statt ΔZ und ΔN in die für Δy angegebene Gleichung, so erhält man:

$$\Delta y = \frac{N(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) - Z(\alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2)}{N^2 + N(\alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2)}$$

$$= \frac{(N\alpha - Z\alpha')\Delta z + (N\psi - Z\psi')\Delta z^2}{N^2 + N(\alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2)},$$

oder auch, wenn man wirklich dividirt und aus dem bey der Division gebliebenen Reste den Quotienten gehörig formirt,

$$\Delta y = \frac{N\alpha - Z\alpha'}{N^2}.\Delta z + \frac{N(N\psi - Z\psi') - (N\alpha - Z\alpha')(\alpha' + \psi'.\Delta z)}{N^3 + N^2(\alpha'.\Delta z + \psi'.\Delta z^2)}\Delta z^2.$$

2) Bezeichnet man nun den mit Δz^2 multiplicirten Factor durch φ die Größen α und α' aber durch dZ und dN; so wird:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{N.dZ - Z.dN}{N^2}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

§. 184.

Es sey $\frac{C}{N}$ eine gebrochene Function von z, in welcher der Zähler C eine constante Größe ist; und zwar sey I) $y = \frac{C}{z}$ und also der Nenner N die absolut veränderliche

Größe

Größe selbst; dann sey auch II) $y = \frac{C}{N}$ und N sey eine Function von z: es sollen die Differenzen Δy dieser Functionen ausgedrückt werden.

I) Wenn $y = \frac{C}{z}$ und also der Nenner N absolut veränderlich ist.

1) Wenn man z in $z + \Delta z$ verwandelt, so entsteht die Aenderungsfunction

$$y' = \frac{C}{z + \Delta z},$$

woraus durch die Subtraction der Function $y = \frac{C}{z}$ die Differenz

$$\Delta y = \frac{C}{z + \Delta z} - \frac{C}{z} = \frac{Cz - Cz - C\Delta z}{z^2 + z.\Delta z} = \frac{-C\Delta z}{z^2 + z.\Delta z}$$

erhalten wird. Dividirt man hier, so wird

$$\Delta y = -\frac{C}{z^2}.\Delta z + \frac{C}{z}\Delta z^2.$$

2) Man setze $\frac{C}{z} = \varphi$, dann hat man

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\frac{C}{z}\right) = -\frac{C}{z^2}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = \frac{C}{N}$ und N eine Function von z ist.

1) Wenn man setzt, es sey N absolut veränderlich, so muß nach Nro. I)

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C}{N^2}.\Delta N + \varphi'.\Delta N^2 \text{ seyn.}$$

Da aber N eine Function von z seyn soll, so muß $\Delta N = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ seyn, wo dann $\alpha = dN$ ist. Gebraucht man nun diesen Ausdruck statt ΔN in den vorigen Gleichungen, so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C}{N^2}.(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + \varphi'(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2$$

$$= -\frac{C}{N^2}.\alpha.\Delta z + \left(\varphi'(\alpha + \psi.\Delta z)^2 - \frac{C.\psi}{N^2}\right)\Delta z^2.$$

2) Setzt man hier die in Δz^2 multiplicirte Größe $= \varphi$ und bezeichnet α durch dN, so erhält man:

$$\Delta y = \Delta\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C\,dN}{N^2}\cdot\Delta z + \varphi\cdot\Delta z^2.$$

§. 185.

"Es sey I) $y = a^{\mathfrak{z}}$, also eine Exponentialgröße, und hierin $\mathfrak{z}$ absolut veränder-"lich; ferner sey auch II) $y = a^z$ und z bedeute eine beliebige Function von $\mathfrak{z}$; es sollen "die Ausdrücke für die diesen Functionen zugehörigen Differenzen Δy gesucht werden."

I) Wenn $y = a^{\mathfrak{z}}$ und $\mathfrak{z}$ absolut veränderlich ist.

1) Läßt man hier $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{z} + \Delta\mathfrak{z}$ übergehen, so wird die Aenderungsfunction $y' = a^{\mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z}}$, woraus dann, wenn man $y = a^{\mathfrak{z}}$ subtrahirt, die Differenz

$$\Delta y = a^{\mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z}} - a^{\mathfrak{z}} = a^{\mathfrak{z}}.a^{\Delta\mathfrak{z}} - a^{\mathfrak{z}} = (a^{\Delta\mathfrak{z}} - 1)\,a^{\mathfrak{z}}$$

folgt. Diesen für Δy hier angegebenen Ausdruck nun kann man leicht auf die Form $\alpha.\Delta\mathfrak{z} + \psi.\Delta\mathfrak{z}^2$ reduciren. Nach §. 141. Nro. 2) nehmlich muß, wenn man in der dortigen Gleichung überall $\Delta\mathfrak{z}$ statt $\mathfrak{z}$ setzt

$$a^{\Delta\mathfrak{z}} = 1 + (\text{log. nat. } a)\,\Delta\mathfrak{z} + \frac{(\text{log. nat. } a)^2}{2}.\Delta\mathfrak{z}^2 + \frac{(\text{log. nat. } a)^3}{2\cdot 3}.\Delta\mathfrak{z}^3 + \ldots$$

seyn, und man kann daher die Differenz

$$\Delta y = (a^{\Delta\mathfrak{z}} - 1)\,a^{\mathfrak{z}} = \Big[(\text{log. nat. } a)\,\Delta\mathfrak{z} + \frac{(\text{log. nat. } a)^2}{2}\,\Delta\mathfrak{z}^2$$

$$+ \frac{(\text{log. nat. } a)^3}{2\cdot 3}.\Delta\mathfrak{z}^3 + \ldots\Big]\,a^{\mathfrak{z}}$$

$$= a^{\mathfrak{z}}.(\text{log. nat. } a)\,\Delta\mathfrak{z} + \left(\frac{a^{\mathfrak{z}}.(\text{log. nat. } a)^2}{2} + \frac{a^{\mathfrak{z}}.(\text{log. nat. } a)^3}{2\cdot 3}.\Delta\mathfrak{z} + \ldots\right)\Delta\mathfrak{z}^2 \text{ setzen.}$$

2) Nennt man die in $\Delta\mathfrak{z}^2$ multiplicirte Größe φ, so erhält man kurz:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(a^{\mathfrak{z}}) = a^{\mathfrak{z}}.(\text{log. nat. } a)\,\Delta\mathfrak{z} + \varphi.\Delta\mathfrak{z}^2.$$

II) Wenn $y = a^z$ und z eine Function von $\mathfrak{z}$ ist.

1) Nimmt man an, es sey z eine absolut veränderliche Größe, so muß nach Nro. I. 1) die Differenz

Δy

$$\Delta y = a^z.(\log.\,nat.\,a)\,\Delta z + \left(\frac{a^z(\log.\,nat.\,a)^2}{2} + \frac{a^z(\log.\,nat.\,a)^3}{2\,.\,3}.\Delta z + \ldots\right)\Delta z^2$$

seyn. Da aber z eine Function von x und also $\Delta z = \alpha.\Delta x + \psi.\Delta x^2$ seyn muß, wo $\alpha = dz$ ist (§. 179.); so verwandelt sich die vorige Gleichung, wenn man diesen Ausdruck von Δz substituirt, in folgende:

$$\Delta y = a^z.(\log.\,nat.\,a)(\alpha.\Delta x + \psi.\Delta x^2) + \left(\frac{a^z.(\log.\,nat.\,a)^2}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{a^z(\log.\,nat.\,a)^3}{2\,.\,3}.(\alpha.\Delta x + \psi.\Delta x^2) + \ldots\right)(\alpha.\Delta x + \psi.\Delta x^2)^2$$

$$= a^z.(\log.\,nat.\,a).\alpha.\Delta x + \left[a^z.(\log.\,nat.\,a).\psi + \left(\frac{a^z(\log.\,nat.\,a)^2}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a^z(\log.\,nat.\,a)^3}{2\,.\,3}.(\alpha.\Delta x + \psi.\Delta x^2) + \ldots\right)(\alpha + \psi.\Delta x)^2\right]\Delta x^2.$$

2) Es fällt in die Augen, daß man den Ausdruck, welcher dem ersten Gliede nachfolgt, durch $\varphi.\Delta x^2$ bezeichnen kann. Thut man dieses, und bezeichnet ferner die Größe α in dem ersten Gliede durch dz; so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(a^z) = a^z(\log.\,nat.\,z)\,dz.\Delta x + \varphi.\Delta x^2.$$

§. 186.

"Es sey I) $y = e^x$ und x absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = e^z$ und z "eine Function von x; in beyden Functionen aber sey e die Basis des natürlichen Logarithmensystems: es sollen auch für diesen Fall die Differenzen Δy ausgedrückt werden."

I) Wenn $y = e^x$ ist.

Für $a = e$ wird $\log.\,nat.\,a = \log.\,nat.\,e = 1$ (§. 131. Nro. 3.), es verwandelt sich hierfür die Größe φ in dem im vorigen §. Nro. I. 2) angegebenen Ausdrucke in eine andere Größe, die wir ebenfalls wieder durch φ bezeichnen wollen, und es wird also

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(e^x) = e^x.\Delta x + \varphi.\Delta x^2.$$

II) Wenn $y = e^z$ ist.

Eben so erhält man für $a = e$ aus der in Nro. II. 2) des vorigen §. erhaltenen Gleichung die Gleichung:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(e^z) = e^z.dz.\Delta x + \varphi.\Delta x^2.$$

§. 187.

"Es sey I) y = log. art. z und z eine absolut veränderliche Größe; dann sey auch "II) y = log. art. Z und Z irgend eine beliebige Function von z: es sollen die Ausdrü- "cke für die Differenzen Δy, welche diesen Functionen zugehören, angegeben werden."

I) Wenn y = log. art. z und z eine absolut veränderliche Größe ist.

1) Setzt man in der Function y = log. art. z statt z, z + Δz, so erhält man daraus die Aenderungsfunction y' = log. art. (z + Δz), und daraus folgt, wenn man die Function y = log. art. z subtrahirt, die ihr zugehörige Differenz

$$\Delta y = \text{log. art. } (z + \Delta z) - \text{log. art. } z.$$

Hierfür kann man nun nach §. 131. Nro. 8) setzen:

$$\Delta y = \text{log. art. } \left(\frac{z + \Delta z}{z}\right) = \text{log. art. } \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right).$$

Weil aber nach §. 132. Nro. 4), wenn man in der dortigen Formel statt z den Ausdruck $\frac{\Delta z}{z}$ und statt des Moduls B das deutlichere Zeichen M setzt, in jedem künstlichen Systeme, dessen Modul M heißt, der

$$\text{log. art. } \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right) = M\left(\frac{\Delta z}{z} - \frac{\Delta z^2}{2.z^2} + \frac{\Delta z^3}{3.z^3} - \frac{\Delta z^4}{4.z^4} + \ldots\right)$$

seyn muß; so kann man auch statt der vorigen für Δy angegebenen Gleichung diese setzen:

$$\Delta y = M.\frac{\Delta z}{z} + M\left(-\frac{\Delta z^2}{2.z^2} + \frac{\Delta z^3}{3.z^3} - \frac{\Delta z^4}{4.z^4} + \ldots\right) \quad (k)$$

2) Trennt man in dem zweyten Gliede des für Δy hier erhaltenen Ausdruckes den Factor Δz^2 und nennt den hierbey bleibenden Factor φ, so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\,(\text{log. art. } z) = M.\frac{1}{z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2$$

II) Wenn y = log. art. Z und Z eine Function von z ist.

1) Nimmt man an, es sey Z absolut veränderlich, und nennt den Modul des künstlichen Systems auch hier wiederum M; so muß nach Nro. I), (k) seyn:

$$\Delta y = M.\frac{\Delta Z}{Z} + M\left(-\frac{\Delta Z^2}{2.Z^2} + \frac{\Delta Z^3}{3.Z^3} - \frac{\Delta Z^4}{4.Z^4} + \ldots\right)$$

$$= \frac{M}{Z}.\Delta Z + M\left(-\frac{1}{2.Z^2} + \frac{\Delta Z}{3.Z^3} - \frac{\Delta Z^2}{4.Z^4} + \ldots\right).\Delta Z^2.$$

Nun

Nun soll aber Z eine Function von z seyn; man muß demnach $\Delta Z = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ setzen können, wo alsdann $\alpha = dZ$ seyn muß (§. 179.). Setzt man nun wirklich $\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ statt ΔZ in der vorigen Gleichung, so erhält man:

$$\Delta y = \frac{M}{Z}(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + M\left(-\frac{1}{2.Z^2} + \frac{\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2}{3.Z^3} - \frac{(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2}{4Z^4} + \ldots\right)(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2.$$

2) Man sieht leicht ein, daß, wenn man in dem zweyten Gliede des hier angegebenen Ausdruckes das mit M multiplicirte Product entwickelt, von einem jeden Gliede desselben der Factor Δz^2 getrennt werden kann, und daß sich also das ganze Glied, wenn man die nach geschehener Trennung des Factors Δz^2 bleibende Summe von Gliedern durch S bezeichnet, in der Form $MS.\Delta z^2$ darstellen läßt. Gebraucht man nun diesen Ausdruck statt des erwähnten zweyten Gliedes, so erhält man:

$$\Delta y = \frac{M}{Z}(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + MS.\Delta z^2$$

$$= M.\frac{1}{Z}\alpha.\Delta z + M\left(\frac{\psi}{Z} + S\right)\Delta z^2.$$

Setzt man ferner [illegible]$\left(\frac{\psi}{Z} + S\right) = \varphi$ und bezeichnet α durch dZ, so wird die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{log. art. } Z) = M.\frac{dZ}{Z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

§. 188.

"Es sey I) y = log. nat. z und z bedeute eine absolut veränderliche Größe, dann "sey auch II) y = log. nat. Z und Z eine Function von z; es sollen die Ausdrücke für "die Differenzen Δy dieser Function bestimmt werden."

I) Für y = log. art. z = M. log. nat. z ist nach §. 187. Nro. I.

$$\Delta y = \frac{M}{z}.\Delta z + M\left(-\frac{\Delta z^2}{2z^2} + \frac{\Delta z^3}{3z^3} - \frac{\Delta z^4}{4z^4} + \ldots\right),$$

daher muß nun, wenn man den Modul M = 1 setzt, die der Function y = log. nat. z zugehörige Differenz

Δy

$$\Delta y = \frac{1}{z}\Delta z + \left(-\frac{1}{2z^2} + \frac{\Delta z}{3z^3} - \frac{\Delta z^2}{4z^4} + \ldots\right)\Delta z^2 \text{ seyn.}$$

2) Setzt man den in die Potenz Δz^2 multiplicirten Factor $= \varphi$, so erhält man kürzer

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{log. nat. } z) = \frac{1}{z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Ferner ist für die Function $y = \text{log. art. } Z = M.\text{log. art. } Z.$ nach §. 187. Nro. II. 2) die Differenz

$$\Delta y = \frac{M}{Z}.\alpha.\Delta z + M\left(\frac{\psi}{Z} + S\right)\Delta z^2;$$

also muß, wenn man den Modul $M = 1$ setzt, die der Function $y = \text{log. nat. } Z$ zugehörige Differenz

$$\Delta y = \frac{\alpha}{Z}.\Delta z + \left(\frac{\psi}{Z} + S\right)\Delta z^2 \text{ seyn.}$$

2) Setzt man $\frac{\psi}{Z} + S = \varphi$, und $\alpha = dZ$, so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{log. nat. } Z) = \frac{dZ}{Z}\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

§. 189.

"Es sey I) $y = \text{log. art. (log. art. } z)$ und z eine absolut veränderliche Größe; "dann sey auch II) $y = \text{log. art. (log. art. } Z)$ und Z bedeute eine Function von z: es "sollen Ausdrücke für die Differenzen Δy dieser Functionen gesucht werden."

I) Wenn $y = \text{log. art. (log. art. } z)$ und z absolut veränderlich ist.

1) Man setze $\text{log. art. } z = Z$, dann ist $y = \text{log. art. } Z$ und also nach §. 187. Nro. II. 2)

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{log. art. } Z) = M.\frac{dZ}{Z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2$$

2) Nun ist aber $Z = \text{log art. } z$, und also, weil nach §. 187. Nro. I. 2) $\Delta(\text{log. art. } z) = M.\frac{1}{z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2$ war, der in Δz multiplicirte Coefficient $dZ = M.\frac{1}{z}$. Setzt man also in der vorigen Gleichung für Δy statt Z den Ausdruck log. art. z, und statt

dZ

dZ den Ausdruck $M.\frac{1}{Z}$; so verwandelt sich, wie man leicht einsehen kann, der Werth der Größe φ in einen anderen, der hier ebenfalls durch φ bezeichnet werden soll, und es wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\log.\text{ art. }(\log.\text{ art. } z)\right) = M^2.\frac{1}{z.\log.\text{ art. } z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = \log.$ art. ($\log.$ art. Z) und Z eine Function von z ist.

1) Man setze hier $\log.$ art. $Z = \mathfrak{Z}$, dann wird die Function $y = \log.$ art. $\mathfrak{Z}$ und es muß nach §. 187. Nro. II. 2), wenn man in jener Gleichung $\mathfrak{Z}$ statt Z gebraucht,

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\log.\text{ art. } \mathfrak{Z}) = M.\frac{d\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}}.\Delta z + \varphi'.\Delta z^2 \text{ seyn.}$$

2) Da nun $\mathfrak{Z} = \log.$ art. Z ist, und mithin nach §. 187. Nro. II. 2) die Differenz $\Delta\mathfrak{Z}$ oder $\Delta(\log.\text{ art. } Z) = M.\frac{dZ}{Z}\ \Delta z + \varphi.\Delta z^2$ und die Größe $d\mathfrak{Z} = \frac{M.dZ}{Z}$ seyn muß; so wird, wenn man in der vorigen für Δy angegebenen Gleichung diese Ausdrücke an die Stelle von $\mathfrak{Z}$ und $d\mathfrak{Z}$ setzt, aus der Größe φ' eine andere Größe, die φ heißen soll, und es verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\left(\log.\text{ art. }(\log.\text{ art. } Z)\right) = M^2.\frac{dZ}{Z.\log.\text{ art. } Z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

§. 190.

"Nun sey auch I) $y = \log.$ nat. ($\log.$ nat. z) und z absolut veränderlich sey; II) "sey $y = \log.$ nat. ($\log.$ nat. Z) und Z eine Function von z: es sollen die Ausdrücke "für die Differenzen Δy angegeben werden."

I) Wenn $y = \log.$ nat. ($\log.$ nat. z) und z absolut veränderlich ist.

Den Ausdruck für Δy erhält man hier aus Nro. I. 2) des vorigen §., wenn man den Modul $M = 1$ setzt; für diesen Werth von M wird

$$\Delta y = \Delta\left(\log.\text{ nat. }(\log.\text{ nat. } z)\right) = \frac{1}{z.\log.\text{ nat. } z}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = \log.$ nat. ($\log.$ nat. Z) und Z eine Function von z ist.

Aus Nro. II. 2) des vorigen §. folgt, wenn man $M = 1$ setzt,

$$\Delta y = (\text{log. nat. } (\text{log. nat. } Z)) = \frac{dZ}{Z.\text{log. nat. } Z} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

Es haben hier, wie sich von selbst versteht, die Größen φ andere Bedeutungen, als in den Formeln des vorigen §.

(*) Aus dem in den beyden vorigen §. §. beobachteten Verfahren läßt sich leicht das Verfahren abnehmen, welches man zu beobachten hat, wenn man für die Functionen $y = \text{log. } (\text{log. } (\text{log. } z))$ oder $\text{log. } (\text{log. } (\text{log } Z))$, $y = \text{log. } (\text{log. } (\text{log. } (\text{log. } z)))$ oder $\text{log. } (\text{log. } (\text{log. } (\text{log. } Z)))$ u. s. w., worin die Logarithmen künstliche oder natürliche seyn können, die Differenzen Δy ausdrücken will.

§. 191.

"Es sey I) $y = \text{Sin. } z$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = \text{Sin. } Z$ "und Z eine Function von z: es sollen Ausdrücke für die Differenzen Δy dieser Functio-"nen angegeben werden."

I) Wenn $y = \text{Sin. } z$ und z absolut veränderlich ist.

1) Läßt man in der Function $y = \text{Sin. } z$ die Größe z in $z + \Delta z$ übergehen, so erhält man die Aenderungsfunction $y' = \text{Sin. } (z + \Delta z)$, und daraus folgt dann, wenn man die Function $y = \text{Sin. } z$ abzieht, die Differenz

$$\Delta y = \text{Sin. } (z + \Delta z) - \text{Sin. } z.$$

2) Damit man aber diese Differenz entwickelt erhalte, so drücke man nach §. 143. Nro. 5) die Function $y = \text{Sin. } z$ durch den Kreisbogen z aus, wie hier folgt:

$$\text{Sin. } z = z - \frac{1}{1.2.3} . z^3 + \frac{1}{1.2...5} . z^5 - ... \mp \frac{1}{1.2...2n(2n+1)} . z^{2n+1}$$

$$\pm \frac{1}{1.2...(2n+2)(2n+3)} . z^{2n+3} \mp ...,$$

und lasse nun z in $z + \Delta z$ übergehen. Hierdurch erhält man dann die Aenderungsfunction

$$y' = \text{Sin. } (z + \Delta z)$$

$$= (z + \Delta z) - \frac{1}{1.2.3}.(z + \Delta z)^3 + \frac{1}{1.2\ldots5}.(z + \Delta z)^5 - \ldots$$

$$\mp \frac{1}{1.2\ldots2n(2n+1)}.(z + \Delta z)^{2n+1} \pm \frac{1}{1.2\ldots(2n+2)(2n+3)}.(z + \Delta z)^{2n+3} \mp \ldots$$

Entwickelt man hier die Potenzen von $z + \Delta z$, und setzt einstweilen bey dieser Entwickelung um der Bequemlichkeit willen den Coefficienten $\frac{1}{1.2.3} = B$, den Coefficienten $\frac{1}{1.2\ldots5} = C$ ꝛc. den Coefficienten $\frac{1}{1.2\ldots2n(2n+1)} = P$, den Coefficienten $\frac{1}{1.2\ldots(2n+2)(2n+3)} = Q$ ꝛc.; so erhält man:

$$y' = \text{Sin.}\,(z + \Delta z)$$

$$= \left\{\begin{array}{llll} z & + & 1 & \\ -Bz^3 & - & 3Bz^2 & \\ +Cz^5 & + & 5Cz^4 & \\ \vdots & & \vdots & \\ \mp Pz^{2n+1} & \mp & (2n+1).Pz^{2n} & \\ \pm Qz^{2n+3} & \pm & (2n+3).Qz^{2n+2} & \\ \vdots & & \vdots & \end{array}\right\}\Delta z + \left\{\begin{array}{l} - 3.Bz \\ + 10.Cz^3 \\ \vdots \\ \mp \frac{(2n+1)\,2n}{1\,.\,2}Pz^{2n-1} \\ \pm \frac{(2n+3)\,(2n+2)}{1\,.\,2}Qz^{2n+1} \\ \vdots \end{array}\right\}\Delta z^2 + \left\{\begin{array}{l} - B \\ + 10\,Cz^2 \\ \vdots \\ \mp \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}Pz^{2n-2} \\ \pm \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}Qz^{2n} \\ \vdots \end{array}\right\}\Delta z^3 + \ldots$$

Werden nun die Werthe der Größen B, C, D ... P, Q ... gehörig substituirt und die Coefficienten der Potenzen Δz^2, Δz^3 ꝛc. der Ordnung nach durch β, γ, δ ... bezeichnet; so verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$y' = \text{Sin.}\,(z + \Delta z)$$

$$= z - \frac{1}{1.2.3}.z^3 + \frac{1}{1.3\ldots5}.z^5 - \ldots \mp \frac{1}{1.2\ldots2n(2n+1)}.z^{2n+1}$$

$$\pm \frac{1}{1.2\ldots(2n+2)(2n+3)}.z^{2n+3} \mp \ldots$$

$$+\left(1-\frac{1}{1.2}.z^2+\frac{1}{1.2\ldots4}.z^4-\ldots\mp\frac{1}{1.2.3\ldots2n}.z^{2n}\right.$$

$$\left.\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(2n+2)}.z^{2n+2}\mp\ldots\right)\Delta z$$

$$+\beta.\Delta z^2+\gamma.\Delta z^3+\delta.\Delta z^4+\ldots,$$

woraus sich jetzt, wenn man die Function $y = \text{Sin. } z$ abzieht, also die erste Reihe weg läßt, die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. } z)$$

$$= \left(1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots\mp\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots2n}\pm\frac{z^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)}\mp\ldots\right)\Delta z$$

$$+\beta.\Delta z^2+\gamma.\Delta z^3+\delta.\Delta z^4+\ldots \text{ ergiebt.}$$

3) In dem für Δy jetzt gefundenen Ausdrucke ist aber der mit Δz multiplicirte Factor der in §. 144. angegebene Ausdruck, welcher den **Cosinus** eines Bogens z durch diesen Bogen ausgedrückt darstellt. Trennt man also von allen Gliedern $\beta.\Delta z^2$, $\gamma.\Delta z^3$ ꝛc. den Factor Δz^2, bezeichnet die Summe der hierbey bleibenden Glieder durch φ, und setzt wirklich statt des mit Δz multiplicirten Factors den Ausdruck Cos. z; so wird die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. } z) = \text{Cos. } z.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = \text{Sin. } Z$ und Z eine Function von z ist.

1) Man nehme an, es sey Z absolut veränderlich, dann muß nach Nro. I) die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. } Z) = \text{Cos. } Z.\Delta Z + \varphi'.\Delta Z^2 \text{ seyn.}$$

2) Nun überlege man, daß, wenn Z eine Function von z ist, ΔZ ganz gewiß $= \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ gesetzt werden kann, wo $\alpha = dZ$ ist (§. 179.), und setze diesen Ausdruck statt ΔZ in die vorige Gleichung in Nro. I); dann erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. } Z) = \text{Cos. } Z.(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + \varphi'(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2$$

$$= \text{Cos. } Z.\alpha.\Delta z + \text{Cos. } Z.\psi.\Delta z^2 + \varphi'(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2.$$

Da nun der zweyte Theil dieses Ausdruckes ganz gewiß durch $\varphi.\Delta z^2$ ausgedrückt werden kann, so erhält man, wenn man denselben wirklich so ausdrückt und α durch dZ bezeichnet,

$$\Delta y = \Delta(\text{Sin. } Z) = \text{Cos. } Z.dZ.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

§. 191.

§. 192.

"Es sey I) $y = \text{Cos.}\, z$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = \text{Cos.}\, Z$ "und Z eine Function von z: es sollen die Differenzen Δy dieser Functionen ausgedrückt "werden."

I) Wenn $y = \text{Cos.}\, z$ und z absolut veränderlich ist.

1) Wenn man in der Function $y = \text{Cos.}\, z$ die Größe z in $z + \Delta z$ übergehen läßt, so erhält man die Aenderungsfunction $y' = \text{Cos.}\, (z + \Delta z)$, woraus durch die Subtraction der Function $y = \text{Cos.}\, z$ die Differenz

$$\Delta y = \text{Cos.}\, (z + \Delta z) - \text{Cos.}\, z \text{ folgt.}$$

2) Damit man aber diese Differenz entwickelt erhalte, so drücke man nach §. 144. die Function $y = \text{Cos.}\, z$ durch den Kreisbogen aus, wie hier folgt:

$$\text{Cos.}\, z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2\ldots6} + \ldots \mp \frac{z^{2n}}{1.2\ldots2n}$$
$$\pm \frac{z^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} \mp \ldots,$$

und lasse nun hierin z in $z + \Delta z$ übergehen. Hierdurch erhält man die Aenderungsfunction

$$y' = \text{Cos.}\, (z + \Delta z)$$
$$= 1 - \frac{(z + \Delta z)^2}{1.2} + \frac{(z + \Delta z)^4}{1.2.3.4} - \frac{(z + \Delta z)^6}{1.2\ldots6} + \ldots \mp \frac{(z + \Delta z)^{2n}}{1.2\ldots2n}$$
$$\pm \frac{(z + \Delta z)^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} \mp \ldots$$

welche, wenn man in ihr die Potenzen von $z + \Delta z$ entwickelt, alles nach Potenzen von Δz ordnet, die Coefficienten der Potenzen Δz^2, Δz^3, Δz^4 rc. der Ordnung nach durch α, β, γ rc. bezeichnet, und hernach den für $\text{Cos.}\, z$ angegebenen Ausdruck abzieht, die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta\, (\text{Cos.}\, z)$$
$$= -\left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2\ldots5} - \ldots \mp \frac{z^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \pm \frac{z^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)} \mp \ldots\right) \Delta z$$
$$+ \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 + \delta . \Delta z^4 + \ldots \text{ giebt.}$$

3) Man sieht sogleich, daß der in den Klammern stehende und mit Δz multiplicirte Ausdruck der ist, welcher den Sinus des Kreisbogens z ausdrückt. Trennt man daher von den Gliedern $\beta . \Delta z^2$, $\gamma . \Delta z^3$ etc. den Factor Δz^2, bezeichnet die Summe der bleibenden Glieder durch φ, und setzt wirklich statt des in den Klammern stehenden Ausdruckes den gleichgeltenden Ausdruck Sin. z; so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cos. } z) = - \text{Sin. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

II) Wenn $y = \text{Cos. } Z$ und Z eine Function von z ist.

1) Man nehme an, es sey Z absolut veränderlich, dann muß nach Nro. I. 3) die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cos. } Z) = - \text{Sin. } Z . \Delta Z + \varphi' . \Delta Z^2 \text{ seyn.}$$

2) Nun überlege man, daß, wenn Z eine Function von z bedeutet, $\Delta Z = \alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ seyn muß, wo $\alpha = dZ$ ist (§. 179.), und setze jetzt diesen Ausdruck statt Δz in die vorige Gleichung, dann wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cos. } Z) = - \text{Sin. } Z (\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2) + \varphi'(\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2)^2$$
$$= - \text{Sin. } Z . \alpha . \Delta z - \text{Sin. } Z . \psi . \Delta z^2 + \varphi'(\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2)^2.$$

Den dem ersten Gliede hier nachfolgenden Ausdruck kann man gewiß durch $\varphi . \Delta z^2$ ausdrücken. Thut man dieses und bezeichnet überdieß die Größe α durch dZ, so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cos. } Z) = - \text{Sin. } Z . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

§. 193.

"Es sey I) $y = \text{Sin. vers. } z$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) "$y = \text{Sin. vers. } Z$ und Z sey eine Function von z: es sollen die Differenzen Δy dieser "Functionen ausgedrückt werden."

I) Wenn $y = \text{Sin. vers. } z$ und z absolut veränderlich ist.

Bekanntlich ist für den Sin. tot. $= 1$ der Sin. vers. $z = 1 - \text{Cos. } z$, daher muß nun $\Delta(\text{Sin. vers. } z) = \Delta(1 - \text{Cos. } z)$ d. h. $= \Delta(- \text{Cos. } z)$ seyn (§. 177. Nro. I).

Nun ist aber nach §. 192. Nro. I) $\Delta(\text{Cos. } z) = - \text{Sin. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$ und es muß also $\Delta(- \text{Cos. } z) = \text{Sin. } z . \Delta z - \varphi . \Delta z^2$ werden; daraus folgt, daß

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. verf. } z) = \text{Sin. } z . \Delta z - \varphi . \Delta z^2$$

seyn muß.

II) Wenn $y = \text{Sin. verf. } Z$ und Z eine Function von z ist.

Wenn man annimmt, es sey Z absolut veränderlich, so muß nach Nro. I) seyn:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. verf. } Z) = \text{Sin. } Z . \Delta Z - \varphi' . \Delta Z.$$

Da nun Z eine Function von z seyn soll, so darf man nur $\Delta Z = \alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ setzen, wo $\alpha = dZ$ ist (§. 179.), dann wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. verf. } Z) = \text{Sin. } Z (\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2) - \varphi' (\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2)^2$$
$$= \text{Sin. } Z . \alpha . \Delta z + \left(\text{Sin. } Z . \psi - \varphi' (\alpha + \psi . \Delta z)^2\right) \Delta z^2.$$

Da man aber die dem ersten Gliede nachfolgende Größe ganz gewiß durch $\varphi . \Delta z^2$ ausdrücken kann, so erhält man, wenn man den Ausdruck $\varphi . \Delta z^2$ wirklich gebraucht und überdieß α durch dZ bezeichnet,

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sin. verf. } Z) = \text{Sin. } Z . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

§. 194.

"Es sey I) $y = \text{Cof. verf. } z$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) "$y = \text{Cof. verf. } Z$ und Z eine Function von z: es sollen die Differenzen Δy ausgedrückt "werden."

I) Wenn $y = \text{Cof. verf. } z$ und z absolut veränderlich ist.

Es ist bekanntlich $\text{Cof. verf. } z = 1 - \text{Sin. } z$ und also $\Delta(\text{Cof. verf. } z) = \Delta(1 - \text{Sin. } z) = \Delta(- \text{Sin. } z)$ (§. 177. Nro. I). Weil nun nach §. 191. $\Delta(\text{Sin. } z) = \text{Cof. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$ und also auch $\Delta(- \text{Sin. } z) = - \text{Cof. } z . \Delta z - \varphi . \Delta z^2$ ist; so muß

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cof. verf. } z) = - \text{Cof. } z . \Delta z - \varphi . \Delta z^2 \text{ seyn.}$$

II) Wenn $y = \text{Cof. verf. } Z$ und Z eine Function von z ist.

Nimmt man einstweilen Z als absolut veränderlich an, so erhält man nach Nro. I)

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cof. verf. } Z) = - \text{Cof. } Z . \Delta Z - \varphi' . \Delta Z^2 ,$$

Setzt

Setzt man nun $\Delta Z = \alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$, wo $\alpha = dZ$ ist (§. 179.), und verfährt wie in Nro. II) im vorigen §., so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta (\text{Cos. verf. } Z) = - \text{Cos. } Z . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

§. 195.

"Es sey I) $y =$ Tang. z und z absolut veränderlich; dann sey auch II) $y =$ Tang "Z und Z eine Function von z: es sollen die Differenzen dieser Functionen ausgedrückt "werden."

I) Wenn $y =$ Tang. z und z absolut veränderlich ist.

1) Es ist bekanntlich für den Sin. tot. $= 1$ die Tang. $z = \frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}$, es muß also auch die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta (\text{Tang. } z) = \Delta \left(\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}\right) \text{ seyn.}$$

Nun ist aber nach §. 183. Nro. III) die einer gebrochenen Function $\frac{Z}{N}$ zugehörige Differenz

$$\Delta \left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{N . dZ - Z . dN}{N^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

In dieser Gleichung setze man jetzt Sin. z statt der Function Z, und Cos. z statt der Function N, dann verwandelt sich die in ihr stehende Größe φ in eine andere Größe, die wir φ' nennen wollen, und die Gleichung wird diese:

$$\Delta \left(\frac{Z}{N}\right) = \Delta \left(\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}\right) = \frac{\text{Cos. } z . d\text{Sin. } z - \text{Sin. } z . d\text{ Cos. } z}{\text{Cos. } z^2} . \Delta z + \varphi' . \Delta z^2$$

2) Diesen für Δy jetzt gefundenen Ausdruck können wir kürzer darstellen, wenn wir die Werthe von d Sin. z und d Cos. z substituiren. Es war nach §. 191. Nro. I) $\Delta (\text{Sin. } z) = \text{Cos. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$, woraus d Sin. z $=$ Cos. z folgt (§. 179). Ferner war nach §. 192. $\Delta (\text{Cos. } z) = - \text{Sin. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$, woraus sich d Cos. z $= -$ Sin. z ergiebt (§. 179.). Setzt man diese Ausdrücke für d Sin. z und d Cos. z in den für Δy angegebenen Ausdruck, so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta (\text{Tang. } z) = \frac{\text{Cos. } z \times \text{Cos. } z + \text{Sin. } z \times \text{Sin. } z}{\text{Cos. } z^2} . \Delta z + \varphi' . \Delta z^2,$$

wofür

wofür man nun, weil $\text{Cos. } z^2 + \text{Sin. } z^2$ dem Quadrate des Sin. tot. gleich und $= 1$, $\frac{1}{\text{Cos. } z^2}$ aber $= \text{Sec. } z^2$ seyn muß, kurz setzen kann:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Tang. } z) = \text{Sec. } z^2 . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

II) Wenn $y = \text{Tang. } Z$ und Z eine Function von z ist.

1) Nimmt man an, es sey Z absolut veränderlich, so muß nach Nro. I)

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Tang. } Z) = \text{Sec. } Z^2 . \Delta Z + \varphi' . \Delta Z^2 \text{ seyn.}$$

2) Setzt man nun, weil Z eine Function von z seyn soll, $\Delta Z = \alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$, wo $\alpha = d Z$ ist (§. 179); so wird

$$\begin{aligned}\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Tang. } Z) &= \text{Sec. } Z^2 . (\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2) + \varphi'(\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2)^2 \\ &= \text{Sec. } Z^2 . \alpha . \Delta z + \text{Sec. } Z^2 . \psi . \Delta z^2 + \varphi'(\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2)^2.\end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß man statt der dem ersten Gliede nachfolgenden Glieder den Ausdruck $\varphi . \Delta z^2$ setzen kann. Gebraucht man nun diesen Ausdruck statt der erwähnten Glieder, und bezeichnet ferner den in dem ersten Gliede stehenden Factor α durch $d Z$; so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Tang. } Z) = \text{Sec. } Z^2 . d Z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

§. 196.

"Es sey I) $y = \text{Cot. } z$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = \text{Cot. } Z$ "und Z bedeute eine Function von z: es sollen die Differenzen Δy dieser Functionen ge"sucht werden."

I) Wenn $y = \text{Cot. } z$ und z absolut veränderlich ist.

1) Bekanntlich ist $\text{Cot. } z = \frac{1}{\text{Tang. } z}$ und es muß also $\Delta(\text{Cot. } z) = \Delta\left(\frac{1}{\text{Tang } z}\right)$ seyn. Nun ist aber nach §. 184. Nro. II) die einer gebrochenen Function $\frac{C}{N}$, deren Zähler C constant ist, zugehörige Differenz

$$\Delta\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C\, d N}{N^2} \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

Setzt man daher in dieser Gleichung $C = 1$, $N = \text{Tang. } z$ und $dN = d\,\text{Tang. } z$; so verwandelt sich die Größe φ in eine andere, die wir wiederum durch φ bezeichnen wollen, und es wird

$$\Delta\left(\frac{C}{N}\right) = \Delta\left(\frac{1}{\text{Tang. } z}\right) = -\frac{d\,\text{Tang. } z}{\text{Tang. } z^2}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

Hier haben wir einen Ausdruck für Δy oder $\Delta(\text{Cot. } z)$, welchen wir jetzt anders ausdrücken wollen.

2) Es war $\Delta(\text{Tang. } z) = \text{Sec. } z^2.\Delta z + \varphi.\Delta z^2$, woraus $\text{Sec. } z^2 = d(\text{Tang. } z)$ folgt (§. 179.); wird also $\text{Sec. } z^2$ statt $d(\text{Tang. } z)$ in den für Δy angegebenen Ausdruck gesetzt, so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cot. } z) = -\frac{\text{Sec. } z^2}{\text{Tang. } z^2}.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

Nun ist aber bekanntlich für den Sin. tot. $= 1$ die $\text{Sec. } z = \frac{1}{\text{Cos. } z}$ und die $\text{Tang. } z = \frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}$, daher muß auch $\frac{\text{Sec. } z}{\text{Tang. } z} = \frac{1}{\text{Sin. } z}$ seyn; und weil ferner wieder $\frac{1}{\text{Sin. } z} = \text{Cosec. } z$ seyn muß, so kann man auch $\frac{\text{Sec. } z}{\text{Tang. } z} = \text{Cosec. } z$ und also $\frac{\text{Sec. } z^2}{\text{Tang. } z^2} = \text{Cosec. } z^2$ setzen. Thut man dieses in der letzten für Δy angegebenen Gleichung, so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cot. } z) = -\text{Cosec. } z^2.\Delta z + \varphi.\Delta z^2.$$

II) Wenn $y = \text{Cot. } Z$ und Z eine Function von z ist.

1) Nimmt man Z als absolut veränderlich an, so muß nach Nro. I)

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cot. } Z) = -\text{Cosec. } Z^2.\Delta Z + \varphi'.\Delta Z^2$$

seyn. Nun soll aber Z eine Function von z seyn, und man kann also $\Delta Z = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2$ setzen, wo dann $\alpha = dZ$ ist (§. 179.) Setzt man diesen Ausdruck für ΔZ in die vorige Gleichung, so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cot. } Z) = -\text{Cosec. } Z^2(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2) + \varphi'(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2$$
$$= -\text{Cosec. } Z^2.\alpha.\Delta z - \text{Cosec. } Z.\psi.\Delta z^2 + \varphi'(\alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2)^2.$$

2) Man

2) Man drücke jetzt die dem ersten Gliede nachfolgenden Glieder durch $\varphi . \Delta z^2$ aus, und bezeichne ferner α durch dZ, dann erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cot. } Z) = -\text{Cosec. } Z^2 . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

§. 197.

„Es sey I) $y = \text{Sec. } z$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = \text{Sec. } Z$ „und Z eine Function von z: es sollen die Differenzen Δy dieser Functionen gesucht „werden.

I) Wenn $y = \text{Sec. } z$ und z absolut veränderlich ist.

1) Bekanntlich ist $\text{Sec. } z = \frac{1}{\text{Cos. } z}$, und deswegen muß nun auch $\Delta(\text{Sec. } z) = \Delta\left(\frac{1}{\text{Cos. } z}\right)$ seyn. Es ist aber nach §. 184. Nro. II) die einer gebrochenen Function $\frac{C}{N}$, deren Zähler constant ist, zugehörige Differenz

$$\Delta\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C . dN}{N^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

Setzt man daher in dieser Gleichung $C = 1$, $N = \text{Cos. } z$ und $dN = d . \text{Cos. } z$, und nimmt die Größe φ in der gehörigen Bedeutung; so erhält man:

$$\Delta\left(\frac{C}{N}\right) = \Delta\left(\frac{1}{\text{Cos. } z}\right) = -\frac{d . \text{Cos. } z}{\text{Cos. } z^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$$

Dieses ist nun ein Ausdruck für $\Delta y = (\text{Sec. } z)$. Man kann ihn noch anders ausdrücken.

2) Es war in §. 192. Nro. I) $\Delta(\text{Cos. } z) = -\text{Sin. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$, und daraus folgt $d \text{ Cos. } z = -\text{Sin. } z$ (§. 179.). Gebraucht man diesen Werth von $d \text{ Cos. } z$ in der Gleichung für Δy, so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sec. } z) = \frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$$

$$= \frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z} . \frac{1}{\text{Cos } z} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$$

oder auch, weil $\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z} = \text{Tang. } z$ und $\frac{1}{\text{Cos. } z} = \text{Sec. } z$ ist,

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sec. } z) = \text{Tang. } z \times \text{Sec. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

II) Wenn

II) Wenn $y = \text{Sec. } Z$ und Z eine Function von z ist.

Wenn man setzt, es sey Z absolut veränderlich, so muß nach Nro. I) die Differenz

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sec. } Z) = \text{Tang. } Z \times \text{Sec. } Z . \Delta Z + \varphi' . \Delta Z^2 \text{ seyn.}$$

Da nun Z eine Function von z seyn soll, so muß $\Delta Z = \alpha . \Delta z + \psi . \Delta z$ seyn, wo dann $\alpha = dZ$ ist (§. 179.). Setzt man diesen Ausdruck in die vorige für Δy angegebene Gleichung, so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sec. } Z) = \text{Tang. } Z \times \text{Sec. } Z\, (\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2) + \varphi' (\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2)^2.$$

Drückt man ferner, welches gewiß möglich ist, die dem Gliede $\text{Tang. } Z \times \text{Sec. } Z . \alpha . \Delta z$ nachfolgenden Glieder durch $\varphi . \Delta z^2$ aus, und bezeichnet α durch dZ; so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Sec. } Z) = \text{Tang.} \times \text{Sec. } Z . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

§. 198.

"Es sey I) $y = \text{Cosec. } z$ und z absolut veränderlich; dann sey auch II) $y = \text{Cosec. } Z$ "und Z eine Function von z: es sollen die Differenzen Δy ausgedrückt werden."

I) Wenn $y = \text{Cosec. } z$ und z absolut veränderlich ist.

1) Bekanntlich ist $\text{Cosec. } z = \frac{1}{\text{Sin. } z}$ und es muß daher $\Delta(\text{Cosec. } z) = \Delta\left(\frac{1}{\text{Sin. } z}\right)$ seyn. Nun ist aber nach §. 184. Nro. II) die der gebrochenen Function $\frac{C}{N}$, in welcher C constant ist, zugehörige Differenz

$$\Delta\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C . dN}{N^2} \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

Setzt man also $C = 1$, $N = \text{Sin. } z$, $dN = d . \text{Sin. } z$, und nimmt φ gehörig; so folgt:

$$\Delta\left(\frac{C}{N}\right) \text{oder} \Delta\left(\frac{1}{\text{Sin. } z}\right) = -\frac{d . \text{Sin. } z}{\text{Sin. } z^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

Dieses ist ein Ausdruck für Δy oder $\Delta(\text{Cosec. } z)$.

2) Man kann den vorigen Ausdruck noch anders darstellen. Es war in §. 191. Nro. I) $\Delta(\text{Sin. } z) = \text{Cos. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$, woraus $\text{Cos. } z = d . \text{Sin. } z$ folgt (§. 197.); setzt man nun in dem für Δy angegebenen Ausdrucke $\text{Cos. } z$ statt $d . \text{Sin. } z$, so wird

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cosec. } z) = -\frac{\text{Cos. } z}{\text{Sin. } z^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

Setzt

Setzt man ferner, weil $\frac{\text{Cos. } z}{\text{Sin. } z} = \text{Cot. } z$ und $\frac{1}{\text{Sin. } z} = \text{Cosec. } z$ ist, statt $\frac{\text{Cos. } z}{\text{Sin. } z} \cdot \frac{1}{\text{Sin. } z}$ oder $\frac{\text{Cos. } z}{\text{Sin. } z^2}$ den gleichgeltenden Ausdruck: $\text{Cot. } z \times \text{Cosec. } z$; so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cosec. } z) = - \text{Cot. } z \times \text{Cosec. } z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2 .$$

II) Wenn $y = \text{Cosec. } Z$ und Z eine Function von z ist.

Wenn man Z als absolut veränderlich ansieht, so muß nach Nro. I)

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cosec. } Z) = - \text{Cot. } Z \times \text{Cosec. } Z . \Delta Z + \varphi' . \Delta Z^2$$

seyn. Da nun Z eine Function von z seyn soll, so darf man nur $\Delta Z = \alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ setzen, wo dann $\alpha = dZ$ ist (§. 179.), und eben so, wie in den vorigen §. §. verfahren, dann erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta(\text{Cosec. } Z) = - \text{Cot. } Z \times \text{Cosec. } Z . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2 .$$

§. 199.

Nun könnten wir auch Ausdrücke für die Differenzen der trigonometrischen Functionen Arc. (Sin. = z), Arc. (Cos. = z), Arc. (Tang. = z) ꝛc., für welche die algebraischen Ausdrücke in §. 151. alle angegeben worden sind, aufsuchen. Da aber die Rechnungen hierbey sehr weitläuftig werden, und die Sätze, zu welchen dieselben leiten, in der Folge auf einem andern viel kürzern Wege erhalten werden können; so wollen wir hier die Bestimmung der erwähnten Differenzen übergehen und damit zufrieden seyn, daß wir wissen, es sey eine jede Differenz Δy der Functionen Arc. (Sin. = z), Arc. (Cos. = z), Arc. (Tang. = z) ꝛc. durch einen Ausdruck von der Form $\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ darstellbar, worin α eine aus einer ohne Ende fortlaufenden Reihe von Gliedern bestehende Function seyn muß, weil die Functionen Arc. (Sin. = z), Arc. (Cos. = z) ꝛc. transcendentische Functionen sind (§. 175. Nro. 3. c).

§. 200.

"Es sey endlich eine Function y eine algebraische Summe aus mehreren Functionen "U, V, W, X ꝛc. von z, also $y = U \pm V \pm W \pm X \pm \ldots$; es soll der Ausdruck für die einer solchen Function zugehörige Differenz Δy gesucht werden.

1) Wenn

1) Wenn man in dieser Function y die absolut veränderliche Größe z in $z + \Delta z$ übergehen läßt, so gehen die einzelnen Glieder U, V, W, X ꝛc. der Function in die Aenderungsfunctionen U'. V', W', X' ꝛc. über; es wird demnach aus der Function y die Aenderungsfunction

$$y' = U' \pm V' \pm W' \pm X' \pm \ldots,$$

wofür man nun auch, weil $U' = U + \Delta U$, $V' = V + \Delta V$, $W' = W + \Delta W$ ꝛc. seyn muß, setzen kann:

$$y' = (U + \Delta U) \pm (V + \Delta V) \pm (W + \Delta W) \pm (X + \Delta X) \pm \ldots$$

Hieraus folgt, wenn man die Function $y = U \pm V \pm W \pm X \pm \ldots$ abzieht, die Differenz

$$\Delta y = \Delta U \pm \Delta V \pm \Delta W \pm \Delta X \pm \ldots$$

2) Da nun U, V, W, X ꝛc. Functionen von z seyn sollen, so muß gewiß $\Delta U = \alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$, $\Delta V = \alpha' . \Delta z + \psi' . \Delta z^2$, $\Delta W = \alpha'' . \Delta z + \psi'' . \Delta z^2$, $\Delta X = \alpha''' . \Delta z + \psi''' . \Delta z^2$ ꝛc. seyn, wo dann $\alpha = dU$, $\alpha' = dV$, $\alpha'' = dW$, $\alpha''' = dX$ ꝛc. seyn muß (§. 179.). Setzt man diese Ausdrücke in den vorigen für Δy angegebenen Ausdruck, so erhält man:

$$\Delta y = (\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2) \pm (\alpha' . \Delta z + \psi' . \Delta z^2) \pm (\alpha'' . \Delta z + \psi'' . \Delta z^2)$$
$$\pm (\alpha''' . \Delta z + \psi''' . \Delta z^2) \pm \ldots$$
$$= (\alpha \pm \alpha' \pm \alpha'' \pm \alpha''' \pm \ldots) \Delta z + (\psi \pm \psi' \pm \psi'' \pm \psi''' \pm \ldots) \Delta z^2.$$

3) Bezeichnet man kurz den mit Δz^2 multiplicirten Factor durch φ, die Größen α, α', α'', α''' ꝛc. aber durch dU, dV, dW, dX ꝛc.; so erhält man:

$$\Delta y \text{ oder } \Delta (U \pm V \pm W \pm X \pm \ldots) = (dU \pm dV \pm dW \pm dX \pm \ldots) \Delta z + \varphi . \Delta z^2.$$

§. 201.

Hiermit sind nun die allgemeinen Ausdrücke für die Differenzen aller Arten algebraisch dargestellter oder darstellbarer Functionen y von z gefunden. Denn wenn irgend eine Function y von z entweder schon wirklich algebraisch dargestellt ist, oder doch einer solchen Darstellung fähig seyn soll; so muß nothwendig der algebraische Ausdruck, durch welchen diese Darstellung geschieht, zu einer von den verschiedenen Arten der allgemeinen algebraischen Ausdrücke gehören, welche bisher betrachtet und aus welchen die allgemeinen Ausdrücke für die Differenzen Δy der Functionen y, die sie bezeichnen, abgeleitet worden sind. Wäre dieses der Fall nicht, so müßten sich ausser den verschiedenen Arten algebraischer

scher Ausdrücke, welche wir betrachtet haben, noch andere Arten aufzeigen lassen, welche von ersteren wesentlich verschieden wären; dieses aber ist unmöglich. — Diese für die Differenzen Δy gefundenen allgemeinen Ausdrücke sind in Verbindung mit den allgemeinen Ausdrücken der Functionen y zur leichteren Uebersicht im folgenden §. zusammengestellt.

§. 202.

	Functionen y	Differenzen Δy
1)	$A z^n$	$\Delta(A z^n) = n . A z^{n-1} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	$A Z^n$	$\Delta(A Z^n) = n . A Z^{n-1} . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
2)	$U z$	$\Delta(U z) = (U + z . dU) . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	$U V$	$\Delta(U V) = (U . dV + V . dU) . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
3)	$U V z$	$\Delta(U V z) = (U V + U z . dV + V z . dU) . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	$U V Z$	$\Delta(U V Z) = (UV . dZ + UZ . dV + VZ . dU) . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
4)	$\frac{z}{N}$	$\Delta\left(\frac{z}{N}\right) = \frac{N - z . dN}{N^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	$\frac{Z}{z}$	$\Delta\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{z . dZ - Z}{z^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	$\frac{Z}{N}$	$\Delta\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{N . dZ - Z . dN}{N^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
5)	$\frac{C}{z}$	$\Delta\left(\frac{C}{z}\right) = -\frac{C}{z^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	$\frac{C}{N}$	$\Delta\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C . dN}{N^2} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
6)	a^z	$\Delta(a^z) = a^z . \log . \text{nat.}\, a . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	a^Z	$\Delta(a^Z) = a^Z . \log . \text{nat.}\, a\, dZ . \Delta z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
7)	e^z	$\Delta(e^z) = e^z . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	e^Z	$\Delta(e^Z) = e^Z . dZ . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
8)	log. art. z	$\Delta(\text{log. art. } z) = M . \frac{1}{z} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$
	log. art. Z	$\Delta(\text{log. art. } Z) = M \frac{dZ}{Z} . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$

	Functionen y	Differenzen Δy
9)	log. nat. z	Δ(log. nat. z) = $\frac{1}{z} \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	log. nat. Z	Δ(log. nat. Z) = $\frac{dZ}{Z} \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
10)	log. art. (log. art. z)	Δ(l. art. z (l. art. z)) = M $\cdot \frac{1}{z \,.\, \text{log. art. } z} \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	log. art. (log. art. Z)	Δ(l. art. Z (l. art. Z)) = M $\cdot \frac{dZ}{Z \,.\, \text{log. art. } Z} \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
11)	log. nat. (log. nat. z)	Δ(l. nat. (l. nat. z)) = $\frac{1}{z \,.\, \text{log. nat. } z} \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	log. nat. (log. nat. Z)	Δ(l. nat. (l. nat. Z)) = $\frac{dZ}{Z \,.\, \text{log. nat. } Z} \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
12)	Sin. z	Δ(Sin. z) = Coſ. z $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Sin. Z	Δ(Sin. Z) = Coſ. Z . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
13)	Coſ. z	Δ(Coſ. z) = — Sin. z $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Coſ. Z	Δ(Coſ. Z) = — Sin. Z . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
14)	Sin. verſ. z	Δ(Sin. verſ. z) = Sin. z $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Sin. verſ Z	Δ(Sin. verſ. Z) = Sin. Z . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
15)	Coſ. verſ. z	Δ(Coſ. verſ. z) = — Coſ. z $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Coſ. verſ. Z	Δ(Coſ. verſ. Z) = — Coſ. Z . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
16)	Tang. z	Δ(Tang. z) = Sec. $z^2 \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Tang. Z	Δ(Tang. Z) = Sec. Z^2 . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
17)	Cot. z	Δ(Cot. z) = — Coſec. $z^2 \cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Cot. Z	Δ(Cot. Z) = — Coſec. Z^2 . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
18)	Sec. z	Δ(Sec. z) = Tang. z $\times$ Sec. z $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Sec. Z	Δ(Sec. Z) = Tang. Z $\times$ Sec. Z . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
19)	Coſec. z	Δ(Coſec. z) = — Cot. z $\times$ Coſec. z $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
	Coſec. Z	Δ(Coſec. Z) = — Cot. Z $\times$ Coſec. Z . dZ $\cdot \Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$
20)	$U \pm V \pm W \pm \ldots$	$\Delta(U \pm V \pm W \pm \ldots) = (dU \pm dV \pm dW \pm \ldots)\Delta z + \varphi \cdot \Delta z^2$

§. 203.

§. 203.

Wenn man nun die allgemeinen Ausdrücke, welche für die Differenzen Δy aller Arten algebraisch dargestellter oder darstellbarer Functionen y von z jetzt angegeben und zur leichteren Uebersicht und Vergleichung zusammengestellt worden sind, betrachtet und unter einander vergleicht; so findet man, daß ausser den allgemeinen Eigenschaften der Differenzen Δy, welche in §. 177. angegeben wurden, noch folgendes von ihnen zu merken ist.

1) Der algebraische Ausdruck, welcher eine Function y von z bezeichnet, habe was immerhin für eine Form, er sey also auf die allgemeine Form $A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ zurückgeführt, oder nicht; es muß sich doch allemal der Ausdruck für die Differenz Δy, den man aus demselben ableitet, in der Form $\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ darstellen lassen.

2) Stellt man ihn aber in dieser Form dar, so haben dann die Größen α und ψ, von welchen wir die letztere bisher mit φ bezeichnet haben, und die erstere nach §. 179. durch dy bezeichnen können, noch eben die Bedeutungen, welche in §. 177. für α und ψ angegeben worden sind: dy nehmlich bedeutet jedesmal eine von Δz ganz unabhängige Größe, welche in dem Falle, wenn sich y in der Form $A + Bz + Cz + \ldots$ darstellen läßt, constant, für alle übrigen Functionen y von z aber eine Function von z seyn muß; und φ bedeutet jedesmal eine Größe, welche, wenn sich y in der Form $A + Bz + Cz + \ldots$ darstellen läßt, $= 0$, in dem Falle aber, wenn $y = A + Bz + Cz^2$ ist, constant, und in allen übrigen Fällen eine Function von z und Δz zugleich wird.

Hingegen erhalten, wenn die algebraischen Ausdrücke der Functionen y von z, aus welchen man die Ausdrücke für Δy ableitet und in der Form $dy . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$ darstellt, nicht die Form $A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ haben, auch die in den Differenzenausdrücken stehenden Größen dy und φ nicht eben dieselbe Form, die sie erhalten würden, wenn man die algebraischen Ausdrücke der Functionen y erst in der Form $A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ darstellte, bevor man aus ihnen die Ausdrücke für Δy ableitete.

Für eine jede Function y von z nehmlich, deren algebraischer Ausdruck in der Form $A + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ dargestellt ist, muß, wenn man aus dem so dargestellten Ausdrucke den Ausdruck für die Differenz Δy sucht und in der Form $dy . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$ darstellt, der Differenzencoefficient dy die Form $bBz^{b-1} + cCz^{c-1} + dDz^{d-1} + \ldots$ haben, und diese Form hat er auch in dem für die Function $y = Az^n$ im vorigen §. stehenden Differenzenausdrucke wirklich; in allen übrigen daselbst stehenden

 Dif-

Differenzenausdrücken hingegen sind die Formen der Differenzencoefficienten dy andere. Eben dieses erhellt auf ähnliche Art für die in dem vorigen §. bey. Δz^2 stehenden Coefficienten φ, wenn man dieselben entwickelt darstellt.

3) In den Differenzenausdrücken, welche man für verschiedene mit verschiedenen veränderlichen Theilen versehene Functionen y von z aus den algebraischen Ausdrücken dieser Functionen ableitet und in der Form $dy.\Delta z + \varphi.\Delta z^2$ darstellt, sind nicht nur die **Werthe** der Differenzencoefficienten dy und der andern Coefficienten φ durch die Werthe der Größen, die in einer gewissen Form der Verbindung unter einander die veränderlichen Theile der Functionen y bilden, sondern auch die **Formen** dieser Coefficienten durch die Formen der veränderlichen Theile der Functionen y dergestalt bestimmt, daß man unmöglich behaupten kann: "Es könne zwey oder mehrere Functionen y von z geben, in denen so "wohl die Größen, welche in gewissen Formen der Verbindung unter einander die ver" änderlichen Theile der Functionen y bilden, als auch diese Formen der Verbindung gänzlich "**verschieden** sind, die aber übrigens dennoch die Eigenschaft haben, daß, wenn man die ihnen "zugehörigen Differenzenausdrücke sucht, die darin vorkommenden Differenzencoefficienten dy "und andern Coefficienten φ sowohl dem Werthe als der Form nach durchaus **gleich** seyn "müssen."

§. 104.

Wir kommen nun zur Betrachtung des Verhältnisses der Differenzen Δy und Δz.

"Der dem Verhältnisse $\Delta y : \Delta z$ zugehörige Exponent soll der **Differenzenquotient** "genannt werden."

Für die Function $y = az^2 + bz + c$ war in §. 172. die Differenz $\Delta y = 2az\Delta z + a.\Delta z^2 + b.\Delta z = (2az + b)\Delta z + a.\Delta z^2$. Hier ist das Verhältniß

$$\Delta y : \Delta z = (2az + b + a.\Delta z)\,\Delta z : \Delta z = (2az + b + a\Delta z) : 1,$$

und also der **Differenzenquotient** $\frac{\Delta y}{\Delta z} = 2az + b + a.\Delta z$.

§. 205.

"Es soll ein allgemeiner Ausdruck angegeben werden, welcher für eine jede Function "y von z den Differenzenquotienten darstellt."

Für eine jede Function y von z ist, wie wir wissen, $\Delta y = dy.\Delta z + \varphi.\Delta z^2$, folglich ist das Verhältniß der Differenzen, oder

Δy



$$\Delta y : \Delta z = (dy \cdot \Delta z + \varphi . \Delta z^2) : \Delta z = (dy + \varphi . \Delta z) : 1,$$

und mithin der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = dy + \varphi . \Delta z.$$

§. 206.

"Es soll angegeben werden, was sich aus der Betrachtung des für die Differenzen-"quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ gefundenen allgemeinen Ausdrucks $dy + \varphi . \Delta z$ ergiebt."

1) dy ist der Differenzencoefficient und bedeutet, wie wir wissen, eine von Δz ganz und gar unabhängige Größe, die entweder constant oder eine Function von z seyn muß (§. 203. Nro. 2), und deren Werth und Form durch die Werthe der in dem veränderlichen Theile der Function y vorkommenden Größen und durch die Form der Verbindung derselben unter einander so bestimmt ist, daß es unmöglich zwey oder mehrere Functionen y von z geben kann, deren veränderliche Theile **verschieden** sind, und denen dennoch **gleiche** Differenzencoefficienten dy zugehören. φ ferner bedeutet eine Größe, die entweder $= 0$, oder constant, oder eine Function von z und Δz zugleich ist. "Es besteht also der Differen-"zenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ einer jeden Function y von z aus zwey Gliedern dy und $\varphi . \Delta z$, und von "diesen ist das eine Glied dy jedesmal von Δz ganz und gar unabhängig, übrigens aber "so beschaffen, daß es einzig und allein **einem**, nicht aber zweyen oder mehreren von ein-"ander verschiedenen veränderlichen Theilen der Functionen y von z zugehören kann; das "andere Glied aber ist, wenn φ nicht den Werth $= 0$ hat, jedesmal von Δz abhängig."

2) Wenn man demnach für eine Function y von z den Differenzenquotienten sucht und in der Form $dy + \varphi . \Delta z$ darstellt, so behält darin das Glied dy stets **dieselbe** Form und **denselben** Werth, man mag sich Δz wie immerhin groß oder klein vorstellen, und man hat an dy eine Größe, von der man weis, daß es unter den veränderlichen Theilen der Functionen y von z nur einen **einzigen** giebt, für welchen dy **diese** Form und **diesen** Werth haben kann.

§. 207.

Das Resultat aller bisherigen Untersuchungen nun, von welchem wir in der Folge den wichtigsten Gebrauch machen werden, ist dieses:

"Mit einer jeden Function y von z steht eine Größe im Zusammenhange, welche "von Δz ganz unabhängig und entweder constant oder eine Function von z ist, und die "sowohl dem Werthe als der Form nach von der Function y dergestalt abhängt, daß "dieser Werth und diese Form für Functionen y von z, deren veränderliche Theile ver"schieden sind, durchaus **verschieden** seyn muß. Diese Größe aber ist jedesmal der Coef"ficient von Δz, den man erhält, wenn man die der Function y zugehörige Differenz "Δy sucht und in der Form $dy . \Delta z + \varphi . \Delta z^2$ darstellt, weswegen sie **Differenzen**"**coefficient** genannt werden kann, und macht einen Theil des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ "$= dy + \varphi . \Delta z$ aus."

§. 208.

Wir wissen, daß allein bey denjenigen Functionen y von z, deren algebraische Ausdrücke unter dem allgemeinen Ausdrucke $A + Bz + Cz + \ldots$ begriffen sind, die Differenzencoefficienten dy constant, bey allen übrigen Functionen y von z aber selbst wieder Functionen von z werden müssen. Es lassen sich daher auch von Functionen von z, welche Differenzencoefficienten anderer Functionen sind, Differenzen suchen, von welchen alsdann alles das gelten muß, was von den Differenzen der Functionen von z bisher gelehrt worden ist. Ist also dy eine Function von z, und man sucht die dieser Function zugehörige Differenz $\Delta(dy)$; so muß sich dieselbe in der Form $\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ darstellen lassen, wo alsdann, wenn man α nach §. 179. bezeichnen will, $\alpha = ddy$ wird, und der Differenzencoefficient ddy muß hier in Beziehung auf die Function dy eben das seyn, was dy in Beziehung auf y ist (§. 207.). Ist ferner auch ddy nicht constant, sondern eine Function von z; so kann auch wieder von diesem Differenzencoefficienten eine Differenz $\Delta(ddy)$ gesucht und in der Form $\alpha . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ dargestellt werden, wo dann, wenn man α wiederum nach §. 179. bezeichnet, $\alpha = dddy$ wird und in Beziehung auf die Function ddy eben das seyn muß, was ddy in Beziehung auf dy und dy in Beziehung auf y ist (§. 207.). Man sieht leicht ein, daß man die Schlüsse so weiter fortsetzen kann. Auf diese Art nun gelangt man zu Differenzencoefficienten von Differenzencoefficienten, und die Betrachtung derselben leitet, wie wir bald sehen werden, auf ein neues wichtiges Resultat.

§. 209.

"Man nenne, um die verschiedenen Differenzencoefficienten dy, ddy, $dddy \ldots$ "$dd \ldots ddy$ von einander zu unterscheiden, dy den **ersten**, ddy den **zweyten**, "$dddy$ den **dritten** rc. allgemein also $\underset{n}{dd \ldots ddy}$ den nten Differenzencoefficienten "der

"der Function y von z, und bezeichne um der Bequemlichkeit willen ddy durch d^2y, "dddy durch d^3y rc. mithin dd ... ddy durch d^ny."

§. 210.

"Wir wollen nun die Differenzencoefficienten d^2y, d^3y, d^4y rc. etwas genauer "betrachten."

1) d^2y ist dem Begriffe nach der **erste** Differenzencoefficient der Function dy und der **zweyte** Differenzencoefficient der Function y. Als **erster** Differenzencoefficient der Function dy ist er eine von Δz ganz unabhängige und sowohl der Form als dem Werthe nach unmittelbar durch die Form und den Werth der Function dy in der Art bestimmte Größe, daß es keine zwey oder mehrere Functionen dy geben kann, deren veränderliche Theile verschieden sind, denen aber dennoch ein und derselbe Differenzencoefficient d^2y zugehört (§. 207.). Da nun aber die Form und der Werth der Function dy eben so durch die Form und den Werth der Function y bestimmt ist, so ist auch mittelbar die Form und der Werth der Function d^2y von der Form und dem Werthe der Function y in der Art abhängig, daß es keine zwey oder mehrere Functionen y von z geben kann, deren veränderliche Theile von einander verschieden sind, und deren **zweyte** Differenzencoefficienten d^2y dennoch gleiche Form und gleichen Werth haben.

2) Ferner ist d^3y der **erste** Differenzencoefficient der Function d^2y. Da nun die Function d^2y der Form und dem Werthe nach durch die Form und den Werth der Function y nach Nro. 1) so unabänderlich bestimmt ist, daß es unmöglich zwey oder mehrere Functionen y von z geben kann, die verschiedene veränderliche Theile enthalten, und denen dennoch gleiche Differenzencoefficienten d^2y zukommen; so ist auch wiederum der Differenzencoefficient d^3y mittelbar von der Form und dem Werthe der Function y in der Art abhängig, daß er seiner Form und seinem Werthe nach nur einem einzigen veränderlichen Theile einer Function y von z, und nicht zu gleicher Zeit mehreren von einander verschiedenen veränderlichen Theilen solcher Functionen zugehört.

3) So lassen sich die Schlüsse für d^4y, d^5y ... d^ny fortsetzen, und es erhellt daraus allgemein, daß die Form und der Werth eines jeden einer Function y von z zugehörigen Differenzencoefficienten d^ny durch die Form und den Werth der Function y so bestimmt ist, daß verschiedenen mit verschiedenen veränderlichen Theilen versehenen Functionen y von z nothwendig auch verschiedene Differenzencoefficienten d^ny zukommen müssen.

§. 211.

Aus den letzteren §. §. ergiebt sich wiederum folgendes Resultat:

"Wenn der erste einer Function y von z zugehörige Differenzencoefficient d y keine "constante Größe, sondern selbst wieder eine Function von z ist; so steht mit einer solchen "Function y von z nicht nur eine Größe d y, sondern es stehen mit ihr mehrere Größen "d y, d^2 y, d^3 y ꝛc. im Zusammenhange, welche alle die Eigenschaft haben, daß sie von "Δ z ganz unabhängig und sowohl ihrer Form als ihrem Werthe nach durch die Form "und den Werth der Function y dergestalt bestimmt sind, daß es unmöglich zwey oder "mehrere mit verschiedenen veränderlichen Theilen versehene Functionen y von z geben "kann, denen sie zugleich als diese Größen zugehören könnten."

Hiermit sind nun die Untersuchungen über die Natur der Differenzen, so weit wir die Kenntniß derselben als Vorbereitung zu dem Differenzialcalcul nöthig haben, vollendet.

Zweyter Abschnitt.

Von den Differentialien der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

---

§. 212.

"Es sey der veränderliche Theil einer Function y von z wie immerhin beschaffen, alle"mal muß es doch für sie wenigstens eine Größe d y, und auch, wenn diese Größe "nicht constant, sondern eine Function von z ist, zwey, oder drey, oder mehrere "Größen d y, d^2 y, d^3 y ꝛc. geben, welche von Δ z ganz unabhängig, der Form und dem "Werthe nach aber durch die Form und den Werth des veränderlichen Theils der Function "y dergestalt bestimmt sind, daß sie nicht zugleich zweyen oder mehreren mit verschiedenen "veränderlichen Theilen versehenen Functionen y von z als dieselben Größen zugehören "können, sondern jedesmal nur einem einzigen veränderlichen Theile zugehören müssen."

Dieser Satz ist das Resultat der im vorigen Abschnitte angestellten Untersuchungen und der Grund des ganzen Differential- und Integralcalculs, wovon ersterer in diesem Abschnitte gelehrt werden soll.



§. 213.

„Die Größen dy, d^2y, d^3y ꝛc. sollen künftighin die den Functionen y von z zugehörigen **Differentialien** genannt werden, und zwar soll dy das **erste**, d^2y das **zweyte**, „d^3y das **dritte** u. s. f. **Differential** heißen. Die Differentialien d^2y, d^3y, d^4y ꝛc. „kann man auch zusammengenommen **höhere** Differentialien nennen."

Wir haben die Größen dy, d^2y, d^3y ꝛc. im vorigen Abschnitte einstweilen Differenzencoefficienten genannt, weil wir dort den Namen **Differentialien**, den man ihnen gewöhnlich giebt, noch nicht gebrauchen wollten.

§. 214.

„Der Inbegriff von Regeln, nach welchen sich für die verschiedenen Arten algebraisch „dargestellter Functionen die ihnen zugehörigen Differentialien berechnen lassen, wird gewöhn„lich der **Differentialcalcul** genannt. Die allgemeinen algebraischen Ausdrücke, durch „welche diese Regeln in der Anschauung dargestellt werden, nennt man **Differential„formeln**.

Da wir in diesem Theile unseres Werkes nur die Functionen einer einzigen veränderlichen Größe betrachten, so kommt in demselben auch nur für solche Functionen der Differentialcalcul vor.

§. 215.

„Für alle algebraischen Ausdrücke, welche Functionen y von z bezeichnen können, „lassen sich die Differentialformeln, nach welchen man die **ersten** und **höheren** Diffe„rentialien solcher Functionen auf eine bequeme Art berechnen kann, aus §. 202. nehmen."

1) Es sind im vorigen Abschnitte für die verschiedenen Arten algebraischer Ausdrücke, welche Functionen y von z bezeichnen können, die Differenzenausdrücke gesucht worden. Diese haben wir alle in der Form $dy.\Delta z + \varphi.\Delta z^2$ dargestellt, und in einem jeden derselben haben wir den Coefficienten dy dergestalt entwickelt ausgedrückt, daß sich, wenn die Form desselben mit der Form des Ausdruckes der Function y, zu der er gehört, verglichen wird, sogleich daraus die Regel ergiebt, welche bestimmt, in was für eine Form der Verbindung die im veränderlichen Theile des Ausdrucks der Function y vorkommenden Größen gebracht werden müssen, wenn daraus der Ausdruck für dy unmittelbar abgeleitet werden soll. Man darf also nur aus §. 202., worin alle Differenzenausdrücke mit

den

den Ausdrücken für die Functionen y zusammengestellt sind, die Coefficienten von Δz herausnehmen, dann erhält man Differentialformeln, nach welchen sich ganz gewiß für eine jede Function y von z das erste Differential dy bestimmen läßt.

2) Nach eben diesen Formeln aber müssen sich für eine jede Function y von z auch alle höheren Differentialien d^2y, d^3y ꝛc. bestimmen lassen. Ein jedes höheres Differential d^ny ist ja nichts anderes, als ein erstes Differential einer Function $d^{n-1}y$, und ist blos von dem ersten Differentiale dy dadurch unterschieden, daß die Function $d^{n-1}y$, welcher d^ny als erstes Differential zugehört, selbst ein Differential ist.

§. 216.

"Diese Differentialformeln, welche sich aus §. 202. ergeben, wollen wir nun der "Reihe nach betrachten und das bemerken, was sich aus der Betrachtung derselben ergiebt."

I) 1) Nach §. 100. Nro. I) muß für eine jede Function y von z, deren algebraischer Ausdruck die Form Az^n hat, das Differential

$$dy \text{ oder } d(Az^n) = nAz^{n-1}$$

seyn. Der Ausdruck Az^n aber wird

a) wenn man $n = 0$ setzt, $= Az^0 = A$, also eine constante Größe. Von einer solchen wissen wir, daß ihr keine Differenz und also auch kein Differenzencoefficient, d. h. kein Differential zugehören kann, sondern daß man von ihr sagen muß: "Es sey das ihr zugehörige Differential $= 0$." Eben diesen Satz giebt auch die dem Ausdrucke Az^n zugehörige Differentialformel nAz^{n-1}; für $n = 0$ nehmlich wird diese $= 0 . Az^{0-1} = 0$. Ferner wird der Ausdruck Az^n, wenn man

b) den Exponenten $n = 1$ setzt, $= Az$, und der ihm zugehörige Differentialausdruck nAz^{n-1} wird $= 1 . Az^{1-1} = 1 . Az^0 = A$.

"Das Differential einer Function y von z also, welche die A fache absolut "veränderliche Größe z ist, muß dem Coefficienten A gleich seyn."

c) Wenn nun in dem Ausdrucke Az der Coefficient $A = 1$ ist, so bezeichnet der Ausdruck Az nicht eigentlich eine Function y von z, sondern die absolut veränderliche Größe z selbst, und die zu Az gehörige Differentialgröße A ist dann $= 1$. Man muß also sagen:

"Das



"Das Differential einer absolut veränderlichen Größe z sey $= 1$."

Bezeichnet man dieses eben so, wie das Differential einer Function y, dadurch nehmlich, daß man dem Zeichen z den Buchstaben d vorsetzt; so hat man:

$$dz = 1.$$

2) Ferner muß nach §. 202. Nro. 1) das einer Function $y = AZ^n$, in welcher Z eine Function von z bedeutet, zugehörige Differential

$$dy \text{ oder } d(AZ^n) = nAZ^{n-1}.dZ$$

seyn. Es ist, wie man sieht, die Form dieser der Function $y = AZ^n$ zugehörigen Differentialformel von der Form der Differentialformel, welche der Function $y = Az^n$ zugehört, dadurch verschieden, daß in ersterer noch der Factor dZ steht. Wenn man aber überlegt, daß das einer absolut veränderlichen Größe z zugehörige Differential $dz = 1$ seyn muß (Nro. I. c); so fällt sogleich in die Augen, daß die Formel $nAZ^{n-1}.dZ$ die Formel nAz^{n-1} giebt, wenn man in ersterer die Function Z eine absolut veränderliche Größe z bedeuten läßt, denn alsdann wird sie $= nAz^{n-1}.dz = nAz^{n-1}$, weil $dz = 1$ seyn muß.

3) Man kann sich also in der Folge statt der beyden aus §. 202. Nro. 1) folgenden Differentialformeln ganz allein der zweyten bedienen und setzen:

"Es sey für eine jede Function $y = AZ^n$, es mag nun Z eine Function von z "oder die absolut veränderliche Größe z selbst bedeuten, das Differential

$$dy \text{ oder } d(AZ^n) = nAZ^{n-1}.dZ.$$

II) 1) Für eine Function $y = Uz$, in welcher der eine Factor U eine beliebige Function von z, der andere Factor aber die absolut veränderliche Größe z selbst ist, muß nach §. 202. Nro. 2) das Differential

$$dy \text{ oder } d(Uz) = U + z.dU$$

seyn; ist aber die Function $y = UV$, worin beyde Factoren U und V Functionen von z bedeuten, so wird das Differential

$$dy \text{ oder } d(UV) = U.dV + V.dU,$$

und dieses unterscheidet sich von ersterem dadurch, daß der Factor U noch mit dem Differentiale des zweyten Factors, mit dV nehmlich, multiplicirt ist.

2) Wenn man aber in der Function UV den Factor V = z setzt, und nun nach der Differentialformel, die der Function y = UV zugehört, von Uz das Differential nimmt; so erhält man:

$$d(Uz) = U.dz + z.dU,$$

welches = U + z.dU ist, weil dz = 1 seyn muß. Daraus sieht man, daß in der Folge statt der beyden aus §. 202. Nro. 2) sich ergebenden Differentialformeln blos die letzte gebraucht und ganz allgemein gesetzt werden kann:

"Es sey für eine jede Function y = UV, es mögen nun beyde Factoren U und "V Functionen von z seyn, oder es mag blos U eine solche Function, V aber die abso"lut veränderliche Größe z selbst bedeuten, das Differential

$$dy \text{ oder } d(UV) = U.dV + V.dU.$$

III) 1) Wenn eine Function y = UVz ist, worin die beyden Factoren U und V Functionen von z sind, der dritte Factor aber die absolut veränderliche Größe z selbst bedeutet; so muß nach §. 202. Nro. 3) das ihr zugehörige Differential

$$dy \text{ oder } d(UVz) = UV + Uz.dV + VzdU$$

seyn: ist hingegen y = UVZ und es bedeuten die drey Factoren U, V, Z Functionen von z, so muß das Differential

$$dy \text{ oder } d(UVZ) = UV.dZ + UZ.dV + VZ.dU$$

seyn. Der Unterschied zwischen beyden Differentialien fällt in die Augen.

2) Man setze nun in der Function y = UVZ den Factor Z = z und suche nach der für d(UVZ) angegebenen Differentialformel, das Differential d(UVz); hier erhält man:

$$d(UVz) = UV.dz + Uz.dV + Vz.dU,$$

und dieses ist = UV + Uz.dV + Vz.dU, denn dz ist = 1. Man sieht hieraus, daß man in der Folge ganz allgemein setzen kann:

"Es sey für eine jede Function y = UVZ, in der entweder alle drey Factoren "U, V, Z Functionen von z sind, oder nur zwey Factoren U und V solche Functionen "bedeuten, der dritte Factor Z aber = z ist, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(UVZ) = UV.dZ + UZ.dV + VZ.dU.$$

IV) 1)

IV) 1.) Nach §. 202. Nro. 4) ist das einer gebrochenen Function $y = \frac{z}{N}$, in welcher der Zähler z absolut veränderlich und der Nenner N eine Function von z ist, zugehörige Differential

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{z}{N}\right) = \frac{N - z \cdot dN}{N^2},$$

und für eine gebrochene Function $y = \frac{Z}{z}$, in welcher der Nenner z absolut veränderlich und der Zähler Z eine Function von z bedeutet, muß das Differential

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{z \cdot dZ - Z}{z^2}$$

seyn. Wenn aber die Function $y = \frac{Z}{N}$ ist, und sowohl der Zähler Z als der Nenner N Functionen von z bedeuten, so ist das Differential

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{N \cdot dZ - Z \cdot dN}{N^2}.$$

2) Man nehme die Function $y = \frac{Z}{N}$, lasse darin $Z = z$ seyn, und suche nun nach der für sie angegebenen Differentialformel das Differential $d\frac{z}{N}$; man erhält hiernach:

$$d\left(\frac{z}{N}\right) = \frac{N \cdot dz - z \cdot dN}{N^2},$$

und dieses ist $= \frac{N - z \cdot dN}{N^2}$, weil $dz = 1$ ist. Man nehme ferner die Function $y = \frac{Z}{N}$, lasse darin blos Z eine Function von z, N aber die absolut veränderliche Grösse z selbst bedeuten, und suche nun auch nach der für $\frac{Z}{N}$ angegebenen Differentialformel das Differential $d\left(\frac{Z}{z}\right)$; man erhält hiernach:

$$d\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{z \cdot dZ - Z \cdot dz}{z^2},$$

welches $= \frac{z \cdot dZ - Z}{z^2}$ ist, weil $dz = 1$ seyn muß. Man kann demnach in der Folge allgemein setzen:

"Es sey für eine jede gebrochene Function $y = \frac{Z}{N}$, es mag nun der Zähler Z
"die absolut veränderliche Größe z, und der Nenner N eine Function von z, oder der Nenner
"N die absolut veränderliche Größe z, und der Zähler Z eine Function von z seyn, oder
"es mögen Zähler und Nenner zugleich solche Functionen bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{N.dZ - Z.dN}{N^2}.$$

V) 1) Nach §. 202. Nro. 5) ist für eine gebrochene Function $y = \frac{C}{z}$, in welcher der Zähler eine constante Größe C, der Nenner aber die absolut veränderliche Größe z ist, das Differential

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{C}{z}\right) = -\frac{C}{z^2}.$$

Eben dieses Differential erhält man, wenn man $\frac{C}{z} = Cz^{-1}$ setzt, in welchem Falle der Ausdruck Cz^{-1} zu dem Ausdrucke Az^n gehört, dessen Differential $= nAz^{n-1}$ ist, (Nro. 1). Formirt man nehmlich hiernach das dem Ausdrucke Cz^{-1} zugehörige Differential, so erhält man: $-1.Cz^{-1-1} = -Cz^{-2} = -\frac{C}{z^2}$.

Ferner muß nach §. 202. Nro. 5) für eine gebrochene Function $y = \frac{C}{N}$, in welcher wiederum der Zähler eine constante Größe C, der Nenner N aber eine Function von z ist, das Differential

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C.dN}{N^2}$$

seyn. Eben dieses Differential wird erhalten, wenn man $\frac{C}{N} = CN^{-1}$ setzt, wo dann CN^{-1} zu der Form AZ^n gehört, welcher die Differentialform $nAZ^{n-1}.dZ$ zugehört. Formirt man nach dieser Differentialform das Differential $d\left(\frac{C}{N}\right)$ oder $d\left(CN^{-1}\right)$, so erhält man: $-1.CN^{-1-1}.dN = -CN^{-2}.dN = -\frac{C.dN}{N^2}$.

2) Man nehme die Function $y = \frac{C}{N}$, setze in derselben $N = z$, und suche nun für $\frac{C}{z}$ das Differential $d\left(\frac{C}{z}\right)$ nach der für $\frac{C}{N}$ angegebenen Differentialformel; man erhält hiernach:

d C

$$d\left(\frac{C}{z}\right) = -\frac{C \cdot dz}{z^2},$$

welches, weil $dz = 1$ seyn muß, $= -\frac{C}{z^2}$ ist. Daraus sieht man, daß allgemein gesetzt werden kann:

"Es sey für eine Function $y = \frac{C}{N}$, in welcher der Zähler C eine constante, der "Nenner N aber eine veränderliche Größe ist, es mag nun N eine Function von z oder "die absolut veränderliche Größe z selbst bedeuten, das Differential

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{C}{N}\right) = -\frac{C \cdot dN}{N^2}."$$

3) Es läßt sich aber die Differentialformel für $\frac{C}{N}$ auch unter die Differentialformel für $\frac{Z}{N}$ subsumiren. Es ist nehmlich nach Nro. IV) $d\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{N \cdot dZ - Z \cdot dN}{N^2}$: Setzt man nun hierin $Z = C$, so wird $dZ = dC = o$ (Nro. I) 1) a.), und man erhält:

$$d\left(\frac{C}{N}\right) = \frac{N \cdot o - C \cdot dN}{N^2} = -\frac{C \cdot dN}{N^2}.$$

VI) 1) Wenn eine Function $y = a^z$ ist, worin a eine constante und z eine absolut veränderliche Größe bedeutet; so muß nach §. 202. Nro. 6) das Differential

$$dy \text{ oder } d\left(a^z\right) = a^z \cdot \log. \text{ nat. } a$$

seyn; und wenn $y = a^Z$ und Z eine Function von z ist, so wird das Differential

$$dy \text{ oder } d\left(a^Z\right) = a^Z \cdot \log. \text{ nat. } a \cdot dZ.$$

Der Unterschied zwischen beyden Differentialformeln fällt in die Augen.

2) Man nehme nun in der Function $y = a^Z$ die Größe Z als absolut veränderlich an, setze sie also $= z$, und suche für a^z das Differential $d\left(a^z\right)$ nach der für a^Z angegebenen Differentialformel; man erhält hiernach:

 $d\,(a^z)$

$$d(a^z) = a^z . \log. \text{ nat. } a . dz,$$

welches $= a^z . \log.$ nat. a ist, weil $dz = 1$ seyn muß.

Allgemein kann man also in der Folge annehmen:

"Es sey das einer Function $y = a^Z$, in welcher Z entweder eine Function von z "oder z selbst ist, zugehörige Differential"

$$dy \text{ oder } d(a^Z) = a^Z . \log. \text{ nat. } a . dZ.$$

VII) 1) Wenn e die Basis des natürlichen Systems und z eine absolut veränderliche Größe bedeutet, so muß nach §. 202. Nro. 7) das der Function $y = e^z$ zugehörige Differential

$$dy \text{ oder } d(e^z) = e^z$$

seyn: ist hingegen der Exponent eine Function Z von z, und also die Function $y = e^Z$; so ist das Differential

$$dy \text{ oder } d(e^Z) = e^Z . dZ.$$

2) Setzt man in der Function $y = e^Z$ die Größe $Z = z$ und bestimmt nach der für e^Z angegebenen Differentialformel das Differential $d(e^Z)$, so erhält man:

$$d(e^z) = e^z . dz,$$

welches $= e^z$ ist, weil $dz = 1$ seyn muß. Allgemein also kann in der Folge angenommen werden:

"Es sey für eine jede Function $y = e^Z$, in welcher e die Basis des natürlichen "Logarithmensystems bedeutet, es mag nun Z eine Function von z oder z selbst bedeuten, "das Differential"

$$dy \text{ oder } d(e^Z) = e^Z . dZ.$$

VIII)

VIII) 1) Für eine Function $y = \log.\ art.\ z$, in welcher z absolut veränderlich ist, muß nach §. 202. Nro. 8) das Differential

$$dy \text{ oder } d\,(\log.\ art.\ z) = M.\frac{1}{z}$$

seyn, wo M den Modul des künstlichen Logarithmensystems bedeutet. Für eine Function $y = \log.\ art.\ Z$ hingegen, worin Z eine Function von z ist, muß das Differential

$$dy \text{ oder } d\,(\log.\ art.\ Z) = M.\frac{dZ}{Z}$$

seyn.

2) Setzt man, es sey in der Function $y = \log.\ art.\ Z$ die Größe $Z = z$, und sucht nun nach der für die Function $y = \log.\ art.\ Z$ angegebenen Differentialformel $d\,(\log.\ art.\ z)$, so erhält man:

$$d\,(\log.\ art.\ z) = M.\frac{dz}{z},$$

und dieses ist $= M.\frac{1}{z}$, weil $dz = 1$ ist. Allgemein also kann man annehmen:

"Es sey für eine jede Function $y = \log.\ art.\ Z$, es mag nun Z eine Function von "z, oder z selbst bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d\,(\log.\ art.\ Z) = M.\frac{dZ}{Z}.$$

IX) Aus denselben Gründen kann man statt der beyden aus §. 202. Nro. 9) folgenden Differentialformeln setzen:

"Es sey das einer Function $y = \log.\ nat.\ Z$, es mag Z eine Function von z oder "z selbst bedeuten, zugehörige Differential"

$$dy \text{ oder } d\,(\log.\ nat.\ Z) = \frac{dZ}{Z}.$$

X) Ebenso kann statt der beyden Differentialformeln, die man aus §. 202. Nro. 10) erhält, gesetzt werden:

"Es sey das einer Function $y = \log.\ art.\ (\log.\ art.\ Z)$, in welcher Z eine Fun- "ction von z, oder z selbst bedeuten kann, zugehörige Differential"

$$dy \text{ oder } d\left(\log.\ art.\ (\log.\ art.\ Z)\right) = M.\frac{dZ}{Z.\log.\ art.\ Z}.$$

XI)

XI) Für die beyden Differentialformeln, welche aus §. 202. Nro. 11) folgen, kann man daher auch annehmen:

"Es sey, wenn $y = \log. nat. (\log. nat. Z)$ ist, und Z entweder eine Function "von z oder z selbst bedeutet, das Differential

$$dy \text{ oder } d(\log. nat. (\log. nat. Z)) = \frac{dZ}{Z . \log nat. Z}.$$

XII) 1) Nach §. 202. Nro. 12) muß für eine Function $y = \text{Sin. } z$, worin z einen absolut veränderlichen Kreisbogen bedeutet, das Differential

$$dy \text{ oder } d(\text{Sin. } z) = \text{Cos. } z$$

seyn; hingegen ist für eine Function $y = \text{Sin. } Z$, in welcher der Kreisbogen Z eine Function von z ist, das Differential

$$dy \text{ oder } d(\text{Sin. } Z) = \text{Cos. } Z . dZ.$$

2) Wenn man nach der für Sin. Z hier angegebenen Differentialformel das Differential d (Sin. z) bestimmt, so erhält man:

$$d(\text{Sin. } z) = \text{Cos. } z . dz,$$

und dieses ist wirklich $= \text{Cos. } z$, weil $dz = 1$ ist. Man sieht hieraus, daß man überhaupt genommen setzen kann:

"Es sey für eine Function $y = \text{Sin. } Z$, es mag nun Z eine Function von z oder "z selbst bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Sin. } Z) = \text{Cos. } Z . dZ.$$

XIII) Aus demselben Grunde kann man statt der beyden aus §. 202. Nro. 13) folgenden Differentialformeln blos die letztere gebrauchen und allgemein setzen:

"Es sey, wenn die Function $y = \text{Cos. } Z$ ist, jedesmal, es mag nun Z eine Function von z, oder die absolut veränderliche Größe z selbst bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Cos. } Z) = - \text{Sin. } Z . dZ.$$

XIV) Ebenso kann man statt der beyden Differentialformeln, die aus §. 202. Nro. 14) folgen, blos die zweyte gebrauchen und annehmen:

"Es

"Es sey für eine jede Function y = Sin. verſ. Z, es mag Z eine Function von z "oder z ſelbſt bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Sin. verſ. } Z) = \text{Sin. } Z \,.\, dZ.$$

XV) Statt der beyden aus §. 202. Nro. 15) folgenden Differentialformeln kann man auf dieſelbe Art ſetzen:

"Es ſey jedesmal, wenn eine Function y = Coſ. verſ. Z iſt, es mag nun Z eine "Function von z oder die abſolut veränderliche Größe z ſelbſt bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Coſ. verſ. } Z) = -\text{Coſ. } Z \,.\, dZ.$$

XVI) Für die beyden Differentialformeln, die man aus §. 202. Nro. 16) erhält, kann man ſich aus demſelben Grunde blos der zweyten bedienen, mithin ſetzen:

"Es ſey, wenn eine Function y = Tang. Z iſt, es mag nun Z eine Function "von z oder z ſelbſt ſeyn, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Tang. } Z) = \text{Sec. } Z^2 \,.\, dZ.$$

XVII) Auf dieſelbe Art kann von den beyden aus §. 202. Nro. 17) folgenden Differentialformeln blos die zweyte gebraucht und alſo allgemein angenommen werden:

"Es ſey für eine jede Function y = Cot. Z, Z mag nun eine Function von z "oder z ſelbſt bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Cot. } Z) = -\text{Coſec. } Z^2 \,.\, dZ.$$

XVIII) Statt der beyden Differentialformeln, die ſich aus §. 202. Nro. 18) ergeben, kann man ebenfalls blos die zweyte gebrauchen und ſetzen:

"Es ſey, wenn eine Function y = Sec. Z iſt, jedesmal, es mag nun Z eine Fun"ction von z oder z ſelbſt ſeyn, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Sec. } Z) = \text{Tang. } Z \times \text{Sec. } Z \,.\, dZ.$$

XIX) Für die beyden Differentialformeln endlich, welche aus §. 202. Nro. 19) folgen, kann man ſich blos der einen bedienen und allgemein ſetzen;

"Es ſey für eine jede Function y = Coſec. Z, es mag Z eine Function von z oder "die abſolut veränderliche Größe z ſelbſt bedeuten, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(\text{Coſec. } Z) = -\text{Cot. } Z \times \text{Coſec. } Z \,.\, dZ.$$

XX) Für eine Function $y = U \pm V \pm W \ldots$ muß nach §. 202. Nro. 20) das Differential

$$dy \text{ oder } d(U \pm V \pm W \pm \ldots) = dU \pm dV \pm dW \pm \ldots$$

seyn. Diese Differentialformel ist unter der Voraussetzung gesucht, daß alle Glieder U, V, W ic. der Function y Functionen von z seyen. Wäre nun ein Glied *unter ihnen*, z. E. das Glied W, constant; so würde $dW = 0$. Wäre ferner ein Glied *unter ihnen*, z. E. das Glied V, eine Function von der Form Az^n, worin $A = 1$ und $n = 1$ *ist*, d. h. die absolut veränderliche Größe z selbst; so wäre $dV = dz = 1$ (Nro. I). Man sieht also, daß man in der Folge ganz allgemein setzen kann:

"Es sey für eine jede Function $y = U \pm V \pm W \pm \ldots$, welche eine algebraische Summe aus mehreren Gliedern ist, es mögen nun entweder alle diese Glieder Functionen von z bedeuten, oder es mögen einige derselben constant oder die absolut veränderliche Größe z selbst seyn, das Differential"

$$dy \text{ oder } d(U \pm V \pm W \pm \ldots) = dU \pm dV \pm dW \pm \ldots$$

XXI) Durch die bisherigen Bemerkungen ist die Anzahl der Differentialformeln, die sich aus §. 202. ergeben, vereinfacht, und es sind nun alle Differentialformeln so angegeben, wie sie bey der sonst üblichen Darstellungsart des Differentialcalculs erhalten werden. Es wird für den Anfänger bequem seyn, wenn wir die angegebenen Differentialformeln mit den Ausdrücken der Functionen y, welchen sie zugehören, in einer Tafel zusammen stellen. Diese folgt hier.

Functionen y	Differentialien dy.
1) AZ^n	$d(AZ^n) = n.AZ^{n-1}.\,dZ$
2) UV	$d(UV) = U.dV + V.dU$
3) UVZ	$d(UVZ) = UV.dZ + UZ.dV + VZ.dU$
4) $\frac{Z}{N}$	$d(\frac{Z}{N}) = \frac{N.dZ - Z.dN}{N^2}$
5) $\frac{C}{N}$	$d(\frac{C}{N}) = -\frac{C.dN}{N^2}$
6) a^Z	$d(a^Z) = a^Z.\,\text{log. nat. } a.\,dZ$
7) e^Z	$d(e^Z) = e^Z.\,dZ$

8)

Functionen y.	Differentialien dy
8) log. art. Z	$d(\text{log. art. } Z) = M\frac{dZ}{Z}$
9) log. nat. Z	$d(\text{log. nat. } Z) = \frac{dZ}{Z}$
10) log. art. (log. art. Z)	$d\left(\text{l. art. } Z (\text{l. art. } Z)\right) = M \cdot \frac{dZ}{Z \,.\, \text{log. art. } Z}$
11) log. nat. (log. nat. Z)	$d\left(\text{l. nat. } (\text{l. nat. } Z)\right) = \frac{dZ}{Z \,.\, \text{log. nat. } Z}$
12) Sin. Z	$d(\text{Sin. } Z) = \text{Cof. } Z \,.\, dZ$
13) Cof. Z	$d(\text{Cof. } Z) = -\text{Sin. } Z \,.\, dZ$
14) Sin. verf Z	$d(\text{Sin. verf. } Z) = \text{Sin. } Z \,.\, dZ$
15) Cof. verf. Z	$d(\text{Cof. verf. } Z) = -\text{Cof. } Z \,.\, dZ$
16) Tang. Z	$d(\text{Tang. } Z) = \text{Sec. } Z^2 \,.\, dZ$
17) Cot. Z	$d(\text{Cot. } Z) = -\text{Cofec. } Z^2 \,.\, dZ$
18) Sec. Z	$d(\text{Sec. } Z) = \text{Tang. } Z \times \text{Sec. } Z \,.\, dZ$
19) Cofec. Z	$d(\text{Cofec. } Z) = -\text{Cot. } Z \times \text{Cofec } Z \,.\, dZ$
20) $U \pm V \pm W \pm \ldots$	$d(U \pm V \pm W \pm \ldots) = dU \pm dV \pm dW \pm \ldots$

XXII) Wenn man nun nach den in dieser Tafel stehenden Differentialformeln für bestimmte vorgegebene Functionen y von z die ihnen zugehörigen Differentialien berechnet, welches in der Folge geschehen soll; so müssen, im Falle man sich bey dieser Anwendung der Differentialformeln unter den Größen U, V, W, X, Z nicht Functionen von z, sondern die absolut veränderliche Größe selbst vorzustellen hat, die in den Differentialformeln stehenden Factoren dU, dV, dW, dX, dZ dem Differentiale dz gleichgesetzt werden, und man kann dann in den nach den erwähnten Differentialfolmeln berechneten Differentialien der Functionen y das Zeichen dz stehen lassen, oder auch, weil $dz = 1$ ist, dafür den Werth 1 setzen. Dieses ist für den Werth der Differentialien ganz gleichgültig.

§. 217.

"In der Folge wollen wir jedesmal in den Differentialausdrücken, die sich ergeben, "wenn wir für bestimmte vorgegebene Functionen y von z die Differentialien nach den

"angegebenen Differentialformeln berechnen, da, wo das Differential dz der absolut veränderlichen Größe z zu stehen kommt, dz stehen lassen, und nicht dafür dessen Werth "$= 1$ setzen".

Auf diese Art bleiben dann alle Differentialausdrücke eben die, welche man nach der sonst üblichen Darstellungsart des Differentialcalculs erhält.

§. 218.

"Die zwischen dem Ausdrucke, welcher das einer Function y von z zugehörige Differential $d^n y$ algebraisch darstellt, und dem Zeichen $d^n y$ Statt habende Gleichung soll "die der Function y zugehörige $n$te **Differentialgleichung** genannt werden."

Die in voriger Tafel stehenden Gleichungen zwischen den Ausdrücken, welche die **ersten** Differentialien dy algebraisch darstellen, und dem Zeichen dy sind also **erste** Differentialgleichungen, und zwar, wie man leicht einsieht, **allgemeine erste** Differentialgleichungen.

§. 219.

"Ueber die Differentialgleichungen ist hier vornehmlich folgendes zu merken."

1) Eine Differentialgleichung ist, wenn die Function y, welcher sie zugehört, nicht aus einer ohne Ende fortlaufenden Reihe von veränderlichen Gliedern U, V, W rc. besteht, jedesmal eine **vollständige** Gleichung, und nicht, wie bey einigen sonst üblichen und ganz verkehrten Darstellungen des Differentialcalculs behauptet wird, eine Gleichung, in welcher der auf der einen Seite des Gleichheitszeichens stehende algebraische Ausdruck blos beynahe das ausdrückt, was auf der andern Seite durch dy bezeichnet ist. Der auf der einen Seite des Gleichheitszeichens stehende Ausdruck bezeichnet eine entweder constante oder von z abhängige Größe, deren Werth und Form durch den Werth und die Form der Function unabänderlich bestimmt ist, und giebt an, wie diese Größe aus den im veränderlichen Theile der Function y vorkommenden Größe formirt werden muß; das auf der andern Seite des Gleichheitszeichens stehende Zeichen dy aber bezeichnet dieselbe Größe, aber nur im Allgemeinen, ohne dieselbe algebraisch darzustellen.

2) In einer Differentialgleichung darf man daher, so wie in jeder ordentlichen Gleichung, eine jede von den auf der einen Seite des Gleichheitszeichens stehenden Größen nach den bekannten Regeln auf die andere Seite schaffen, und es muß hierbey jedesmal eine vollkommen richtige Gleichung entstehen.

3) Wenn

3) Wenn die einer Function y von z zugehörige erste Differentialgleichung in der Form

$$dy = \alpha . dz$$

dargestellt wird, so ist eigentlich, weil dz = 1 seyn muß, α der Werth von dy. Schafft man daher in einer solchen Gleichung den Factor α auf die andere Seite, so erhält man:

$$\frac{dy}{\alpha} = dz = 1,$$

so wie sichs gehört, denn eine Größe dy oder α ist in sich selbst einmal enthalten. Schafft man ferner dz auf die andere Seite, so erhält man:

$$\frac{dy}{dz} = \alpha,$$

und dieses heißt: $\frac{dy}{1}$ oder dy ist = α, weiter aber heißt es nichts. — —

4) Wenn man aus einer für eine Function y von z gesuchten und in der Form dy = α . dz dargestellten Differentialgleichung die Gleichung

$$dz = \frac{1}{\alpha} . dy$$

ableitet so bedeutet in dieser zweyten Gleichung, so wie in der ersten, dz das Differential der absolut veränderlichen Größe z, dessen Werth = 1 ist, und dy das Differential α der Function y von z, welches entweder eine constante Größe oder selbst wieder eine Function von z seyn muß. Man könnte sich aber auch bey der Gleichung

$$dz = \frac{1}{\alpha} . dy$$

vorstellen wollen: Es bedeute dy das Differential einer absolut veränderlichen Größe y und es sey also dy = 1, dz aber bedeute das Differential einer Function z von y und sey = $\frac{1}{\alpha}$. Hier entsteht nun die Frage:

"Kann man, wenn für eine Function y von z das Differential dy gesucht und in
"der Gleichung dy = α.dz dargestellt ist, bey der aus dieser Gleichung folgenden Glei-
"chung dz = $\frac{1}{\alpha}$. dy die Begriffe, unter welchen dy und dz vorgestellt werden, ver-
"wechseln, also dy als ein Differential einer absolut veränderlichen Größe y, welches den
"Werth = 1 hat, dz aber als das Differential einer Function z von y, dessen Werth
"= $\frac{1}{\alpha}$ ist, sich vorstellen, so daß dann die so vorgestellte Gleichung dz = $\frac{1}{\alpha}$ dy wirk-

 "lich

„lich eine Gleichung ist, die als Differentialgleichung einer gewissen Function y von z „zugehört“?

Die Lehren der zunächst folgenden §. §. haben die Entscheidung dieser Frage zum Gegenstand.

§. 220.

1) Man setze, es sey die Gleichung zwischen dem Zeichen y, womit eine Function von z bezeichnet ist, und dem Ausdrucke Z, welcher die Function y algebraisch darstellt, so beschaffen, daß man daraus eine Gleichung ableiten kann, in welcher z allein auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht, auf der andern aber ein algebraischer Ausdruck Y vorkommt, welcher aus y und den Größen formirt ist, die in der Gleichung $y = Z$ mit z in Verbindung standen. In einer solchen aus der Gleichung $y = Z$ abgeleiteten Gleichung $Y = z$ nun kann man die Größe z, welche in der Gleichung $y = Z$ als absolut veränderlich betrachtet wurde, als relativ veränderlich, die Größe y aber, welche in der Gleichung $y = Z$ relativ veränderlich war, als absolut veränderlich ansehen. So erhält man dann aus der Function $y = Z$ eine Function $z = Y$, deren Natur durch die Natur der Function $y = Z$, aus welcher sie abgeleitet wurde, bestimmt ist, und die, wie sich leicht einsehen läßt, dergestalt beschaffen seyn muß, daß sie für einen jeden bestimmten Werth $= w$ der absolut veränderlichen Größe y einen Werth $z = W$ giebt, welcher Werth W, wenn man ihn in der Function $y = Z$ statt z gebraucht, für y den Werth $= w$ erzeugt.

Aus der Gleichung $y = \frac{3z + 5}{z}$ z. E. läßt sich, wenn man alle Größen von z hinweg und auf die andere Seite schafft, die Gleichung

$$z = \frac{5}{y - 3}$$

ableiten. Für $y = 8$ wird hier $z = \frac{5}{8 - 3} = 1$, und für $z = 1$ wird wiederum $y = \frac{3 + 5}{1} = 8$; für $y = \frac{11}{2}$ ferner wird $z = \frac{5}{\frac{11}{2} - 3} = 2$, und für $z = 2$ wird wiederum $y = \frac{3.2 + 5}{2} = \frac{11}{2}$.

2) Es kann aber in einer Gleichung $y = Z$ die in dem Ausdrucke Z stehende Größe z so formirt seyn, daß man daraus nach den gewöhnlichen Auflösungsregeln der Gleichungen keine Gleichung $z = Y$ ableiten kann, in welcher z ganz genau durch y aus-



ausgedrückt ist. In diesem Falle muß man sich, wenn man dennoch eine Gleichung $z = Y$ ableiten will, einer solchen Gleichung blos nähern, welches auf verschiedenen Wegen, die in dem ersten Theile der Analysis gezeigt werden müssen, geschehen kann. So haben wir z. E. durch die Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten in §. 133. aus der Gleichung, in welcher der Logarithmus als eine Function der Zahl dargestellt war, eine andere Gleichung abgeleitet, in welcher die Zahl als eine Function des Logarithmus dargestellt ist. Auf dem ähnlichen Wege ist in §. 150. aus der Gleichung, in welcher der Sinus eines Kreisbogens als eine Function des Bogens dargestellt wurde, eine Gleichung abgeleitet worden, welche den Kreisbogen als eine Function des Sinus darstellt.

3) "Die durch einen algebraischen Ausdruck Y dargestellte Function z von y, die "man erhält, wenn man aus einer Gleichung zwischen dem algebraischen Ausdrucke Z einer "Function y von z und dem Zeichen y Statt findenden Gleichung $y = Z$ entweder ganz "genau oder doch näherungsweise eine Gleichung $z = Y$ ableitet und in dieser z als "relativ, die in dem Ausdrucke Y stehende Größe y aber als absolut veränderlich betrachtet, "soll die der Function $y = Z$ zugehörige **umgekehrte** Function genannt werden."

Aus der Gleichung $y = \sqrt{(2r.z - z^2)}$ z. E. folgt, wenn man aus derselben z sucht, die Gleichung.

$$r \pm \sqrt{(r^2 - y^2)} = z.$$

Betrachtet man nun hierin y als absolut, z aber als relativ veränderlich, so ist z eine Function von y und z heißt die der Function $y = \sqrt{(2r.z - z^2)}$ zugehörige **umgekehrte** Function.

§. 221.

"Es soll die Relation, welche zwischen dem Differentiale dy einer Function y von z "und dem Differentiale dz der **umgekehrten** Function z von y Statt hat, gezeigt werden."

1) Der Ausdruck, welcher die Function y von z algebraisch darstellt, sey kurz durch Z bezeichnet und es sey also $y = Z$. Der Ausdruck ferner, welcher die der Function y von z zugehörige **umgekehrte** Function z von y algebraisch darstellt, sey kurz durch Y bezeichnet und es sey also $z = Y$.

2) Nun mag bey der Function $y = Z$ die Form des algebraischen Ausdruckes Z wie immerhin beschaffen seyn, ganz gewiß muß sich doch die der Function y zugehörige Differenz Δy durch eine Gleichung von der nachstehenden Form

$$\Delta y = \alpha.\Delta z + \beta.\Delta z^2 + \gamma.\Delta z^3 + \delta.\Delta z^4 + \ldots$$

aus-

ausdrücken lassen (§. 177. Nro. 2.), worin $\alpha = dy$ ist (§. 179.) und entweder eine constante Größe, oder eine Function von z bedeutet, die Coefficienten $\beta, \gamma, \delta \ldots$ aber von Δz ganz unabhängig sind (§. 175.).

Ferner mag auch bey der **umgekehrten** Function $z = Y$ die Form des algebraischen Ausdruckes Y beschaffen seyn, wie sie wolle, es muß sich auch bey dieser Function z von y die Differenz Δz durch folgende Gleichung

$$\Delta z = \alpha' . \Delta y + \beta' . \Delta y^2 + \gamma' . \Delta y^3 + \delta' . \Delta y^4 + \ldots$$

darstellen lassen (§. 177. Nro. 2.), in welcher $\alpha' = dz$ ist (§. 179.) und entweder eine constante Größe, oder eine Function von der absolut veränderlichen Größe y bedeutet, die Coefficienten $\beta' . \gamma', \delta'$ rc. aber Größen bedeuten, die von der Differenz Δy der absolut veränderlichen Größe y ganz und gar unabhängig sind. (§. 175.).

3) Weil nun die Differenz einer absolut veränderlichen Größe beliebig groß angenommen werden kann (§. 170.), so darf man setzen: es sey bey der **umgekehrten** Function $z = Y$ die Differenz Δy der absolut veränderlichen Größe y gerade so groß genommen, als die relative Differenz Δy der Function $y = Z$ ist, es sey also bey der **umgekehrten** Function $z = Y$ die ihr zugehörige Differenz $\Delta z = \alpha' . \Delta y + \beta' . \Delta y^2 + \gamma' . \Delta y^3 + \ldots$ für eine Differenz Δy gesucht, welche $= \alpha . \Delta z + \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 + \ldots$, ist. Man setze, es sey dieß; dann darf man in die der **umgekehrten** Function $z = Y$ zugehörige Differenzengleichung

$$\Delta z = \alpha' . \Delta y + \beta' . \Delta y^2 + \gamma' . \Delta y^3 + \delta' . \Delta y^4 + \ldots$$

statt Δy den Werth $\alpha . \Delta z + \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 + \ldots$ setzen. Nimmt man nun diese Substitution vor, so erhält man:

$$\Delta z = \alpha' (\alpha . \Delta z + \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 \ldots) + \beta' (\alpha . \Delta z + \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 + \ldots)^2$$
$$+ \gamma' (\alpha . \Delta z + \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 + \ldots)^3 + \delta' (\alpha . \Delta z + \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 + \ldots)^4 + \ldots,$$

oder

$$\Delta z = \alpha' (\alpha + \beta . \Delta z + \gamma . \Delta z^2 + \ldots) \Delta z + \beta' (\alpha + \beta . \Delta z + \gamma . \Delta z^2 + \ldots)^2 . \Delta z^2$$
$$+ \gamma' (\alpha + \beta . \Delta z + \gamma . \Delta z^2 \ldots)^3 . \Delta z^3 + \delta' (\alpha + \beta . \Delta z + \gamma . \Delta z^2 + \ldots)^4 . \Delta z^4 + \ldots,$$

und diese Gleichung muß, wie sich leicht einsehen läßt, für einen jeden beliebigen Werth von Δz richtig seyn.

4) Diese Gleichung kann entwickelter dargestellt werden. Wenn man nehmlich nach §. 31. die Potenz $(\alpha + \beta . \Delta z + \gamma . \Delta z^2 + \ldots)^2$ entwickelt, so erhält man ganz gewiß

wiß einen Ausdruck $a + b.\Delta z + c.\Delta z^2 + d.\Delta z^3 + \ldots$, in welchem die Coefficienten a, b, c, d 2c. durch die Coefficienten α, β, γ 2c. bestimmt und von Δz ganz unabhängig sind, weil die Größen α. β, γ 2c. nicht von Δz abhängen. Eben so wird nach §. 31. durch Entwickelung;

$$\text{die Potenz } (\alpha + \beta.\Delta z + \gamma.\Delta z^2 + \ldots)^3 = a' + b'.\Delta z + c'.\Delta z^2 + d'.\Delta z^3 + \ldots$$
$$\text{die Potenz } (\alpha + \beta.\Delta z + \gamma.\Delta z^2 + \ldots)^4 = a'' + b''.\Delta z + c''.\Delta z^2 + d''.\Delta z^3 + \ldots$$

u. s. w.

werden müssen, worin die Größen a', b', $c' \ldots$; a'', b'', $c'' \ldots$; u. s. w. ebenfalls von Δz ganz unabhängig sind. Setzt man nun die durch Entwickelung der genannten Potenzen erhaltenen Ausdrücke in die am Ende von Nro. 3) angegebene Gleichung und dividirt alsdann die neue Gleichung auf beyden Seiten durch Δz; so erhält man:

$$1 = \alpha'(\alpha + \beta.\Delta z + \gamma.\Delta z^2 + \delta.\Delta z^3 + \ldots) + \beta'(a + b.\Delta z + c.\Delta z^2 + d.\Delta z^3 + \ldots)\Delta z$$
$$+ \gamma'(a' + b'.\Delta z + c'.\Delta z^2 + d'.\Delta z^3 + \ldots)\Delta z^2 + \delta'(a'' + b''.\Delta z + c''.\Delta z^2 + d''.\Delta z^3 + \ldots)\Delta z^3 . + \ldots$$

5) Man nehme jetzt diese Gleichung, löse alle Productglieder in derselben auf, reducire sie alsdann auf o, und ordne alle Glieder nach Potenzen von Δz; hierdurch erhält man folgende Gleichung:

$$0 = \left\{ 1 - \alpha'\alpha \;\left|\begin{array}{l} -\alpha'\beta \\ -\beta' a \end{array}\right| \Delta z \;\left|\begin{array}{l} -\alpha'\gamma \\ -\beta' b \\ -\gamma' a' \end{array}\right| \Delta z^2 \;\left|\begin{array}{l} -\alpha'\delta \\ -\beta' c \\ -\gamma' b' \\ -\delta' a'' \\ \vdots \end{array}\right| \Delta z^3 - \ldots, \right.$$

in welcher ganz gewiß die Größe $\alpha'\alpha$ und so auch ein jeder von den Coefficienten der Potenzen Δz, Δz^2, Δz^3 2c. von Δz ganz unabhängig ist.

6) Diese Gleichung muß nothwendig für einen jeden beliebigen Werth von Δz Statt haben, denn sie ist aus der Gleichung in Nro. 3) gefolgert, welche ganz gewiß für einen jeden Werth von Δz richtig ist.

Sie ist aber eine auf o reducirte Gleichung, in welcher der auf der einen Seite stehende Ausdruck nach Potenzen der Größe Δz geordnet ist, und in der die Coefficienten dieser Potenzen von Δz ganz unabhängig sind. Eine solche Gleichung kann unmög-

 lich

lich für einen jeden beliebigen Werth von Δz bestehen, wenn nicht das absolute Glied und auch ein jeder Coefficient der Potenzen von Δz den Werth $= 0$ hat (§. 20). Man kann also, da die erwähnte Gleichung für einen jeden Werth von Δz richtig seyn muß, versichert seyn, daß auch folgende Gleichungen richtig sind:

$$1 - \alpha . \alpha' = 0,$$

$$\alpha \beta' + \beta' . \alpha = 0,$$

$$\alpha \gamma' + \beta b' + \gamma \alpha' = 0$$

u. s. w.

7) Hier haben wir nun eine Gleichung für die beyden Größen α' und α, von welchen die Größe α das der Function $y = Z$ zugehörige Differential dy und die Größe α' das der umgekehrten Function $z = Y$ zugehörige Differential dz bedeutet (Nro. 2.), die Gleichung $1 - \alpha' . \alpha$ nehmlich, aus welcher die Gleichungen

$$1 = \alpha' . \alpha \text{ und } \frac{1}{\alpha} = \alpha'$$

folgen. Aus diesen aber ergiebt sich folgende Relation zwischen den Differentialien zweyer Functionen $y = Z$ und $z = Y$, von welchen die letzte die umgekehrte der ersten ist:

"Das Product beyder Differentialien ist allemal $= 1$. Wenn man also für eine "Function $y = Z$ das Differential α oder dy hat und es in die 1 dividirt, so ist jedes "mal der Quotient $\frac{1}{\alpha}$ dem Differentiale α' oder dz der umgekehrten Function "$z = Y$ gleich."

§. 222.

"Nun kann die in §. 219. Nro. 4) aufgestellte Frage leicht entschieden werden, welches hier geschehen soll."

1) Man setze, es sey für eine Function y von z nach den in §. 216. Nro. XXI. angegebenen Differentialformeln das Differential gesucht und

$$dy = \alpha . dz$$

erhalten worden, worin $dz = 1$ ist.

Man setze ferner, es sey auch für die der Function y von z zugehörige umgekehrte Function z von y das Differential nach den erwähnten Differentialformeln bestimmt worden und man habe

$$dz = \alpha'.dy$$

erhalten, worin jetzt dy das Differential einer absolut veränderlichen Größe y ist und den Werth = 1 hat.

2) Da nun, wenn das Differential einer Function y von z den Werth = α und das Differential der umgekehrten Function z von y den Werth = α′ hat, der Werth $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ seyn muß (§. 221. Nro. 7); so kann man in der Gleichung dz = α′.dy statt α′ auch $\frac{1}{\alpha}$ setzen: hierdurch erhält man folgende Gleichung:

$$dz = \frac{1}{\alpha}.dy.$$

3) Man nehme jetzt die der Function y von z zugehörige Differentialgleichung

$$dy = \alpha.dz$$

und ferner auch die der umgekehrten Function z von y zugehörige Differentialgleichung

$$dz = \frac{1}{\alpha}.dy$$

und vergleiche sie unter einander. Man sieht, daß die letzte aus der ersten erhalten werden kann, wenn man in der ersten α auf die andere Seite schafft und die Begriffe, unter welchen dy und dz in ihr vorgestellt werden, verwechselt, sich nehmlich dy, welches in ihr als das Differential einer Function y von z vorgestellt wird, als das Differential einer absolut veränderlichen Größe vorstellt, und dz, welches als das Differential einer absolut veränderlichen Größe z gedacht wird, als das Differential einer Function z von y betrachtet.

4) "Wenn also für eine Function y von z das Differential gesucht und in der Glei-"chung

$$dy = \alpha.dz$$

"dargestellt wird, in welcher dz = 1 ist, und man leitet daraus, indem man α auf die "andere Seite schafft, die Gleichung

$$dz = \frac{1}{\alpha}.dy$$

"ab, und betrachtet dz als das Differential einer Function z von y, dy aber als das "Differential der absolut veränderlichen Größe y; so ist die so vorgestellte Gleichung

$$dz = \frac{1}{\alpha}.dy$$

 "alle-

"allemal eine wirkliche einer Function z von y zugehörige Differentialgleichung, und "zwar ist diese Function z von y, der sie zugehört, die umgekehrte von derjenigen Fun-"ction y von z, aus deren Differentialgleichung $dy = \alpha . dz$ die Gleichung $dz = \frac{1}{\alpha} . dy$ "abgeleitet ist."

§. 223.

"Für eine jede einer Function y von z zugehörige umgekehrte Function z von y, "kann man also das Differential dz finden, wenn man auch die Function z von y selbst "nicht kennt. Man darf nur für die Function y von z die Differentialgleichung

$$dy = \alpha . dz$$

"nach §. 216. Nro. XXI) suchen, aus dieser alsdann die Gleichung

$$dz = \frac{1}{\alpha} . dy$$

"ableiten, und in letzterer dy als ein Differential einer absolut veränderlichen Größe y, "dz aber als ein Differential einer Function z von dieser Größe y betrachten."

Dieser Satz soll nun in dem folgenden §. auf mehrere Functionen angewendet werden. Wir wollen hierzu die trigonometrischen wählen, in welchen die Kreisbögen als absolut veränderliche Größen z und die ihnen zugehörigen trigonometrischen Linien als Functionen y dieser Bögen z betrachtet werden, also die Functionen: y = Sin. z, y = Cos. z, y = Tang. z ꝛc. Die Differentialformeln für diese Functionen sind in §. 216. Nro. XXI) angegeben. Die diesen Functionen zugehörigen umgekehrten Functionen sind die, in welchen man die trigonometrischen Linien als absolut veränderliche Größen y, und die ihnen zugehörigen Kreisbögen als ihre Functionen z betrachtet, also die Functionen: z = Arc. (Sin. = y), z = Arc. (Cos. = y), z = Arc. (Tang. = y) ꝛc. Für diese Functionen sind in §. 151. die algebraischen Ausdrücke gesucht worden (dort wurden die Linien anders bezeichnet, wodurch man sich nicht irre führen lassen muß), und aus diesen Ausdrücken hätten wir die Ausdrücke für die ihnen zugehörigen Differenzen berechnen, und daraus die ihnen zugehörigen Differentialformeln nehmen können. Wir haben uns aber dieser Mühe überheben wollen (§. 199.), und können nun die Differentialformeln dieser Functionen auf einem viel leichteren Wege finden.

§. 224.

1) 1) Für eine Function y = Sin. z ist nach §. 216. Nro. XXI. 12) das Differential

dy

$$dy \text{ oder } d(\text{Sin. } z) = \text{Cos. } z \, dz.$$

Daraus folgt nun für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.} (\text{Sin.} = y)$ das Differential

$$dz \text{ oder } d(\text{Arc.} (\text{Sin.} = y)) = \frac{dy}{\text{Cos. } z} \text{ oder } \frac{d(\text{Sin. } z)}{\text{Cos. } z}$$

2) Die Gleichung $d(\text{Arc.} (\text{Sin.} = y)) = \frac{dy}{\text{Cos. } z}$ kann auch noch anders ausgedrückt werden. Wenn nehmlich $\text{Sin. } z = y$ ist, so muß $\text{Cos. } z$ oder $\sqrt{(1 - \text{Sin. } z^2)} = \sqrt{(1 - y^2)}$ seyn. Setzt man diesen Ausdruck statt $\text{Cos. } z$ in der obigen Gleichung, so erhält man:

$$d(\text{Arc.} (\text{Sin.} = y)) = \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$$

II) 1) Für eine Function $y = \text{Cos. } z$ muß nach §. 216. Nro. XXI. 13)

$$dy \text{ oder } d(\text{Cos. } z) = - \text{Sin. } z \, . \, dz.$$

seyn. Daraus folgt für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.} (\text{Cos.} = y)$

$$dz \text{ oder } d(\text{Arc.} (\text{Cos.} = y)) = - \frac{dy}{\text{Sin. } z} \text{ oder } \frac{d(\text{Cos. } z)}{\text{Sin. } z}$$

2) Statt der Gleichung $d(\text{Arc.} (\text{Cos.} = y)) = - \frac{dy}{\text{Sin. } z}$ kann man auch setzen:

$$d(\text{Arc.} (\text{Cos.} = y)) = - \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}};$$

denn wenn $\text{Cos. } z = y$ ist, so muß $\text{Sin. } z = \sqrt{(1 - y^2)}$ seyn.

III) 1) Für eine Function $y = \text{Sin. vers. } z$ muß nach §. 216. Nro. XXI. 14)

$$dy \text{ oder } d(\text{Sin. vers. } z) = \text{Sin. } z \, . \, dz$$

seyn. Hieraus folgt für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.} (\text{Sin. vers.} = y)$

$$dz \text{ oder } d(\text{Arc.} (\text{Sin. vers.} = y)) = \frac{dy}{\text{Sin. } z} \text{ oder } \frac{d(\text{Sin. vers. } z)}{\text{Sin. } z}$$

2) Für die Gleichung $d(\text{Arc.} (\text{Sin. vers.} = y)) = \frac{dy}{\text{Sin. } z}$ kann man auch setzen:

$$d(\text{Arc.} (\text{Sin. vers.} = y)) = \frac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}}$$

Es ist nehmlich für den Sin. tot. $= 1$ der $\text{Sin. } z = \sqrt{(1 - \text{Cos. } z^2)}$ und $\text{Cos. } z = 1 - \text{Sin. vers. } z$; also muß $\text{Sin. } z = \sqrt{(1 - (1 - \text{Sin. vers. } z)^2)}$ oder, wenn $\text{Sin. vers. } z = y$ ist, $\text{Sin. } z = \sqrt{(1 - (1 - y)^2)} = \sqrt{(2y - y^2)}$ seyn.

IV)

IV) 1) Wenn die Function $y = \text{Cos. vers. } z$ ist, so muß nach §. 216. Nro. XXI. 15)

$$dy \text{ oder } d\,(\text{Cos. vers. } z) = -\,\text{Cos. } z \,.\, dz$$

seyn. Daraus ergiebt sich für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.}(\text{Cos. vers.} = y)$

$$dz \text{ oder } d\left(\text{Arc.}(\text{Cos. vers.} = y)\right) = -\frac{dy}{\text{Cos. } z} \text{ oder } -\frac{d\,(\text{Cos. vers. } z)}{\text{Cos. } z}$$

2) Für $d\left(\text{Arc.}(\text{Cos. vers.} = y)\right) = -\frac{dy}{\text{Cos. } z}$ kann auch gesetzt werden:

$$d\left(\text{Arc.}(\text{Cos. vers.} = y)\right) = -\frac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}}$$

Weil nehmlich für den Sin. tot. = 1 der $\text{Cos. } z = \sqrt{(1 - \text{Sin. } z^2)}$ ist, und ferner auch $\text{Sin. } z = 1 - \text{Cos. vers. } z$ seyn muß; so kann $\text{Cos. } z = \sqrt{(1 - (1 - \text{Cos. vers. } z)^2)}$ oder, wenn $\text{Cos. vers. } z = y$ ist, $= \sqrt{(1 - (1 - y)^2)} = \sqrt{(2y - y^2)}$ gesetzt werden.

V) 1) Das einer Function $y = \text{Tang. } z$ zugehörige Differential ist nach §. 216. Nro. XXI. 16) dieses:

$$dy \text{ oder } d\,(\text{Tang. } z) = \text{Sec. } z^2 \,.\, dz.$$

Hieraus erhält man für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.}(\text{Tang.} = y)$

$$dz \text{ oder } d\left(\text{Arc.}(\text{Tang.} = y)\right) = \frac{dy}{\text{Sec. } z^2} \text{ oder } \frac{d\,(\text{Tang. } z)}{\text{Sec. } z^2}.$$

2) Für die Gleichung $d\left(\text{Arc.}(\text{Tang.} = y)\right) = \frac{dy}{\text{Sec. } z^2}$ kann auch gesetzt werden:

$$d\left(\text{Arc.}(\text{Tang.} = y)\right) = \frac{dy}{1 + y^2}.$$

Es ist nehmlich für den Sin. tot. = 1 die $\text{Sec. } z^2 = 1 + \text{Tang. } z^2$ und also, wenn $\text{Tang. } z = y$ gesetzt wird, $= 1 + y^2$.

VI) 1) Für die Function $y = \text{Cot. } z$ muß nach §. 216. Nro. XXI. 17)

$$dy \text{ der } d\,(\text{Cot. } z) = -\,\text{Cosec. } z^2 \,.\, dz.$$

seyn. Also ist für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.}(\text{Cot.} = y)$

$$dz \text{ oder } d\left(\text{Arc.}(\text{Cot.} = y)\right) = -\frac{dy}{\text{Cosec. } z^2} \text{ oder } -\frac{d\,.(\text{Cot. } z)}{\text{Cosec. } z^2}.$$

2) Statt $d\,(\text{Arc.}\,(\text{Cot.} = y)) = -\frac{dy}{\text{Cosec.}\, z^2}$ kann man auch setzen:

$$d\,(\text{Arc.}\,(\text{Cot.} = y)) = -\frac{dy}{1 + y^2}.$$

Weil nehmlich für den Sin. tot. = 1 die Cosec. $z^2 = 1 + \text{Cot.}\, z^2$ seyn muß, so wird, wenn man Cot. $z = y$ setzt, Cosec. $z^2 = 1 + y^2$.

VII) 1) Für eine Function $y = \text{Sec.}\, z$ ist nach §. 216. Nro. XXI. 18)

$$dy \text{ oder } d\,(\text{Sec.}\, z) = \text{Tang.}\, z \times \text{Sec.}\, z\,.\,dz,$$

für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.}\,(\text{Sec.} = y)$ also muß

$$dz \text{ oder } d\,(\text{Arc.}\,(\text{Sec.} = y)) = \frac{dy}{\text{Tang.}\, z \times \text{Sec.}\, z} \text{ oder } \frac{d.\,(\text{Sec.} = y)}{\text{Tang.}\, z \times \text{Sec.}\, z}$$

seyn.

2) Statt $d\,(\text{Arc.}\,(\text{Sec.} = y)) = \frac{dy}{\text{Tang.}\, z \times \text{Sec.}\, z}$ kann man auch

$$d\,(\text{Arc.}\,(\text{Sec.} = y)) = \frac{dy}{y\sqrt{(y^2 - 1)}}$$

setzen. Es ist nehmlich für den Sin. tot. = 1 die Tang. $= \sqrt{(\text{Sec.}\, z^2 - 1)}$, und also Sec. $z \times$ Tang. $z = \text{Sec.}\, z \times \sqrt{(\text{Sec.}\, z^2 - 1)}$ oder, wenn Sec. $z = y$ gesetzt wird, $= y\sqrt{(y^2 - 1)}$.

VIII) 1) Wenn $y = \text{Cosec.}\, z$ ist, so muß nach §. 216. Nro. XXI. 19)

$$dy \text{ oder } d\,(\text{Cosec.}\, z) = -\,\text{Cot.}\, z \times \text{Cosec.}\, z\,.\,dz.$$

seyn, woraus für die umgekehrte Function $z = \text{Arc.}\,(\text{Cosec.} = y)$ folgt:

$$dz \text{ oder } d\,(\text{Arc.}\,(\text{Cosec.} = y)) = -\frac{dy}{\text{Cot.}\, z \times \text{Cosec.}\, z} \text{ oder } -\frac{d.\,(\text{Cosec.} = y)}{\text{Cot.}\, z \times \text{Cosec.}\, z}$$

2) Für $d\,(\text{Arc.}\,(\text{Cosec.} = y)) = -\frac{dy}{\text{Cot.}\, z \times \text{Cosec.}\, z}$ kann man auch setzen:

$$d\,(\text{Arc.}\,(\text{Cosec.} = y)) = -\frac{dy}{y\sqrt{(y^2 - 1)}}.$$

Es ist nehmlich Cot. $z = \sqrt{(\text{Cosec.}\, z^2 - 1)}$ und also Cot. $z \times$ Cosec. $z = \text{Cosec.}\, z \sqrt{(\text{Cosec.}\, z^2 - 1)}$ oder auch, wenn Cosec. $z = y$ gesetzt wird, $= y\,.\sqrt{(y^2 - 1)}$.

§. 225.

§. 225.

Zur leichtern Uebersicht wollen wir nun auch die im vorigen §. gefundenen Differentialformeln in einer Tafel zusammen stellen.

Functionen z von y	Differentialien dz.
1) $z = \text{Arc.}(\text{Sin.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Sin} = y)) = \frac{(d.\text{Sin.}z)}{\text{Cos.}\ z}$ oder $\frac{dy.}{\sqrt{(1-y^2)}}$
2) $z = \text{Arc.}(\text{Cos.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Cos.} = y)) = \frac{-d(\text{Cos.}z)}{\text{Sin.}\ z}$ oder $\frac{-dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$
3) $z = \text{Arc.}(\text{Sin.v.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Sin.v.} = y)) = \frac{d(\text{Sin.v.}z)}{\text{Sin.}\ z}$ oder $\frac{dy}{\sqrt{(2y-y^2)}}$
4) $z = \text{Arc.}(\text{Cos.v.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Cos.v.} = y)) = \frac{-d(\text{Cos.v.}z)}{\text{Cos.}\ z}$ oder $\frac{-dy}{\sqrt{(2y-y^2)}}$
5) $z = \text{Arc.}(\text{Tang.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Tang.} = y)) = \frac{d(\text{Tang.}\ z)}{\text{Sec.}\ z^2}$ oder $\frac{dy}{1+y^2}$
6) $z = \text{Arc.}(\text{Cot.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Cot.} = y)) = \frac{-d(\text{Cot.}z)}{\text{Cosec.}\ z^2}$ oder $\frac{-dy}{1+y^2}$
7) $z = \text{Arc.}(\text{Sec.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Cot.} = y)) = \frac{d(\text{Sec.}z)}{\text{Tang.}z \times \text{Sec.}z}$ oder $\frac{dy}{y\sqrt{(y^2-1)}}$
8) $z = \text{Arc.}(\text{Cosec.} = y)$	dz oder $d(\text{Arc.}(\text{Cosec.} = y)) = \frac{-d(\text{Cosec.}\ z)}{\text{Cot}\ z \times \text{Cosec.}z}$ oder $\frac{-dy}{y\sqrt{(y^2-1)}}$

§. 226.

Nimmt man die in dieser Tafel angegebenen Differentialformeln mit denen zusammen, welche in §. 216. Nro. XXI) enthalten sind; so hat man alle Differentialformeln, so wie sie gewöhnlich von den Schriftstellern, die den Differentialcalcul lehren, angegeben werden. Nun ist noch übrig, daß wir dem Anfänger die Hauptbegriffe von einigen andern Darstellungsarten des Differentialcalculs beyzubringen suchen und die Anwendung der angegebenen Differentialformeln auf die Bestimmung der Differentialien bestimmter vorgegebener Functionen in mehreren Beyspielen zeigen. Dieses soll jetzt geschehen.

§. 227.

I) Die Darstellung des Differentialcalculs, deren man sich am häufigsten bedient hat, ist diejenige, bey welcher unendlich kleine Größen zum Gegenstande dieses Calculs gemacht werden. Sie ist der Hauptsache nach folgende:

1) Einen jeden Theil einer absolut veränderlichen Größe z, welcher so vorgestellt ist, daß dessen Verhältniß gegen z durch bestimmte Zahlen ausgedrückt werden kann, nennt man einen **angebbaren** Theil oder eine **endliche Differenz** von z; man bezeichnet sie durch Δz.

2) Eine solche **endliche** Differenz Δz sey nun wie immerhin klein gedacht, so kann sie doch, als ein bestimmter aliquoter Theil einer wirklichen Größe z allemal noch kleiner genommen werden, weil sich der Verstand keinen aliquoten Theil von einer Größe z so klein denken kann, daß nicht noch ein kleinerer denkbar ist. Man kann sich aber, sagt man, einen Theil einer Größe z vorstellen, der kleiner ist, als jeder angebbare, d. h. als jeder Theil, dessen Verhältniß gegen z durch Zahlen bestimmt wird. Einen solchen Theil von z nun nennt man einen **unbestimmbar kleinen Theil**, eine **unendlich kleine Größe**, ein **Differential**, man bezeichnet ihn durch dz.

3) Wenn bey einer Function y von z die Größe z um eine **endliche** Differenz Δz wächst, also in $z + \Delta z$ übergeht, so muß auch die Function um eine gewisse Größe abgeändert werden. Diese Größe nennt man die der Function y zugehörige **endliche Differenz**, bezeichnet sie durch Δy und beweist, so wie wir gethan haben, daß sich für eine jede Function y von z diese Differenz ganz allgemein durch die Gleichung

$$\Delta y = \alpha . \Delta z + \beta . \Delta z^2 + \gamma . \Delta z^3 + \delta . \Delta z^4 + \ldots$$

darstellen läßt, in welcher die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Größen bedeuten, die von Δz ganz und gar unabhängig sind. Wenn ferner bey einer Function y von z die Größe z um ein Differential dz wächst, also in $z + dz$ übergeht; so muß sich ebenfalls die Function y um eine gewisse Größe ändern. Diese Größe nennt man das der Function y zugehörige **Differential** und bezeichnet sie durch dy. Man giebt ferner zu, daß sich auch das Differential einer jeden Function y von z auf ähnliche Art, wie die endliche Differenz Δy ganz allgemein durch die Gleichung

$$dy = \alpha . dz + \beta . dz^2 + \gamma . dz^3 + \delta . dz^4 + \ldots$$

darstellen lassen muß, in welcher $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ dieselben Größen sind, wie in dem Ausdrucke für Δy.

4) Dieser für dy angegebene Ausdruck aber, sagt man ferner, kann auf eine vortheilhafte Art abgekürzt werden. Weil nehmlich das Differential dz schon ein unbestimmbar kleiner Bruch von z seyn soll, so müssen die Potenzen dz^2, dz^3 ꝛc. noch viel kleiner seyn, es muß dz^2 gegen dz, dz^3 gegen dz^2, und um so vielmehr gegen dz, u. s. w. verschwinden, und man kann also alle Glieder des für dy angegebenen Ausdrucks, welche die Potenzen dz^2, dz^3 ꝛc. als Factoren enthalten, als Glieder ansehen, die gegen das Glied $\alpha . dz$ verschwinden, und setzen: Es sey das Differential

$$dy = \alpha . dz.$$

5) Diese Gleichung nennt man jetzt die der Function y von z zugehörige **Differentialgleichung**, obgleich vermöge der Erklärung über das Differential dy nicht $\alpha . dz$, sondern $\alpha . dz + \beta . dz^2 + \gamma . dz^3 + \ldots$ das Differential einer jeden Function y, und mithin im eigentlichen Sinne

$$dy = \alpha . dz + \beta . dz^2 + \gamma . dz^3 + \delta . dz^4 + \ldots$$

die Differentialgleichung ist. Das aus der Gleichung $dy = \alpha . dz$ folgende Verhältniß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{1}$$

nennt man das **Differentialverhältniß**, obgleich genau genommen das Differentialverhältniß

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\alpha . dz + \beta . dz^2 + \gamma . dz^3 + \ldots}{1}$$

seyn muß.

6) Der Differentialcalcul, sagt man, giebt die Regeln an die Hand, wie man für eine jede vorgegebene Function das Differential und das daraus fließende Differentialverhältniß finden kann.

7) So findet man nun auch, was wir nach unserer Darstellung des Differentialcalculs finden, eine Gleichung $dy = \alpha . dz$ nehmlich, in welcher α eine Größe ist, die von der Veränderung Δz der absolut veränderlichen Größe z gar nicht abhängt, und die dem Werthe und der Form nach durch die Werthe der im veränderlichen Theile der Function y vorkommenden Größen, und durch die Form ihrer Verbindung unter einander dergestalt bestimmt ist, daß ein und dieselbe Größe α nur einer einzigen, nicht aber mehreren mit verschiedenen veränderlichen Theilen versehenen Functionen y von z zugehören kann. Die Begriffe aber, unter welchen man sich nach dieser Darstellung die in der Gleichung $dy = \alpha . dz$ stehenden Größen dy und dz vorstellt, sind von unseren Begriffen gänzlich verschieden

schieden. dz bedeutet nach dieser Darstellung einen unbestimmbar kleinen Bruch von z, und mithin muß auch $\alpha . dz$ oder dy eine unbestimmbar kleine Größe bedeuten; das Differential dy ist hier nur ein unbestimmbar kleiner Theil von der Größe α: nach unserer Darstellung aber bedeutet dz die abstracte Einheit, und das Differential $\alpha . dz$ oder dy ist daher nicht ein unbestimmbar kleiner Theil von α, sondern die Größe α selbst, also eine endliche und durch die Function y bestimmte Größe, die entweder constant, oder eine Function von z seyn muß.

3) Zu dieser Darstellung ist man dadurch gekommen, daß man mehr auf einen Calcul dachte, vermittelst dessen sich gewisse Aufgaben in der höhern Geometrie und Mechanik lösen lassen, als auf die Untersuchung der wahren Natur algebraisch dargestellter Functionen. Man verwickelt sich aber durch dieselbe in eine Menge Widersprüche und Schwierigkeiten, die sich auf keine Weise heben lassen, entfernt sich dadurch ganz von dem wahren Grund und Boden der Mathematik, auf dem freylich leider mancher Mathematiker herumirrt, ohne ihn zu kennen, und macht das schwer und unverständlich, was seiner Natur nach in der That äusserst leicht ist.

9) Man giebt die Erklärung über das Differential dy so, daß man zugeben muß, es sey $dy = \alpha . dz + \beta . dz^2 + \gamma . dz^3 + \ldots$ Aus dieser Gleichung aber wirft man nachher, um das Glied $\alpha . dz$, oder eigentlich, um die der Function y zugehörige Größe α zu erhalten, die Glieder $\beta . dz^2$, $\gamma . dz^3$, $\delta . dz^4$ rc. heraus, und fährt gleichwohl fort, das Glied $\alpha . dz$ das Differential dy der Function y zu nennen und die Gleichung

$$dy = \alpha . dz$$

als eine vollkommen genaue Gleichung zu betrachten. Dieses ist offenbar widersprechend. Hierdurch wurde die Frage veranlaßt, was man sich eigentlich unter den Differentialien vorstellen, ob man dieselben als wirkliche Größe, oder als Nichtse betrachten soll. Setzt man das erste, stellt sich also die Differentialien als wirkliche Größen vor; so kann wegen der in Nro. 3) über das Differential dy einmal festgesetzten Erklärung unmöglich die Gleichung

$$dy = \alpha . dz$$

als eine vollkommen richtige Gleichung gerechtfertigt werden, worauf es doch bey der Anwendung des Differentialcalculs, wenn man nicht auf neue Schwierigkeiten stossen will, allerdings ankommt.

10) Euler erklärte daher, und zwar zuerst, die Differentialien für Nichtse. Es ist die Eulerische Ansicht des Differentialcalculs kurz diese:

 Wenn

Wenn in einer Function y von z die absolut veränderliche Größe z in $z + \Delta z$ übergeht, so muß $\Delta y = \alpha.\Delta z + \beta.\Delta z^2 + \gamma.\Delta z^3 + \ldots$ seyn, und daraus folgt das Verhältniß der endlichen Differenzen oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \alpha + \beta.\Delta z + \gamma.\Delta z^2 + \ldots$$

Für $\Delta z = o = dz$ muß nun auch $\Delta y = o$ werden, und dieses Nichts bezeichne man, um es von dz zu unterscheiden, durch dy. Setzt man aber in der obigen Gleichung Δz wirklich $= o$, so erhält man daraus

$$\frac{o}{o} \text{ oder } \frac{dy}{dz} = \alpha.$$

Daraus sieht man, daß zwischen diesen beyden Nichtsen oder Differentialien ein endliches und durch die Function y selbst bestimmtes geometrisches Verhältniß Statt findet, es verhält sich nehmlich

$$dy : dz = \alpha : 1$$

Da nun α eine Größe ist, deren Werth und Form durch die Werthe der im veränderlichen Theile der Function y vorkommenden Größen und durch die Form ihrer Verbindung unter einander in der Art bestimmt ist, daß α für eine jede mit einem andern veränderlichen Theile versehene Function y von z einen andern Werth und eine andere Form haben muß; so kann man behaupten:

"Mit einer jeden Function y von z steht ein Differentialverhältniß $dy : dz$ im Zusammenhange, welches $= \alpha : 1$ und durch den veränderlichen Theil der Function y dergestalt bestimmt ist, daß es nur einer einzigen Function y, nicht aber zu gleicher Zeit mehreren mit verschiedenen veränderlichen Theilen versehenen Functionen zugehören kann."

II) Eine andere Darstellungsart des Differentialcalculs ist die, bey welcher man die Gränze des Verhältnisses, welches zwischen den endlichen Differenzen Δy und Δz Statt findet, zum Gegenstande dieses Calculs macht. Sie ist kurz diese:

1) Für eine jede Function y von z ist die Differenz

$$\Delta y = \alpha.\Delta z + \psi.\Delta z^2,$$

und also muß der dem Verhältniße $\Delta y : \Delta z$ zugehörige Exponent $= \alpha + \psi.\Delta z$ seyn.

2) Die-

2) Dieser Exponent besteht aus zwey Gliedern α und $\psi . \Delta z$, wovon nur das Glied $\psi . \Delta z$ von Δz abhängig ist, das Glied α aber von Δz gar nicht abhängt, sondern für einen jeden beliebigen Werth von Δz einerley Werth behält.

3) Läßt man nun in dem Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta z} = \alpha + \psi . \Delta z$ die Differenz Δz abnehmen, so wird das Glied $\psi . \Delta z$ immer kleiner und es nähert sich der Werth des Exponenten $\alpha + \psi . \Delta z$ dem Werthe α immer mehr. Man sieht aber, daß der Exponent $\alpha + \psi . \Delta z$ diesen Werth α, so lange Δz und mithin auch Δy eine wirkliche Größe ist, nie erreichen kann, sondern daß Δz und also auch $\Delta y = 0$ werden muß, wenn der Exponent $\alpha + \psi . \Delta z$ den Werth $= \alpha$ erhalten soll.

4) Diese Größe α nennt man die Gränze des Verhältnisses der endlichen Differenzen Δy und Δz und bezeichnet dieselbe durch $\frac{dy}{dx}$. Der Differentialcalcul, sagt man, giebt die Regeln an die Hand, nach welchen man für eine jede Function die Gränze des Verhältnisses bestimmen kann, welches zwischen der endlichen Veränderung der absolut veränderlichen Größe und der dadurch bewirkten Veränderung der Function Statt hat.

III) Ausser den beyden in Nro. I) und II) gezeigten Darstellungsarten des Differentialcalculs haben die Analysten noch mehrere versucht, welche aber hier übergangen werden müssen. Wir wollen dafür die Hauptschriften angeben, aus welchen man die verschiedenen Ansichten dieses Calculs lernen kann.

1) Euler: Institutiones Calculi Differentialis, Petrop. 1755. 2) **Euler**: vollständige Anleitung zur Differentialrechnung, aus dem lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von J. A. Ch. **Michelsen**, Berlin und Libau 1790. 3) **Karsten**: Mathematische Abhandlungen, Abh. I. 4) **Joh. Schulz**: Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen; Königsberg u. Leipzig 1788. 5) **L. Bendavid**: Versuch einer logischen Auseinandersetzung des mathemat. Unendlichen, Berlin 1789. 6) **Joh. Schulz**: Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien; Königsberg, 1803. 7) G. S. A. **Mellin**: Encyclopädisches Wörterbuch der kritischen Philosophie, Jena u. Leipzig 1803.; (Art. **Unendlich**). 8) **Kästner**: Anfangsgründe der Analys. des Unendlichen; Göttingen 1799. 9) L'Huilier: Exposition Elementaire des Principes des Calculs superieurs, à Berlin, 1786. 10) L'Huilier: Principiorum calculi Differentialis et Integralis Expositio elementaris. 11) La Grange: Théorie des Fonctions Analytiques cet. à Paris 1797, (ist in das Deutsche übersetzt von **Grüson**). 12) La Croix: Traité du Calcul différentiel et du Calcul integral. à Paris 1797.; (ist ebenfalls in das Deutsche über-

setzt

setzt von Grüson). 13) Carnot: Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal; à Paris 1797.; (ist in das Deutsche übersetzt und mit Anmerk. und Zus. begleitet v. J. K. F. Hauff, 1800). Langsdorf: Anfangsgr. d. reinen Elem. u. höh. Math. Erlangen, 1802.

§. 228.

1) Für $y = AZ^n$ muß $dy = n.AZ^{n-1}.dZ$

seyn (§. 216. Nro. XXI. 1). Hierzu geben wir hier folgende Beyspiele.

1) Für $y = z$, ist das Differential $dy = dz = 1$;
 „ $y = z^2$, „ „ $dy = 2zdz$;
 „ $y = z^3$, „ „ $dy = 3z^2dz$;

u. s. w.

2) Für $y = \frac{1}{z} = z^{-1}$, „ „ $dy = -1.z^{-1-1}.dz = \frac{-dz}{z^2}$;
 „ $y = \frac{1}{z^2} = z^{-2}$, „ „ $dy = -2.z^{-2-1}.dz = \frac{-2dz}{z^3}$;
 „ $y = \frac{1}{z^3} = z^{-3}$, „ „ $dy = -3.z^{-3-1}.dz = \frac{-3dz}{z^4}$;

u. s. w.

3) Für $y = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$, „ „ $dy = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}.dz = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$;
 „ $y = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$, „ „ $dy = \frac{1}{3}z^{\frac{1}{3}-1}.dz = \frac{dz}{3\sqrt[3]{z^2}}$;
 „ $y = \sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$, „ „ $dy = \frac{1}{4}z^{\frac{1}{4}-1}.dz = \frac{dz}{4\sqrt[4]{z^3}}$;

u. s. w.

4)

4) Für $z = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$, ist das Differential $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}-1}.dz = \frac{-dz}{2z\sqrt{z}}$;

» $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} = z^{-\frac{1}{3}}$, » » $dy = -\frac{1}{3} z^{-\frac{1}{3}-1}.dz = \frac{-dz}{3z\sqrt[3]{z}}$;

» $y = \frac{1}{\sqrt[4]{z}} = z^{-\frac{1}{4}}$, » » $dy = -\frac{1}{4} z^{-\frac{1}{4}-1}.dz = \frac{-dz}{4z\sqrt[4]{z}}$;

u. s. w.

5) Für $y = 7z^8$, » » $dy = 8.7.z^{8-1}.dz = 56z^7.dz$;

» $y = 5z^2\sqrt[3]{z^2} = 5z^{\frac{8}{3}}$, » » $dy = \frac{8}{3}.5z^{\frac{8}{3}-1}.dz = \frac{40}{3} z\,dz\sqrt[3]{z^2}$

» $y = \frac{2z^3}{\sqrt{z}} = 2z^{\frac{5}{2}}$, » » $dy = \frac{5}{2}.2.z^{\frac{5}{2}-1}.dz = 5z\,dz\sqrt{z}$;

» $y = \frac{1}{z^2\sqrt[3]{z}} = z^{-\frac{7}{3}}$, » » $dy = \frac{-7}{3} z^{-\frac{7}{3}-1}.dz = \frac{-7dz}{3z^3\sqrt[3]{z}}$.

6) Für $y = az^2 + bz^3 + cz^4 + g$ muß nach §. 216. Nro. XXI. 20) das Differential $dy = d(az^2) + d(bz^3) + (dz^4) + dg$ seyn, und dieses ist $= 2az.dz + 3bz^2.dz + 4cz^3.dz + 0 = (2az + 3bz^2 + 4cz^3)\,dz$.

7) Für $y = az^3 + b\sqrt[3]{z} - \frac{c}{z^2\sqrt{z}}$ wird nach derselben Regel das Differential

$$dy = d(az^3) + d(b\sqrt[3]{z}) - d\left(\frac{c}{z^2\sqrt{z}}\right) = 3az^2.dz + \frac{b.dz}{3\sqrt[3]{z^2}}$$

$$-\frac{-5cdz}{2z^3\sqrt{z}} = \left(3az^2 + \frac{b}{3\sqrt[3]{z^2}} + \frac{5c}{2z^3\sqrt{z}}\right) dz.$$

8) Für $y = (2z^3 - 5z^2 + 4z)^3$ ist $dy = 3(2z^3 - 5z^2 + 4z)^2.d(2z^3 - 5z^2 + 4z)$
$= 3(2z^3 - 5z^2 + 4z)^2.(6z^2 - 10z + 4)\,dz$.

9) Für $y = \sqrt{(a^2 - z^2)} = (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ ist $dy = \frac{1}{2}(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}-1} \times d(a^2 - z^2)$
$= \frac{1}{2}(a^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \times -2z.dz = \frac{-z\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$.

10) Für

10) Für $y = \sqrt[3]{(a^2 - z^2)^2} = (a^2 - z^2)^{\frac{2}{3}}$ ist $dy = \frac{2}{3}(a^2 - z^2)^{\frac{2}{3}-1} \times d(a^2 - z^2)$

$$= \frac{2}{3}(a^2 - z^2)^{-\frac{1}{3}} \times -2z\,dz = \frac{-4z\,dz}{3\sqrt[3]{(a^2 - z^2)}}.$$

11) Für $y = \frac{m}{\sqrt{(a - z^2)}} = m(a - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist $dy = \frac{-1}{2}m(a - z^2)^{-\frac{1}{2}-1} \times d(a - z^2)$

$$= -\frac{m}{2}(a - z^2)^{-\frac{3}{2}} \times -2z\,dz = \frac{m\,z\,dz}{\sqrt{(a - z^2)^3}}$$

$$= \frac{m\,z\,dz}{(a - z^2)\sqrt{(a - z^2)}}.$$

12) Für $y = \sqrt[3]{\left(a + z\sqrt{z} + \frac{b}{z^2\sqrt{z}}\right)^2} = \left(a + z\sqrt{z} + \frac{b}{z^2\sqrt{z}}\right)^{\frac{2}{3}}$ ist

$$dy = \frac{2}{3}(a + z\sqrt{z} + b : z^2\sqrt{z})^{-\frac{1}{3}} \times \left(\frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}-1}.\,dz - \frac{5}{2}b\,z^{-\frac{5}{2}-1}.\,dz\right)$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(a + z\sqrt{z} + b : z^2\sqrt{z})}} \times \left(\frac{3\sqrt{z}}{2} - \frac{5b}{2z^3\sqrt{z}}\right)dz$$

$$= \frac{(3\sqrt{z} - 5b : z^3\sqrt{z}\,dz)}{3\sqrt[3]{(a + z\sqrt{z} + b : z^2\sqrt{z})}}$$

§. 229.

II) Für $y = UV$ ist $dy = U.dV + V.dU$, und
für $y = UVZ$ ist $dy = UV.dZ + UZ.dV + VZ.dU$,
(§. 216. Nro. XXI. 2. 3.). Hierzu geben wir folgende Beyspiele.

1) Für $y = (z - z^2)(2a - z^3)$ ist $dy = (z - z^2)\,d(2a - z^3) + (2a - z^3)\,d(z - z^2)$.

Nun ist aber $d(2a - z^3) = -3z^2dz$ und $d(z - z^2) = dz - 2z\,dz = (1 - 2z)dz$, also muß, wenn man diese Werthe substituirt, das Differential

$$dy = (z - z^2) \times -3z^2.\,dz + (2a - z^3)(1 - 2z)\,dz$$
$$= \left((2a - z^3)(1 - 2z) - 3z^2(z - z^2)\right)dz$$ seyn.

2) Für

2) Für $y = (az - z^2) \cdot \sqrt[4]{(b - cz^3)}$ ist $dy = (az - z^2) \cdot d(\sqrt[4]{(b - cz^3)})$
$+ \sqrt[4]{(b - cz^3)} \cdot d(az - z^2)$.

Es ist aber $d(\sqrt[4]{(b - cz^3)}) = d(b - cz^3)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(b - cz^3)^{\frac{1}{4} - 1} \times d(b - cz^3)$

$$= \frac{1}{4}(b - cz^3)^{-\frac{3}{4}} \times -3cz^2 dz = \frac{-3cz^2 dz}{4\sqrt[4]{(b - cz^3)^3}};$$

ferner ist $d(az - z^2) = d(az) - d(z^2) = a dz - 2z dz = (a - 2z) dz$;

also muß $dy = (az - z^2) \times \frac{-3cz^2 . dz}{4\sqrt[4]{(b - cz^3)^3}} + (a - 2z) dz . \sqrt[4]{(b - cz^3)}$,

$$= \frac{4(b - cz^3)(a - 2z) - 3cz^2(az - z^2)}{4\sqrt[4]{(b - cz^3)^3}} . dz$$ seyn.

3) Wenn ferner $y = (a + z^2)(b - z)(c - z^3)$ ist, so muß
$dy = (a + z^2)(b - z) . d(c - z^3) + (a + z^2)(c - z^3) . d(b - z) + (b - z)(c - z^3) . d(a + z^2)$ seyn.

Nun ist aber $d(c - z^3) = -d(z^3) = -3z^2 . dz$; $d(b - z) = -dz$;
$d(a + z^2) = d(z^2) = 2z . dz$,

es wird also, wenn man diese Werthe in dem vorigen Ausdrucke substituirt,
$dy = (a + z^2)(b - z) \times -3z^2 . dz + (a + z^2)(c - z^3) \times -dz + (b - z)(c - z^3) . 2z . dz$
$= (2z(b - z)(c - z^3) - (a + z^2)(c - z^3) - 3z^2(a + z^2)(b - z)) dz$.

§. 230.

III) Für $y = \frac{Z}{N}$ ist $dy = \frac{N . dZ - Z . dN}{N^2}$; und

für $y = \frac{C}{N}$ muß $dy = \frac{-C . dN}{N^2}$ seyn,

(§. 216. Nro. XXI. 4. 5). Hierzu geben wir folgende Beyspiele.

1) Für $y = \frac{az - bz^2}{cz^2 + m}$ wird hiernach $dy = \frac{(cz^2 + m) . d(az - bz^2) - (az - bz^2) . d(cz^2 + m)}{(cz^2 + m)^2}$.

 Es

Es ist aber $d(az - bz^2) = adz - 2bz.dz = (a - 2bz)\,dz$, und ferner muß $d(cz^2 + m) = 2cz.dz$ seyn; also wird, wenn man diese Werthe substituirt,

$$dy = \frac{(cz^2 + m)(a - 2bz) - (az - bz^2).2cz}{(cz^2 + m)^2}.dz.$$

2) Für $y = \frac{z^2 - 1}{\sqrt{(c^4 + z^4)}}$ ist $dy = \frac{\sqrt{(c^4 + z^4)}.d(z^2 - 1) - (z^2 - 1).d(c^4 + z^4)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{(a^4 + z^4)})^2}$.

Nun ist $d(z^2 - 1) = 2z.dz$, ferner ist $d(c^4 + z^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(c^4 + z^4)^{\frac{1}{2} - 1}$

$\times d(c^4 + z^4) = \frac{1}{2}(c^4 + z^4)^{-\frac{1}{2}} \times 4z^3.dz = \frac{2z^3.dz}{\sqrt{(c^4 + z^4)}}$; also muß, wenn man diese Werthe substituirt

$$dy = \frac{\sqrt{(c^4 + z^4)}.2z.dz - (z^2 - 1)\,2z^3.dz : \sqrt{(c^4 + z^4)}}{a^4 + z^4}$$

$$= \frac{(c^4 + z^4).2z.dz - (z^2 - 1).2z^3.dz}{(c^4 + z^4).\sqrt{(c^4 + z^4)}} = \frac{2(c^4z + z^3)}{(c^4 + z^4).\sqrt{(c^4 + z^4)}}.dz$$ seyn.

3) Für $y = \frac{a}{\sqrt{(az - z^2)}}$ muß $dy = \frac{-a.d[\sqrt{(az - z^2)}]}{[\sqrt{(az - z^2)}]^2}$ seyn.

Weil nun $d[\sqrt{(az - z^2)}] = d(az - z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(az - z^2)^{\frac{1}{2} - 1} \times d(az - z^2)$

$$= \frac{1}{2}.(az - z^2)^{-\frac{1}{2}} \times (adz - 2zdz) = \frac{a - 2z}{2\sqrt{(az - z^2)}}.dz$$

seyn muß; so wird, wenn man diesen Werth in den für dy angegebenen Ausdruck setzt,

$$dy = \frac{-a(a - 2z)}{2(az - z^2).\sqrt{(az - z^2)}}.dz$$

§. 231.

IV) Für $y = a^Z$ ist $dy = a^Z$. log. nat. $a.dZ$, und für $y = e^Z$ muß $dy = e^Z.dZ$ seyn, (§. 216. Nro. XXI. 6. 7). Hierzu folgen hier einige Beyspiele.

1) Für

1) Für $y = a^{(1-z^2)\sqrt{z}}$ muß $dy = a^{(1-z^2)\sqrt{z}} \times \log.\,nat.\,a\,.\,d\big((1-z^2)\sqrt{z}\big)$ seyn.

Nun ist aber $d\big((1-z^2)\sqrt{z}\big) = d(z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{5}{2}}) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}-1}.dz - \frac{5}{2} z^{\frac{5}{2}-1}.dz$

$= (\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} z^{\frac{3}{2}})\, dz = (\frac{1}{2\sqrt{z}} - \frac{5}{2} z\sqrt{z})\, dz = \frac{1-5z^2}{2\sqrt{z}}.dz.$

Setzt man diesen Werth in den für dy angegebenen Ausdruck, so erhält man:

$$dy = a^{(1-z^2)\sqrt{z}} \times \log.\,nat.\,a \times \frac{1-5z^2}{2\sqrt{z}}.dz.$$

2) Für $y = e^{\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}}$ muß $dy = e^{\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}} \times d\big(\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}\big)$ seyn.

Nun ist $d\big(\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}\big) = \frac{-d(\sqrt{(1-z^2)})}{(\sqrt{(1-z^2)})^2}$, und ferner ist

$d\big(\sqrt{(1-z^2)}\big) = d(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}-1} \times d(1-z^2) = \frac{-z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$; also

muß $d\big(\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}\big) = \frac{-z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} : \big(\sqrt{(1-z^2)}\big)^2 = \frac{-z}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)}}.dz$ seyn.

Setzt man diesen Werth in den für dy angegebenen Ausdruck, so wird

$$dy = e^{\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}} \times \frac{-z}{(1-z^2).\sqrt{(1-z^2)}}.dz = \frac{-z\,e^{\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}}}{(1-z^2).\sqrt{(1-z^2)}}.dz.$$

§. 232.

V) Für y = log. art. Z ist $dy = M.\frac{dZ}{Z}$, und

für y = log. nat. Z muß $dy = \frac{dZ}{Z}$ seyn,

(§. 216. Nro. XXI. 8. 9). Hierzu folgen hier mehrere Beyspiele.

1) Für $y = \log.\ art.\ (a - z^2)$ ist $dy = M.\frac{d(a-z^2)}{a-z^2}$. Weil nun $d(a - z^2) = -2zdz$ seyn muß, so wird $dy = \frac{-2Mz}{a-z^2}.dz$.

2) Für $y = \log.\ nat.\ \frac{z}{b \pm cz}$ ist $dy = d\left(\frac{z}{b \pm cz}\right) : \frac{z}{b \pm cz}$. Es ist aber $d\left(\frac{z}{b \pm cz}\right) = \frac{(b \pm cz).dz - z.d(b \pm cz)}{(b \pm cz)^2} = \frac{(b \pm cz).dz \mp cz.dz}{(b \pm cz)^2}$ $= \frac{b}{(b \pm cz)^2}.dz$; Also muß $dy = \frac{b.dz}{(b \pm cz)^2} : \frac{z}{b \pm cz} = \frac{b}{z(b \pm cz)}.dz$ seyn.

3) Für $y = \frac{a}{\sqrt{b}} \log.\ nat.\left(\frac{\sqrt{(b+cz)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b}}\right)$ muß, wenn man die mit $\frac{a}{\sqrt{b}}$ multiplicirte Function von z durch Y bezeichnet und also die ganze Function $y = \frac{a}{\sqrt{b}}.Y$ setzt, $dy =$ oder $d\left(\frac{a}{\sqrt{b}}.Y\right) = \frac{a}{\sqrt{b}}.dY$ seyn, (§. 216. Nro. XXI. 1). Nun suche man dY. Es muß, weil

$$Y = \log.\ nat.\left(\frac{\sqrt{(b+cz)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b}}\right) \text{ ist,}$$

$$dY = d\left(\frac{\sqrt{(b+cz)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b}}\right) : \frac{\sqrt{(b+cz)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b}} \text{ seyn,}$$

und hierfür erhält man, weil durch die gehörig angestellte Berechnung für $d\left(\frac{\sqrt{(b+cz)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b}}\right)$ der Werth $\frac{cdz\sqrt{b}}{(\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b})^2.\sqrt{(b+cz)}}$ gefunden wird,

$$dY = \frac{cdz\sqrt{b}}{(\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b})^2.\sqrt{(b+cz)}} : \frac{\sqrt{(b+cz)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b}}$$

$$= \frac{c\sqrt{b}.dz}{(\sqrt{(b+cz)} + \sqrt{b}).(\sqrt{(b+cz)} - \sqrt{b}).\sqrt{(b+cz)}} = \frac{\sqrt{b}}{z\sqrt{(b+cz)}}.dz.$$

Wird jetzt dieser Werth in den für dy angegebenen Ausdruck substituirt, so erhält man:

$$dy = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{z\sqrt{(b+cz)}}dz = \frac{a}{z\sqrt{(b+cz)}}.dz.$$

4) Für

4) Für $y = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \log. \text{nat.} \left(\frac{\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{\sqrt{b}-z\sqrt{c}}\right)$ wird, wenn man einstweilen die mit $\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ multiplicirte Function = Y setzt,

$$dy \text{ oder } d\left(\frac{a}{2\sqrt{bc}}.Y\right) = \frac{a}{2\sqrt{bc}}.dY$$

(§. 216. Nro. XXI. 1). Nun suche man $dY = d\left[\log. \text{nat.} \left(\frac{\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{\sqrt{b}-z\sqrt{c}}\right)\right]$.

Es muß $dY = d\left[\frac{\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{\sqrt{b}-z\sqrt{c}}\right] : \frac{\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{\sqrt{b}-z\sqrt{c}}$ oder, weil durch Rechnung

$$d\left[\frac{\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{\sqrt{b}-z\sqrt{c}}\right] = \frac{2dz\sqrt{bc}}{(\sqrt{b}-z\sqrt{c})^2} \text{ gefunden wird,}$$

$$dY = \frac{2dz\sqrt{bc}}{(\sqrt{b}-z\sqrt{c})^2} : \frac{\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{\sqrt{b}-z\sqrt{c}} = \frac{2dz\sqrt{bc}}{b-cz^2} \text{ seyn.}$$

Setzt man jetzt diesen Werth von dY in den für dy angegebenen Ausdruck, so erhält man:

$$dy = \frac{a}{2\sqrt{bc}}.\frac{2dz\sqrt{bc}}{b-cz^2} = \frac{adz}{b-cz^2}.$$

5) Für $y = \log. \text{nat.} (z\sqrt{b}+\sqrt{(bz^2 \pm c)})$ ist $dy = \frac{d(z\sqrt{b}+\sqrt{(bz^2\pm c)})}{z\sqrt{b}+\sqrt{(bz^2\pm c)}}$.

Da nun $d(z\sqrt{b}+\sqrt{(bz^2\pm c)}) = d(z\sqrt{b}) + d(bz^2\pm c)^{\frac{1}{2}} = dz\sqrt{b}$

$$+\frac{1}{2}.(bz^2\pm c)^{\frac{1}{2}-1} \times d(bz^2\pm c) = dz\sqrt{b} + \frac{bzdz}{\sqrt{(bz^2\pm c)}}$$

$$= \frac{dz\sqrt{b}.\sqrt{(bz^2\pm c)} + bzdz}{\sqrt{(bz^2\pm c)}} = \frac{[\sqrt{(bz^2\pm c)} + z\sqrt{b}]dz\sqrt{b}}{\sqrt{(bz^2\pm c)}}$$

seyn muß; so wird, wenn man diesen Werth in den für dy angegebenen Ausdruck substituirt,

$$dy = \frac{(\sqrt{(bz^2\pm c)} + z\sqrt{b})dz\sqrt{b}}{\sqrt{(bz^2\pm c)}} : [\sqrt{(bz^2\pm c)} + z\sqrt{b}]$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(bz^2\pm c)}}.dz$$

6) Es sey $y = (\text{log. nat. } z)^n$. Hierfür muß zuerst nach §. 216. Nro. XXI. 1) $dy = n\,(\text{log. nat. } z)^{n-1} . d\,(\text{log. nat. } z)$ seyn.

Da nun $d\,(\text{log. nat. } z) = \frac{dz}{z}$ ist, so erhält man:

$$dy = n\,(\text{log. nat. } z)^{n-1} . \frac{dz}{z} = \frac{n\,(\text{log. nat. } z)^{n-1}}{z} . dz$$

7) Es sey $y = z^r . \text{log. nat. } z - \frac{r}{a}\, z^v$. Hierfür ist

$$dy = d\,(z^r . \text{log. nat. } z) - d\,(\frac{r}{a} . z^v)$$

$$= z^r . d\,(\text{log. nat. } z) + (\text{log. nat. } z) . d\,(z^r) - \frac{v}{a}\, z^{v-1} . dz$$

$$= z^r . \frac{dz}{z} + (\text{log. nat. } z) . r\, z^{r-1} . dz - \frac{v}{a} . z^{v-1} . dz.$$

$$= \left[z^{r-1}\,(1 + r\,\text{log. nat. } z) - \frac{v\, z^{v-1}}{a}\right] dz.$$

8) Es sey $y = \text{log. nat. } (a+z)\,(b+z)\,(c+z)$. Hier kann man setzen: $y = \text{log. nat. } (a+z) + \text{log. nat. } (b+z) + \text{log. nat. } (c+z)$, wofür nun $dy = d\,(\text{log. nat. } (a+z)) + d\,(\text{log. nat. } (b+z)) + d\,(\text{log. nat. } (c+z))$

$$= \frac{d\,(a+z)}{a+z} + \frac{d\,(b+z)}{b+z} + \frac{d\,(c+z)}{c+z} = \frac{dz}{a+z} + \frac{dz}{b+z} + \frac{dz}{c+z}$$ wird.

§. 233.

VI) Für $y = \text{log. art. } (\text{log. art. } Z)$ ist $dy = M^2 . \frac{dZ}{Z . \text{log. art. } Z}$, und

für $y = \text{log. nat. } (\text{log. nat. } Z)$ muß $dy = \frac{dZ}{Z . \text{log. nat. } Z}$ seyn,

(§. 216. Nro. XXI. 10. 11). Hierzu geben wir folgende Beyspiele.

1) Es sey $y = \text{log. art. } (\text{log. art. } \sqrt{(1-z^2)})$. Hierfür muß seyn:

$$dy = M^2 \frac{d\,(\sqrt{(1-z^2)})}{\sqrt{(1-z^2)}\,\text{log. art. } \sqrt{(1-z^2)}}.$$

Weil

Weil $d(\sqrt{(1-z^2)}) = d(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{-z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ gefunden wird, so erhält man, wenn dieser Werth in den für dy angegebenen Ausdruck substituirt wird,

$$dy = M^2 . \frac{-z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} : \sqrt{(1-z^2)} . \log. art. \sqrt{(1-z^2)} = \frac{-M^2 . z}{(1-z^2) \log. art. \sqrt{(1-z^2)}} . dz.$$

2) Für $y = \log. nat. (\log. nat. \sqrt{(1-z^2)})$ muß also, wegen des Moduls $M=1$,

$$dy = \frac{-z}{(1-z^2) \log nat. \sqrt{(1-z^2)}} . dz \text{ seyn.}$$

3) Für $y = \log. nat. [\log. nat. (1+z)(1+\sqrt{z})]$ muß nach der angegebenen Differentialformel

$$dy = \frac{d((1+z)(1+\sqrt{z}))}{(1+z)(1+\sqrt{z}) . \log. nat. (1+z)(1+\sqrt{z})} \text{ seyn.}$$

Nun ist aber $d((1+z)(1+\sqrt{z})) = (1+z) . d(1+\sqrt{z}) + (1+\sqrt{z}) . d(1+z)$ $= (1+z) . d(z^{\frac{1}{2}}) + (1+\sqrt{z}) . dz = \left(\frac{1+z}{2\sqrt{z}} + 1 + \sqrt{z}\right) dz = \frac{1+3z+2\sqrt{z}}{2\sqrt{z}} . dz$; substituirt man also diesen Werth in der für dy angegebenen Gleichung, so erhält man:

$$dy = \frac{1+3z+2\sqrt{z}}{2(1+z)(1+\sqrt{z}) . \sqrt{z} . \log. nat. (1+z)(1+\sqrt{z})} . dz.$$

§. 234.

VII) Für $y = Sin. Z$ ist $dy = Cos. Z, dZ$, und
für $y = Cos. Z$ muß $dy = - Sin. Z . dZ$,
(§. 216. Nro. XXI. 12. 13). Hierfür folgen hier Beyspiele.

1) Für $y = Sin. (1+z^2)$ ist $dy = Cos. (1+z^2) . d(1+z^2) = 2z\, Cos. (1+z^2) . dz$.

2) Für $y = Sin. \left(\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}\right)$ ist $dy = Cos. \left(\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}\right) . d\left(\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}\right)$. Da nun

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}\right) = \frac{z . d(1-z^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{(1-z^2)}\,dz}{1-z^2} = \frac{-1}{1-z^2} . dz \text{ ist; so muß}$$

$$dy = Cos. \left(\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}\right) \times \frac{-1}{1-z^2} . dz \text{ seyn.}$$

3) Für

3) Für $y = a[\text{Sin.}(1+z)]^3$ ist, wenn man $[\text{Sin.}(1+z)]^3 = Y^3$ und also $y = aY^3$ setzt, $dy = 3aY^2.dY$.

Sucht man nun $dY = d[\text{Sin.}(1+z)]$, so erhält man:

$$dY = \text{Cos.}(1+z).d(1+z) = \text{Cos.}(1+z).dz. \text{ Also ist}$$
$$dy = 3a[\text{Sin.}(1+z)]^2.\text{Cos.}(1+z).dz.$$

4) Für $y = \text{Cos.}(z+2z^3)$ ist $dy = -\text{Sin.}(z+2z^3).d(z+2z^3)$
$$= -\text{Sin.}(z+2z^3) \times (1+6z^2).dz.$$

5) Für $y = \text{Cos.}\, z.\text{Sin.}\, z$ ist nach (§. 216. Nro. XXI. 2) $dy = \text{Cos.}\, z.d(\text{Sin.}\, z) + \text{Sin.}\, z.d(\text{Cos.}\, z)$. Da nun $d(\text{Sin.}\, z) = \text{Cos.}\, z.dz$ und $d(\text{Cos.}\, z) = -\text{Sin.}\, z.dz$ ist, so erhält man:

$$dy = \text{Cos.}\, z.\text{Cos.}\, z.dz - \text{Sin.}\, z.\text{Sin.}\, z.dz = (\text{Cos.}\, z^2 - \text{Sin.}\, z^2).dz.$$

§. 235.

VIII) Für $y = \text{Sin. vers.}\, Z$ ist $dy = \text{Sin.}\, Z.dZ$, und
für $y = \text{Cos. vers.}\, Z$ muß $dy = -\text{Cos.}\, Z.dZ$ seyn.
(§. 216. Nro. XXI. 14. 15). Hierfür geben wir folgende Beyspiele.

1) Es sey $y = \text{Sin. vers.}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$. Hierfür muß $dy = \text{Sin.}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right).d\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$
$= \text{Sin.}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right).d\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) = \text{Sin.}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \times \frac{-dz}{2z\sqrt{z}}$ seyn.

2) Es sey $y = \text{Cos. vers.}[(1+z^2)(1+3z)]$. Hier muß das Differential $dy = -\text{Cos.}[(1+z^2)(1+3z)].d[(1+z^2)(1+3z)]$ seyn. Sucht man nun $d[(1+z^2)(1+3z)]$, so erhält man: $d[(1+z^2)(1+3z)] = (1+z^2)\,d(1+3z) + (1+3z)\,d(1+z^2) = (1+z^2).3dz + (1+3z).2zdz = (3+2z+9z^2)dz$. Es ist also

$$dy = -\text{Cos.}[(1+z^2)(1+3z)] \times (3+2z+9z^2)dz \text{ seyn.}$$

§. 236.

IX) Für $y = \text{Tang.}\, Z$ ist $dy = \text{Sec.}\, Z^2.dZ$, und
für $y = \text{Cot.}\, Z$ muß $dy = -\text{Cosec.}\, Z^2.dZ$ seyn,
(§. 216. Nro. XXI. 16. 17). Hierfür geben wir folgende Beyspiele.

1) Es

1) Es sey $y = \text{Tang.}\,\frac{2z}{1+z^2}$. Hierfür ist $dy = \text{Sec.}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2 . d\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)$

$$= \text{Sec.}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2 \times \frac{(1+z^2).\,2dz - 2z.\,d(1+z^2)}{(1+z^2)^2} =$$

$$= \text{Sec.}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2 \times \frac{2(1+z^2) - 4z^2}{(1+z^2)^2}.\,dz.$$

2) Es sey $y = \text{Cot.}\,\frac{1}{\sqrt{z}+z^3}$. Hierfür ist $dy = -\text{Cosec.}\left(\frac{1}{\sqrt{z}+z^3}\right)^2 . d\left(\frac{1}{\sqrt{z}+z^3}\right)$

$$= -\text{Cosec.}\left(\frac{1}{\sqrt{z}+z^3}\right)^2 \times \frac{-d(z^{\frac{1}{2}}+z^3)}{(\sqrt{z}+z^3)^2} = \text{Cosec.}\left(\frac{1}{\sqrt{z}+z^3}\right)^2$$

$$\times \frac{1+6z^2.\sqrt{z}}{2\sqrt{z}(\sqrt{z}+z^3)^2}.\,dz.$$

§. 237.

XI) Für $y = \text{Sec.}\,Z$ ist $dy = \text{Tang.}\,Z \times \text{Sec.}\,Z.\,dZ$, und
für $y = \text{Cosec.}\,Z$ ist $dy = -\text{Cot.}\,Z \times \text{Cosec.}\,Z.\,dZ$,
(§. 216. Nro. XXI. 18. 19). Hierzu folgen hier Beyspiele.

1) Für $y = \text{Sec.}\,\sqrt{z}$ muß $dy = \text{Tang.}\,\sqrt{z} \times \text{Sec.}\,\sqrt{z}.\,d(\sqrt{z})$, also $= \text{Tang.}\,\sqrt{z} \times \text{Sec.}\,\sqrt{z} \times \frac{dz}{2\sqrt{z}}$ seyn.

2) Für $y = \text{Cosec.}\left(\frac{1}{z+z^3}\right)$ muß $dy = -\text{Cot.}\left(\frac{1}{z+z^3}\right) \times \text{Cosec.}\left(\frac{1}{z+z^3}\right).\,d\left(\frac{1}{z+z^3}\right)$ seyn. Da nun $d\left(\frac{1}{z+z^3}\right) = \frac{-d(z+z^3)}{(z+z^3)^2} = \frac{-(1+3z^2)}{(z+z^3)^2}.\,dz$ ist, so wird $dy = \text{Cot.}\left(\frac{1}{z+z^3}\right) \times \text{Cosec.}\left(\frac{1}{z+z^3}\right) \times \frac{1+3z^2}{(z+z^3)^2}.\,dz$,

§. 238.

XII) Ueber die Berechnung der höheren Differentialien, die nach denselben Differentialformeln berechnet werden müssen, geben wir folgende Beyspiele.

1) Für $y = Az^n$ ist

$dy = nAz^{n-1}.dz$; es muß also nach dieser Regel seyn:

d^2y oder $d(n.dz.Az^{n-1}) = (n-1)n.dz.Az^{n-1-1}.dz = n(n-1)Az^{n-2}.dz^2$;

d^3y oder $d(n(n-1)dz^2.Az^{n-2}) = (n-2).n.(n-1).dz^2.Az^{n-2-1}.dz$

$= n(n-1)(n-2)Az^{n-3}.dz^3$;

2) Für $y = z$ ist demnach

$dy = dz = 1$; $d^2y = d.dz = d(1) = 0$; $d^3y = 0$; u. s. w.

3) Für $y = z^2$ ist

$dy = 2zdz$; d^2y oder $d(2dz.z) = 1.2dz.z^{1-1}.dz = 2dz^2$;

$d^3y = d(2dz^2) = 0$; $d^4y = 0$; rc.

4) Für $y = z^3$ ist

$dy = 3z^2.dz$; d^2y oder $d(3dz.z^2) = 2.3dz.z^{2-1}.dz = 6zdz^2$;

d^3y oder $d(6dz^2.z) = 1.6dz^2.z^{1-1}.dz = 6dz^3$; d^4y oder $d(6dz^3) = 0$; rc.

5) Für $y = \frac{1}{z} = z^{-1}$ ist

$dy = \frac{-dz}{z^2}$; d^2y oder $d(-dz.z^{-2}) = -2 \times -dz.z^{-2-1}.dz = 2dz.z^{-3}.dz$

$= \frac{2dz^2}{z^3}$; d^3y oder $d(2dz^2.z^{-3}) = -3.2dz^2.z^{-3-1}.dz = -6.dz^2.z^{-4}.dz$

$= \frac{-6dz^3}{z^4}$; u. s. w.

6) Für $y = \frac{1}{z^2} = z^{-2}$ ist

$dy = \frac{-2dz}{z^3}$; $d^2y = d(-2dz.z^{-3}) = -3 \times -2dz.z^{-3-1}.dz = 6.z^{-4}.dz^2$,

$= \frac{6dz^2}{z^4}$; $d^3y = d(6dz^2.z^{-4}) = \frac{-24dz^3}{z^5}$; u. s. w.

7) Für

7) Für $y = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$ ist

$$dy = \frac{dz}{2\sqrt{z}};\ d^2y = d\left(\frac{dz}{2}.z^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}.\frac{dz}{2}.z^{-\frac{1}{2}-1}.dz = \frac{-dz^2}{4\sqrt{z^3}};$$

$$d^3y = d\left(\frac{-dz^2}{4}.z^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3dz^3}{8z^2\sqrt{z}};\ \text{u. s. w.}$$

8) Für $y = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$ ist

$$dy = \frac{dz}{3\sqrt[3]{z^2}};\ d^2y = \frac{-2dz^2}{9z\sqrt[3]{z^2}};\ d^3y = \frac{10dz^3}{27z^2.\sqrt[3]{z^2}}$$

9) Für $y = a + bz^2 - cz^3$ ist

$$dy = (2bz - 3cz^2)\,dz;\ d^2y = d(2b.dz.z - 3c.dz.z^2) = 1.2b.dz.z^{1-1}.dz - 2.3c.dz.z^{2-1}.dz = 2b\,dz^2 - 6cz\,dz^2 = (2b - 6cz)dz^2;\ d^3y = d(2b\,dz^2 - 6cz\,dz^2) = d(2bdz^2) - d(6czdz^2) = 0 - 1.6c.dz^2.z^{1-1}.dz = -6c\,dz^3;\ d^4y = d(-6cdz^3) = 0.$$

10) Für $y = \sqrt{(1-z^2)} = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ ist

$$dy = \frac{-zdz}{\sqrt{(1-z^2)}};\ d^2y \text{ oder } d\left(-dz.z(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{-dz^2}{(1-z^2).\sqrt{(1-z^2)}};$$

11) Für $y = \frac{z^2}{\sqrt{(a^4+z^4)}}$ ist

$$dy = \frac{2a^4.zdz}{(a^4+z^4)\sqrt{(a^4+z^4)}};\ d^2y \text{ oder } d\left(\frac{2a^4.zdz}{(a^4+z^4)\sqrt{(a^4+z^4)}}\right) = \frac{(2a^8 - 10a^4.z^4)dz^2}{(a^4+z^4)^2\sqrt{(a^4+z^4)}};$$

u. s. w.

12) Für $y = \log.\ nat.\ z$ ist

$$dy = \frac{dz}{z};\ d^2y = d(dz.z^{-1}) = \frac{-dz^2}{z^2};\ d^3y = d(-dz^2.z^{-2}) = \frac{2dz^3}{z^3};$$

$$d^4y = d(2dz^3.z^{-3}) = \frac{-6dz^4}{z^4};\ \text{u. s. w.}$$

Dritter Abschnitt.

Die ersten Begriffe von den Integralien.

§. 239.

"Man stelle sich eine beliebige Größe D vor, die entweder constant oder eine algebraisch
"dargestellte Function seyn kann; ferner setze man, es sey aus irgend einem Grunde
"erwiesen, daß die Größe D das einer gewissen Function F zugehörige Differential dF seyn
"muß, daß diese Function selbst aber noch unbekannt sey. Diese Function F nennt man
"das der Differentialgröße D zugehörige Integral und bezeichnet sie dadurch, daß man
"dem Zeichen D, oder dem algebraischen Ausdrucke für D den lateinischen Buchstaben
"$\int$ vorsetzt. Zu einer Differentialgröße D eine Function F suchen, deren Differential $dF = D$
"seyn muß, heißt: die Differentialgröße D integriren."

Es bedeutet also in der Folge $\int D$ eine Function F, deren Differential $dF = D$ ist, oder, das Integral von D. Man sieht leicht ein, daß, wenn man dem Zeichen, womit eine Function bezeichnet ist, oder dem Ausdrucke, welcher die Function algebraisch darstellt, erst das Differentialzeichen d, hernach aber das Integralzeichen $\int$ vorsetzt, diese beyden Zeichen einander aufheben müssen, so daß es eben so gut ist, als hätte man gar kein Zeichen vorgesetzt. Auch ist einleuchtend, daß, wenn eine Differentialgröße D das einer Function y von z zugehörige erste Differential dy ist, die Integralgröße $\int D = \int dy$, also eine Function y von z seyn muß; daß aber, wenn eine Differentialgröße D das einer Function y von z zugehörige nte Differential $d^n y$ ist, die Integralgröße $\int D = \int d^n y$ oder $= \int d.d^{n-1}y$, also eine Function $d^{n-1}y$ seyn, muß welche das $(n-1)$te Differential Function y von z ist.

§. 240.

"Der Integralcalcul ist ein Inbegriff von Regeln, welche angeben, wie man zu
"einer jeden Differentialgröße D ein Integral $\int D$ entweder völlig genau, oder doch
"wenigstens näherungsweise berechnen kann. Algebraische Ausdrücke, welche dergleichen
"Integrationsregeln in der Anschauung darstellen, nennt man Integralformeln.

§. 241.

"Nach der Erklärung, welche wir in §. 239. über das einer Differentialgröße D zugehörige Integral $\int D$ gegeben haben, giebt es nicht blos eine einzige Function F, welche $= \int D$ ist, sondern es lassen sich für eine jede Differentialgröße D unzählig viele Functionen F, F', F'', F''' ꝛc., die zwar alle völlig gleiche veränderliche Glieder enthalten müssen, in Rücksicht der constanten Glieder aber nach Belieben verschieden seyn können, aufweisen, welche ein und derselben Differentialgröße D als Integralien $\int D$ zugehören müssen."

Dieses ist aus der Lehre von den Differenzen und Differentialien hinlänglich deutlich. Es soll das einer Differentialgröße D zugehörige Integral $\int D$ eine Function F seyn, deren Differential $dF = D$ ist. Nimmt man nun an, daß F, F', F'', F''' ꝛc. Functionen bedeuten, von welchen eine jede dieselben veränderlichen Glieder enthält, und die sich nur durch verschieden und beliebig große constante Glieder von einander unterscheiden; so sind die Differentialien dF, dF', dF'', dF''' ꝛc. alle einander gleich, weil die constanten Glieder der Functionen auf die Differenzen derselben keinen Einfluß haben (§. 217. Nro. 2.) und also auch, sie mögen wie immerhin verschieden seyn, in den Differentialien, welche nichts anderes, als Differenzencoefficienten sind, keine Verschiedenheit bewirken können. Ist demnach $dF = D$, und mithin $F = \int D$, so muß nothwendig auch eine jede von den erwähnten Functionen F, F', F'' ꝛc. deren Differentialien dem Differentiale dF gleich seyn müssen, $= \int D$ seyn. Solcher Functionen F, F', F'', F''' ꝛc. aber, deren veränderliche Glieder gleich sind, und die sich blos durch beliebige und verschieden große constante Glieder von einander unterscheiden, giebt es unzählig viele.

§. 242.

Wenn also die Integration einer vorgegebenen Differentialgröße D verlangt wird, so darf man nur eine Function suchen, welche blos aus einem veränderlichen Theile besteht, die wir f nennen wollen, und deren Differential $df = D$ ist. Hat man diese gefunden, so ist nicht nur $f = \int D$, sondern auch eine jede von den Functionen F, F', F'' ꝛc, die sich ergeben, wenn man zu f irgend eine beliebige constante Größe setzt, welche bejaht oder verneint seyn kann, ist $= \int D$. Man kann also, wenn man unter C eine constante Größe versteht, die bejaht oder verneint seyn und einen jeden beliebigen

Werth, ja selbst den Werth = 0 haben kann, ganz allgemein die einer Differentialgröße D zugehörigen Integralien so darstellen:

$$\int D = f + C.$$

§. 243.

„Integralformeln, durch welche die Regeln für die Integration solcher Differentialgrößen D, welche die Form der in §. 216. Nro. XXI. und in §. 225. angegebenen Differentialausdrücke haben, dargestellt werden, ergeben sich aus den angeführten §. §. auf folgende Art“:

I) Nach §. 216. Nro. XXI. 1. muß $d(AZ)^n = nAZ^{n-1}.dZ$ seyn. Für eine jede Differentialgröße D also, deren algebraischer Ausdruck die Form $nAZ^{n-1}.dZ$ hat, muß der veränderliche Theil der ihr zugehörigen Integralien AZ^n heißen; es muß demnach seyn:

$$\int(nAZ^{n-1}.dZ) = AZ^n + C.$$

Für $n = 1$ wird $nAZ^{n-1}.dZ = 1.AZ^{1-1}.dZ = A.dZ$, und AZ^n wird $= AZ$; es ist also:

$$\int(A\,dZ) = AZ + C.$$

Für $n = 1$ und $A = 1$ wird $nAZ^{n-1}.dZ = 1.1.Z^{1-1}.dZ = dZ$, und AZ^n wird $= Z$; es ist also:

$$\int dZ = Z + C.$$

Für $n = 1$ und $Z = z$ wird $nAZ^{n-1}.dZ = 1.Az^{1-1}.dz = A\,dz$, oder, weil $dz = 1$ ist, $= A$; AZ^n ferner wird $= Az$: es ist demnach

$$\int(A\,dz) \text{ oder } \int A = Az + C.$$

Für $n = 1$, $A = 1$ und $Z = z$ muß demnach seyn:

$$\int(1.dz) \text{ oder } \int(1) = 1.z + C = z + C.$$

II) Nach §. 216. Nro. XXI. 2) muß $d(UV) = U.dV + V.dU$ seyn. Für eine jede Differentialgröße D also, deren algebraischer Ausdruck die Form $U.dV + V.dU$ hat, muß der veränderliche Theil der ihr zugehörigen Integralien UV heißen; es ist mithin

$$\int(U.dV + V.dU) = UV + C.$$

III) So

III) So lassen sich nun diese Schlüsse weiter fortsetzen. Durch dieselben erhält man aus §. 216. Nro. XXI. folgende Tafel von Integralformeln.

$$1)\ \int (n\,.\,AZ^{n-1}.\,dZ) = AZ^n + C.$$

$$2)\ \int (U.\,dV + V.\,dU) = UV + C.$$

$$3)\ \int (UV.\,dZ + UZ.\,dV + VZ.\,dU) = UVZ + C.$$

$$4)\ \int \left(\frac{N.\,dZ - Z.\,dN}{N^2}\right) = \frac{Z}{N} + C.$$

$$5)\ \int \left(\frac{-C.\,dN}{N^2}\right) = \frac{C}{N} + C.$$

$$6)\ \int (a^Z.\,\text{log. nat. } a.\,dZ) = a^Z + C.$$

$$7)\ \int (e^Z.\,dZ) = e^Z + C.$$

$$8)\ \int \left(M.\,\frac{dZ}{Z}\right) = \text{log. art. } Z + C.$$

$$9)\ \int \left(\frac{dZ}{Z}\right) = \text{log. nat } Z + C.$$

$$10)\ \int \left(M.\,\frac{dZ}{Z.\,\text{log. art. } Z}\right) = \text{log. art. (log. art. } Z) + C.$$

$$11)\ \int \left(\frac{dZ}{Z\ \text{log. nat } Z}\right) = \text{log. nat. (log. nat. } Z) + C.$$

12)

$$12)\ \int(\text{Cos. }Z\,.\,dZ) = \text{Sin. }Z + C.$$

$$13)\ \int(-\text{Sin. }Z\,.\,dZ) = \text{Cos. }Z + C.$$

$$14)\ \int(\text{Sin. }Z\,.\,dZ) = \text{Sin. vers. }Z + C.$$

$$15)\ \int(-\text{Cos. }Z\,.\,dZ) = \text{Cos. vers. }Z + C.$$

$$16)\ \int(\text{Sec. }Z^2\,.\,dZ) = \text{Tang. }Z + C.$$

$$17)\ \int(-\text{Cosec. }Z^2\,.\,dZ) = \text{Cot. }Z + C.$$

$$18)\ \int(\text{Tang. }Z \times \text{Sec. }Z\,.\,dZ) = \text{Sec. }Z + C.$$

$$19)\ \int(-\text{Cot. }Z \times \text{Cosec. }Z\,.\,dZ) = \text{Cosec. }Z + C.$$

$$20)\ \int(dU \pm dV \pm dW \pm \ldots) = U \pm V \pm W \pm \ldots + C.$$

Aus §. 225. aber ergeben sich folgende Integralformeln:

$$1)\ \int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \text{Arc. (Sin} = y) + C.$$

$$2)\ \int\frac{-dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \text{Arc. (Cos.} = y) + C.$$

$$3)\ \int\frac{dy}{\sqrt{(2y-y^2)}} = \text{Arc. (Sin. vers.} = y) + C.$$

$$4)\ \int\frac{-dy}{\sqrt{(2y-y^2)}} = \text{Arc. (Cos. vers.} = y) + C.$$

$$5)\ \int\frac{dy}{1+y^2} = \text{Arc. (Tang.} = y) + C.$$

$$6)\ \int\frac{-dy}{1+y^2} = \text{Arc. (Cot.} = y) + C.$$

$$7)\ \int\frac{dy}{y.\sqrt{(y^2-1)}} = \text{Arc. (Sec.} = y) + C.$$

$$8)\ \int\frac{-dy}{y.\sqrt{(y^2-1)}} = \text{Arc. (Cosec.} = y) + C.$$

§. 244.

§. 244.

Nach diesen im vorigen §. angegebenen Integralformeln muß sich nun, wie man leicht einsehen kann, eine jede vorgegebene Differentialgröße D sogleich integriren lassen, wenn die Form ihres Ausdrucks so beschaffen ist, daß man dieselbe geradezu unter einen der allgemeinen Differentialausdrücke, für welche die Integralformeln angegeben sind, subsumiren kann. Diese Bedingung aber findet nur selten Statt; in den meisten Fällen nehmlich, in welchen die Integration einer vorgegebenen Differentialgröße verlangt wird, ist der Ausdruck, welcher diese Größe darstellt, so geformt, daß sich derselbe nicht geradezu unter einen der allgemeinen Differentialausdrücke, deren Integration man kennt, subsumiren läßt. Also muß noch gelehrt werden, wie man verfahren muß, um auch eine solche Differentialgröße zur Integration zu bringen, und dieses ist das fernere Geschäft des Integralcalculs, dessen weitere Ausführung wir für den folgenden Theil unseres Werkes bestimmt haben. Hier wollen wir nur noch einige Sätze beyfügen, um einstweilen den Anfänger einigermassen auf den Nutzen aufmerksam zu machen, welchen die Betrachtung der Differentialien und Integralien der Functionen gewähren kann.

§. 245.

Man stelle sich vor, es sey y eine noch unbekannte Function von z, deren algebraische Darstellung verlangt wird, und setze, man habe durch die Aufgabe, welche diese Darstellung verlangt, so viele Data erhalten, daß man daraus durch Schlüsse einen Ausdruck für die Differenz $\Delta y = dy . \Delta z + \psi . \Delta z^2$ dieser noch unbekannten Function y finden kann, in welchem wenigstens das Differential dy völlig entwickelt dargestellt ist. Dieses Differential nun kann, wie wir wissen, unmöglich zwey oder mehreren mit verschiedenen veränderlichen Theilen versehenen Functionen y von z zugehören, weil es durch den Differentialcalcul erwiesen ist, daß für alle nur immer denkbaren algebraischen Ausdrücke, welche Functionen y von z bezeichnen können, die Differentialausdrücke dem Werthe und der Form nach verschieden seyn müssen. Man darf also nur nach den Regeln des Integralcalculs zu dem Differentiale dy, welches man für die noch unbekannte Function gefunden hat, die Integralien f + C (§. 242.) suchen; so hat man schon den veränderlichen Theil f der unbekannten Function y, und es kommt nun blos noch darauf an, daß man bestimme, welches unter den unzählig vielen Integralien f + C die verlangte Function y ist, d. h. daß man den bestimmten Werth von C suche.

§. 245.

In allen Fällen aber, in welchen die algebraische Darstellung einer unbekannten Function y von z verlangt wird, ist man mit der Function y nicht so unbekannt, daß man nicht wenigstens einen einzigen Werth w der absolut veränderlichen Größe z angeben könnte, für welchen man den Werth W der Function y wüßte; und da dieses der Fall ist, so kann man auch C bestimmen. Hat man nehmlich den veränderlichen Theil f durch Integration gefunden, so darf man nur in demselben in der Gleichung

$$y = f + C$$

statt z den Werth w setzen, von welchem man weiß, daß hierfür die Function y den bekannten und bestimmten Werth W erhalten muß, und ferner statt y diesen Werth W nehmen: dadurch wird alsdann eine Gleichung

$$W = f + C,$$

erhalten, in welcher blos die Größe C unbekannt ist, und woraus sich demnach C finden läßt. Es ist nehmlich

$$W - f = C.$$

Wer-

Verzeichniß der Druck- und Rechnungsfehler.

Seite	Zeile	statt	lese man
12	1 v. o.	az^s	$az^s . y$
—	15 v. o.	$\sqrt{}$	$\sqrt[n]{}$
13	1 v. u.	Pa^{n+1}	Pa^{n-1}
16	1 v. u.	pz^{m-1}	qz^{m-1}
19	7 v. o.	rz^m	ϱz^m
20	3 v. o.	pz^{m-1}	qz^{m-1}
23	4 v. u.	$A = -\frac{\mu}{1} = -\mu$	$A = -\frac{\mu}{1} . a = -\mu a$
31	5 v. o.	Aa^a	Az
40	6 v. o.	$p^{-\frac{7}{2}}$	$p^{-\frac{7}{3}}$
51	11 v. o.	$(n-4)\alpha\mathfrak{K}^\nu$	$(n-5)\alpha\mathfrak{K}^\nu$
56	13 v. o.	blos allein	blos
57	1 v. u.	$\frac{K}{A}$	$\frac{K}{N}$
61	4 v. o.	$\frac{a}{a-\alpha z}$	$\frac{Z}{a-\alpha z}$
62	1 v. o.	$\frac{z}{a-\alpha z}$	$\frac{Z}{a-\alpha z}$
—	10 v. u.	B, C, D	$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$
63	10 v. u.	$\mathfrak{P} = \frac{a}{\alpha}\mathfrak{N}$	$\mathfrak{P} = \frac{\alpha}{a}\mathfrak{N}$
65	6 v. u.	$Z^{(n-a)}(n-\nu z)(m-\mu z)$	$Z^{(n-a)} = (n-\nu z)(m-\mu)$
68	2 v. o.	erhält	enthält
—	1 v. u.	ist das Wort: Function falsch abgetheilt.	

Seite	Zeile	statt	lese man
86	11 v. o.	$\frac{\mathfrak{D}^2}{16\,\mathfrak{E}^2}$	$\frac{\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}^2}{16\,\mathfrak{E}^3}$
—	12 v. o.	$\frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}}{4\,\mathfrak{E}}$	$\frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}}{4\,\mathfrak{E}^2}$
—	9 — 12	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$
—	6 v. u.	$\mathfrak{C}y^2$	$\mathfrak{C}y^2$
95	14 v. o.	Mz^{n-2}	Mz^{n+p}
96	3 v. o.	$3z \mp 2$	$3z \pm 1$
—	[illegible]	$z \pm \frac{1}{3}$	$z \pm \frac{1}{2}$
98	7 v. u.	106	96
100	2 v. o.	$p - 2pqz\,\mathrm{Cos.}\,\varphi$	$p^2 - 2pqz\,\mathrm{Cos.}\,\varphi$
—	5 v. o.	$\frac{p}{p}$	$\frac{p}{q}$
118	8 v. o.	$cz^{2n}\,dz^{3n}$	$cz^{2n} + dz^{3n}$
—	— —	§. 74.	§. 72.
120	9 v. u.	§. 34. Nro. 3.	§. 34.
122	1 v. u.	mz^{n-5}	mz^{n-1}
128	17 v. o.	$mz^{n-1} + nz$	$mz^{n-1} + nz^n$
—	1 v. u.	nz^{r-2}	nz^{r-1}
129	9 v. u.	$\frac{a}{z}$	$\frac{a}{z^4}$
131	4 v. u.	$\frac{-113}{18}$	$\frac{-113}{81}$
140	8 v. o.	ZP	Zp
160	8 v. o.	§. 97.	§. 95.
162	10 v. o.	$a = \alpha z$	$a - \alpha z$
168	5 v. o.	C	Cp
169	6 v. u.	$\frac{M - [A + B(a - \alpha z) + \ldots]}{(a - \alpha z)^n}$	$\frac{M - [A + B(a - \alpha z) + \ldots]\,p}{(a - \alpha z)^n}$
170	5 v. u.	$[A - B(a - \alpha z) - C(a - \alpha z)^2 - \ldots - T(a - \alpha z)^{n-2} - U(a - \alpha z)^{n-1}]$	$[A + B(a - \alpha z) + C(a - \alpha z)^2 + \ldots + T(a - \alpha z)^{n-2} + U(a - \alpha z)^{n-1}]$
176	11 v. o.	$\frac{1 + 3z - z^2}{3 - z}$	$\frac{1 + 3z - z^2}{(1 + z)^2 (3 - z)}$

182.

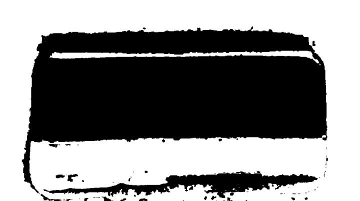
Seite	Zeile	statt	lese man
182	6 v. u.	§. 83. Nro. 37.	§. 85. Nro. 37.
—	11 v. o.	$\frac{}{\mathfrak{P}}$	$\frac{8}{\mathfrak{P}}$
—	2 u. 6 v. u.	§. 83.	§. 85.
183	9 v. o.	§. 83.	§. 85.
187	1 v. o.	$2pqz$ Cos. φ	$2p'q'z$ Cos. φ
189	6 v. o.	$2 - z + z^2$	$1 - z + z^2$
190	3 v. u.	$+ 0 \times 2$	$+ 0 \times z$
191	1 v. u.	ar. Sin. φ	αr. Sin. φ
192	12 v. o.	$- \mathfrak{b}$. Sin. φ	$- \mathfrak{g}$ Sin. φ
—	13 v. o.	er^4. Cos. 4φ	er^4. Cos. 5φ
193	5 v. o.	$\mathfrak{b} = (\mathfrak{G}$ Sin. $\varphi + \mathfrak{g}$ Cos. $\varphi)$	$\mathfrak{b} = (\mathfrak{G}$. Sin. $\varphi + \mathfrak{g}$ Cos. $\varphi)r$
193	7 v. u.	$\mathfrak{G}^3$	$\mathfrak{G}^2$
194	9 v. u.	Sin. φ	Sin. $n\varphi$
197	9 v. u.	$(1 - \frac{8}{3} z + z^2)$	$(1 - \frac{8}{5} z + \frac{1}{4} z^2)$
—	6 v. u.	$(1 + \frac{2}{5} z^2$	$(1 + \frac{2}{5} z$
198	2 v. o.	$+ 4z^3$	$- 3z^3$
—	4 v. o.	$- 4z^6$	$- 3z^6$
—	5 v. o.	$\frac{7}{5} z^3$	$\frac{6}{5} z^3$
—	— —	$+ \frac{13}{5} z^6$	$- \frac{13}{5} z^6$
—	6 v. o.	$\frac{7}{5} z^2$	$\frac{6}{5} z^2$
—	— —	$+ \frac{13}{5} z^4$	$- \frac{13}{5} z^4$
—	7 v. o.	$\frac{7}{5} z^2$	$\frac{6}{5} z^2$
—	— —	$- 4z^5$	$- 3z^5$
—	8 u. 9 v. o.	$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - \mathrm{B}\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{2z + 2z^2 + \frac{13}{3}z^3 - \frac{34}{3}z^4 + 2z^5 + \frac{39}{3}z^6 - 5z^7 + z^8}{z} = 2 + 2z + \frac{13}{3}z^2 - \frac{34}{3}z^3 + 2z^4 + \frac{39}{3}z^5 - 5z^6 + z^7$	$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - \mathrm{B}\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{2z + \frac{9}{5}z^2 + \frac{8}{5}z^3 - 8z^4 + \frac{16}{5}z^5 + \frac{19}{5}z^6 - 2z^7}{z} = 2 + \frac{9}{5}z + \frac{8}{5}z^2 - 8z^3 + \frac{16}{5}z^4 + \frac{19}{5}z^5 - 2z^6$

Seite	Zeile	statt	lese man
198	10 v. o.	$\frac{2+2z+\frac{13}{5}z^2+\frac{34}{5}z^3+\ldots}{1-\frac{3}{5}z-\frac{3}{5}z^2-4z^3+\ldots}$	$\frac{2+\frac{2}{5}z+\frac{8}{5}z^2-8z^3+\ldots}{1-\frac{3}{5}z-\frac{3}{5}z^2-3z^3+\ldots}$
—	2 v. u.	𝔄	𝔄′
199	6 v. o.	$+\frac{4}{5}z^3-$	$+\frac{4}{5}z^2-$
—	7 v. o.	$= z - \frac{8}{5}z^4 + \ldots$	$= z^3 - \frac{8}{5}z^4 + \ldots$
200	6 v. u.	$1-\frac{8}{3}z+z^2$	$1-\frac{8}{5}z+z^2$
202	10 v. o.	$-\frac{153+45z}{178}$	$-\frac{159-45z}{178}$
—	— —	$\frac{25-135z}{178}$	$\frac{25+135z}{178}$
—	12 u. 18 v. o.	$\frac{25-135z}{177(1+2z+3z^2)}$	$\frac{25+135z}{178(1+2z+3z^2)}$
—	5 v. u.	$(\frac{-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{-1}{3}} - z\sqrt{3})$	$(\frac{-1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{-2}{3}} - z\sqrt{3})$
203	7 v. u.	$p^2-2pq.z.Cos.\varphi+q^2.z^2$	$(p^2-2pqz.Cos.\varphi+q^2.z^2)^m$
—	5 v. u.	aus dem Factor $p^2-2pqz Cos.\varphi+q^2.z^2$	aus dem Factor 𝔓
—	4 v. u.	$(p^2-2pqz Cos.\varphi+q^2.z^2)$	$(p^2-2pqz.Cos.\varphi.q^2.z^2)^m$
208	11 v. u.	$q^2=0$	$q^2=1$
210	3 v. o.	$B=\frac{1}{2}$	$B=-\frac{1}{2}$
213	13 v. o.	$z^{\frac{mpr+noq+qnp}{npr}}$	$z^{\frac{mpr+nor+qnp}{npr}}$
216	8 v. o.	$\gamma z^{\overline{k}}$	$\gamma z^{\frac{1}{k}}$
217	6 v. u.	$Nz^{\frac{n}{k}}$	$\frac{N}{q}z^{\frac{n}{k}}$
—	— —	$\mathfrak{M}z^{\frac{n}{k}}$	[illegible]
219	8 v. u.	[illegible]	[illegible]

Seite	Zeile	statt	lese man
222	17 v. o.	$z^{\frac{7}{3}} - z^{\frac{31}{31}} + z^{\frac{19}{10}} - z^{\frac{47}{36}}$	$z^{\frac{5}{3}} - z^{\frac{7}{5}} + z^{\frac{7}{6}} - z^{\frac{11}{6}}$
223	10 v. o.	$\frac{8}{3} - \frac{8}{1.3}$	$\frac{8}{3} = \frac{8}{1.3}$
—	2 v. u.	$(\frac{2}{3} - 4).4$	$(\frac{2}{3} - 5).4 +$
—	1 v. u.	$= \frac{-19256}{1.2.3.4.3^4}$	$= \frac{-17216}{1.2.3.4.3^4}$ *) Hiernach verbessere man die auf Seite 224 folgende Rechnung.
230	8 v. u.	$\frac{\alpha b - a\beta}{bx^2 - \beta}$	$\frac{\alpha b - a\beta}{bx^2 - \beta} \cdot x$
233	8 v. u.	$\frac{}{3-2}$	$\frac{r}{3-2}$
250	9 v. u.	Nova Octa	Nova Acta
256	10 v. u.	§. 131.	§. 132.
258	2 v. u.	Pz^{n-1}	nPz^{n-1}
268	9 v. u.	$\frac{(z-1)^5}{2(z+1)^2}$	$\frac{(z-1)^5}{3(z+1)^5}$
269	15 v. o.	bejahte oder verneiute Brüche,	bejahte oder verneinte ächte Brüche
272	2 v. o.	(Nro. 2)	(Nro. 1)
—	3 v. o.	einer jeden bejahlen Zahl	einer jeden bejahten Zahl z
174	6 v. o.	$\log. z$ oder $\log.(m+v) = B(\frac{v}{m}$,	$\log. z$ oder $l.(m+v) = l.m + B(\frac{v}{m}$
279	7 v. u.	Nro. 1	Nro. 2
303	6 u. 8 v. o.	$(1-z)^{\frac{x}{2}}$	$(1-z^2)^{\frac{r}{2}}$
309	1 v. u.	$\frac{1}{2.3\ldots7} \cdot (\frac{v\pi}{180})^7$	$\frac{1}{2.3\ldots6} \cdot (\frac{v\pi}{180})^6$
316	3 v. o.	$\frac{4mn}{[(2r+1)^2.n^2-m^2]}$	$\frac{4mn}{[(2r+1)^2.n^2-m^2]\pi}$
—	— —	$\frac{4mn}{[(2r+3)^2.n^2-m^2]}$	$\frac{4mn}{[(2r+3)^2.n^2-m^2]\pi}$
317	7 u. 8 v. o.	$\frac{m^{2\varrho-1}}{m^{2\varrho-1}}$	$\frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}}$

Seite	Zeile	statt	lese man
319	7 v. u.	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$
335	16 u. 17 v. o.	jedesmal das Zeichen (—) gültig, wenn n.	jedesmal die oberen Zeichen gelten, wenn n gerad, die unteren aber, wenn n ungerad ist.
—	2 v. u.	-4π	4π
340	8 v. u.	$-\frac{2r-1}{2}\pi$	$\frac{2r-1}{2}\pi$
350	2 v. u.	$\frac{2.2.2.4.4.6\ldots 12.12.13\ldots}{1.1.3.3.5.5\ldots 11.12.12\ldots}$	$\frac{2.2.2.4.4.6\ldots 12.12.14\ldots}{1.1.3.3.5.5\ldots 11.13.13\ldots}$
351	1 v. o.	$\frac{143}{144}$ M . . .	$\frac{168}{169}$ M . . .
—	6 v. u.	Nro. 4.	Nro. 3.
363	5 v. u.	α' durch dU, α durch dV	α durch dU, α' durch dV
364	13 v. o.	von dem zweyten Gliede	von dem zweyten Gliede an
—	8 v. u.	$n\Delta Z^{n-1}.\Delta Z$	$n\Delta Z^{n-1}.\Delta Z$
381	8 v. u.	$\pm$ . . .	$\mp$ . . .
388	3 v. u.	§. 193	§. 179.
392	1 v. o.	Δz	Δy
—	11 u. 13 v. o.	$+\varphi\Delta z^2$	$-\varphi\Delta z^2$
400	12 v. o.	§. 100 Nro. 1	§. 202. Nro. 1
415	11 v. o.	aus einer Gleichung zwischen	aus einer zwischen
424	7. 8. 9. v. o.	dy	dz
432	10 v. u.	$(3\sqrt{z}-5b:z^2\sqrt{z}dz)$	$(3\sqrt{z}-5b:z^5\sqrt{z}).dz$
440	7 v. u.	Es ist	Es muß
444	7 v. u.	seyn, muß welche	seyn muß, welche
—	6 v. u.	Function	der Function
445	3 v. u.	beliebige	beliebig große


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06844 1826



Seite	Zeile	statt	lese man
86	11 v. o.	$\frac{D^2}{16 C^2}$	$\frac{C D^2}{16 C^3}$
—	12 v. o.	$\frac{BD}{4C}$	$\frac{BD}{4C^2}$
—	9 — 12	It	D
—	6 v. u.	Cy^2	Cy^2
95	14 v. o.	Mz^{n-4}	Mz^{m-4}
96	3 v. o.	$3z - \frac{2}{C}$	$3z - \frac{\Omega}{C}$
—	[illegible]	$z = \frac{1}{3}$	$z = \frac{1}{D}$
98	7 v. u.	106	96
100	2 v. o.	$p - 2pqz$ Cos. φ	$p^2 - 2pqz$ Cos. φ
—	5 v. o.	$\frac{p}{p}$	$\frac{p}{q}$
118	8 v. o.	$cz^{2n}\, dz^{3n}$	$cz^{2n} + dz^{3n}$
—	— —	§. 74.	§. 72.
120	9 v. u.	§. 34. Nro. 3.	§. 34.
122	1 v. u.	mz^{n-5}	mz^{n-2}
128	17 v. o.	$mz^{n-1} + nz$	$mz^{n-1} + nz^n$
—	1 v. u.	nz^{r-2}	nz^{r-1}
129	9 v. u.	$\frac{a}{z}$	$\frac{a}{z^4}$
131	4 v. u.	$\frac{-113}{18}$	$\frac{-113}{81}$
140	8 v. o.	ZP	Z𝔓
160	8 v. o.	§. 97.	§. 95.
162	10 v. o.	$a = \alpha z$	$a - \alpha z$
168	5 v. o.	C	C𝔓
169	6 v. u.	$\frac{M - [A + B(a - \alpha z) + \ldots]}{(a - \alpha z)^n}$	$\frac{M - [A + B(a - \alpha z) + \ldots]\mathfrak{P}}{(a - \alpha z)^n}$
170	5 v. u.	$[A - B(a - \alpha z) - C(a - \alpha z)^2 - \ldots - T(a - \alpha z)^{n-2} - U(a - \alpha z)^{n-1}]$	$[A + B(a - \alpha z) + C(a - \alpha z)^2 + \ldots + T(a - \alpha z)^{n-2} + U(a - \alpha z)^{n-1}]$
176	11 v. o.	$\frac{1 + 3z - z^2}{3 - z}$	$\frac{1 + 3z - z^2}{(1 + z)^2 (3 - z)}$

Seite	Zeile	statt	lese man
182	6 v. u.	§. 83. Nro. 7.	§. 85. Nro. 7.
—	11 v. o.	$\frac{}{\mathfrak{P}}$	$\frac{8}{\mathfrak{P}}$
—	2 u. 6 v. u.	§. 83.	§. 85.
183	9 v. o.	§. 83.	§. 85.
187	1 v. o.	2 p q z Cos. φ	2 p′ q′ z Cos. φ
189	6 v. o.	$2 - z + z^2$	$1 - z + z^2$
190	3 v. u.	+ o ⋈ 2	+ o ⋈ z
191	1 v. u.	ar. Sin. φ	αr. Sin. φ
192	12 v. o.	— b. Sin. φ	— g Sin.² φ
—	13 v. o.	$e r^4$. Cos. 4 φ	$e r^4$. Cos. 5 φ
193	5 v. o.	𝔥 = (𝔊 Sin. φ + g Cos. φ)	𝔥 = (𝔊. Sin. φ + g Cos. φ) r
193	7 v. u.	$\mathfrak{G}^3$	$\mathfrak{G}^2$
194	9 v. u.	Sin. φ	Sin. n φ
197	9 v. u.	$(1 - \frac{8}{3} z + z^2)$	$(1 - \frac{8}{5} z + \frac{1}{9} z^2)$
—	6 v. u.	$(1 + \frac{2}{5} z^2$	$(1 + \frac{2}{5} z$
198	2 v. o.	$+ 4 z^5$	$- 3 z^5$
—	4 v. o.	$- 4 z^5$	$- 3 z^5$
—	5 v. o.	$\frac{7}{5} z^5$	$\frac{6}{5} z^5$
—	— —	$+ \frac{13}{5} z^6$	$- \frac{13}{5} z^5$
—	6 v. o.	$\frac{7}{5} z^3$	$\frac{6}{5} z^3$
—	— —	$+ \frac{13}{5} z^4$	$- \frac{13}{5} z^4$
—	7 v. o.	$\frac{7}{5} z^3$	$\frac{6}{5} z^3$
—	— —	$- 4 z^5$	$- 3 z^6$
—	8 u. 9 v. o.	$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{(2z + 2z^2 + \frac{13}{3} z^3 - \frac{34}{3} z^4 + 2z^5 + \frac{39}{3} z^6 - 5z^7 + z^8)}{z} = 2 + 2z + \frac{13}{3} z^2 - \frac{34}{3} z^3 + 2z^4 + \frac{39}{3} z^5 - 5z^6 + z^7$	$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} - B\mathfrak{P}}{a - \alpha z} = \frac{(2z + \frac{9}{5} z^2 + \frac{8}{5} z^3 - 8z^4 + \frac{16}{5} z^5 + \frac{19}{5} z^6 - 2z^7)}{z} = 2 + \frac{9}{5} z + \frac{8}{5} z^2 - 8z^3 + \frac{16}{5} z^4 + \frac{19}{5} z^5 - 2z^6$

Seite	Zeile	statt	lese man
198	10 v. o.	$\frac{2+2z+\frac{13}{5}z^2-\frac{34}{5}z^3+\dots}{1-\frac{3}{5}z-\frac{3}{5}z^2-4z^3+\dots}$	$\frac{2+\frac{2}{5}z+\frac{8}{5}z^2-8z^3+\dots}{1-\frac{3}{5}z-\frac{3}{5}z^2-3z^3+\dots}$
—	2 v. u.	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}'$
199	6 v. o.	$+\frac{4}{5}z^5 \dots$	$+\frac{4}{5}z^2 \dots$
—	7 v. o.	$=z-\frac{8}{5}z^4+\dots$	$=z^3-\frac{8}{5}z^4+\dots$
200	6 v. u.	$1-\frac{8}{3}z+z^2$	$1-\frac{8}{5}z+z^2$
202	10 v. o.	$-\frac{153+45z}{178}$	$-\frac{159-45z}{178}$
—	— —	$\frac{25-195z}{178}$	$\frac{25+135z}{178}$
—	12 u. 18 v. o.	$\frac{25-135z}{177(1+2z+3z^2)}$	$\frac{25+135z}{178(1+2z+3z^2)}$
—	5 v. u.	$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{-1}{3}}-z\sqrt{3}\right)$	$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{-2}{3}}-z\sqrt{3}\right)$
203	7 v. u.	$p^2-2pq.z.\mathrm{Cos.}\,\varphi+q^2.z^2$	$(p^2-2pqz.\mathrm{Cos.}\,\varphi+q^2.z^2)^m$
—	5 v. u.	aus dem Factor $p^2-2pqz\,\mathrm{Cos.}\,\varphi+q^2.z^2$	aus dem Factor $\mathfrak{P}$
—	4 v. u.	$(p^2-2pqz\,\mathrm{Cos.}\,\varphi+q^2.z^2)$	$(p^2-2pqz.\mathrm{Cos.}\,\varphi.q^2.z^2)^m$
208	11 v. u.	$q^2=0$	$q^2=1$
210	3 v. o.	$B=\frac{1}{2}\frac{mpr+noq+qnp}{npr}$	$B=-\frac{1}{2}\frac{mpr+nor+qnp}{npr}$
213	13 v. o.	z	z
216	8 v. o.	$\gamma z^{\frac{1}{k}}$	$\gamma z^{\frac{1}{k}}$
217	6 v. u.	$N z^{\frac{n}{k}}$	$\frac{N}{\mathfrak{A}} z^{\frac{n}{k}}$
—	— —	$\mathfrak{N} z^{\frac{n}{k}}$	$\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}} z^{\frac{n}{k}}$
219	8 v. u.	$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} z^{\frac{b'-a}{k}}$	$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} z^{\frac{b'-a'}{k}}$

Seite	Zeile	statt	lese man
222	17 v. o.	$z^{\frac{7}{3}} - z^{\frac{31}{31}} + z^{\frac{19}{18}} - z^{\frac{47}{36}}$	$z^{\frac{5}{3}} - z^{\frac{7}{3}} + z^{\frac{7}{6}} - z^{\frac{11}{6}}$
223	10 v. o.	$\frac{8}{3} - \frac{8}{1.3}$	$\frac{8}{3} = \frac{8}{1.3}$
—	2 v. u.	$(\frac{2}{3} - 4) \cdot 4$	$(\frac{2}{3} - 3) \cdot 4$
—	1 v. u.	$= \frac{-19256}{1.2.3.4.3^4}$	$= \frac{-17216}{1.2.3.4.3^4}$ *) Hiernach verbessere man die auf Seite 224 folgende Rechnung.
230	8 v. u.	$\frac{\alpha b - a\beta}{bx^2 - \beta}$	$\frac{\alpha b - a\beta}{bx^2 - \beta} x$
233	8 v. u.	$\frac{}{3-2}$	$\frac{1}{3-2}$
250	9 v. u.	Nova Octa	Nova Acta
256	10 v. u.	§. 131.	§. 132.
258	2 v. u.	Pz^{n-1}	nPz^{n-1}
268	9 v. u.	$\frac{(z-1)^5}{2(z+1)^2}$	$\frac{(z-1)^5}{3(z+1)^5}$
269	15 v. o.	bejahte oder verneiute Brüche,	bejahte oder verneinte ächte Brüche
272	2 v. o.	(Nro. 2)	(Nro. 1)
—	3 v. o.	einer jeden bejahlen Zahl	einer jeden bejahten Zahl z
174	6 v. o.	log. z oder log. $(m+v) = B(\frac{v}{m}$,	log. z oder l. $(m+v) = l. m + B(\frac{v}{m}$
279	7 v. u.	Nro. 1	Nro. 2
303	6 u. 8 v. o.	$(1-z)^{\frac{1}{2}}$	$(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$
309	1 v. u.	$\frac{1}{2.3\ldots7} \cdot (\frac{v\pi}{180})^7$	$\frac{1}{2.3\ldots6} \cdot (\frac{v\pi}{180})^6$
316	3 v. o.	$\frac{4mn}{[(2r+1)^2 . n^2 - m^2]}$	$\frac{4mn}{[(2r+1)^2 . n^2 - m^2]\pi}$
—	—	$\frac{4mn}{[(2r+3)^2 . n^2 - m^2]}$	$\frac{4mn}{[(2r+3)^2 . n^2 - m^2]\pi}$
317	7 u. 8 v. o.	$\frac{m^{2\varrho-1}}{m^{2\varrho-1}}$	$\frac{m^{2\varrho-1}}{n^{2\varrho-1}}$

Seite	Zeile	statt	lese man
319	7 v. u.	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$
335	16 u. 17 v. o.	jedesmal das Zeichen (—) gültig, wenn rc.	jedesmal die oberen Zeichen gelten, wenn n **gerad**, die unteren aber, wenn n **ungerad** ist.
—	2 v. u.	-4π	4π
340	8 v. u.	$-\frac{2r-1}{2}\pi$	$\frac{2r-1}{2}\pi$
350	2 v. u.	$\frac{2.2.2.4.4.6\ldots 12.12.13\ldots}{1.1.3.3.5.5\ldots 11.12.12\ldots}$	$\frac{2.2.2.4.4.6\ldots 12.12.14\ldots}{1.1.3.3.5.5\ldots 11.13.13\ldots}$
351	1 v. o.	$\frac{143}{144}\varkappa\ldots$	$\frac{168}{169}\varkappa\ldots$
—	6 v. u.	Nro. 4.	Nro. 3.
363	5 v. u.	ω' durch dU, ω durch dV	ω durch dU, ω' durch dV
364	13 v. o.	von dem zweyten Gliede	von dem zweyten Gliede an
—	8 v. u.	$n\Delta Z^{n-1}.\Delta z$	$n\Delta Z^{n-1}.\Delta Z$
381	8 v. u.	$\pm\ldots$	$\mp\ldots$
388	3 v. u.	§. 197.	§. 179.
392	1 v. o.	Δz	Δy
—	11 u. 13 v. o.	$+\varphi\Delta z^2$	$-\varphi\Delta z^2$
400	12 v. o.	§. 100 Nro. 1	§. 202. Nro. 1
415	11 v. o.	aus einer Gleichung zwischen	aus einer zwischen
424	7. 8. 9. v. o.	dy	dz
432	10 v. u.	$(3\sqrt{z}-5b:z^5\sqrt{z}\,dz)$	$(3\sqrt{z}-5b:z^5\sqrt{z}).dx$
440	7 v. u.	Es ist	Es muß
444	7 v. u.	seyn, muß welche	seyn muß, welche
—	6 v. u.	Function	der Function
445	3 v. u.	beliebige	beliebig große